

TIPE

Introduction au mouvement brownien

Rédigé par

Louis GUILLET

sous la direction de

Raphël DUCATEZ

9 juillet 2026

Table des matières

1	Marches aléatoires	2
1.1	Définition	2
1.2	Marche aléatoire en dimension 1	3
1.3	Convergence vers une loi normale	6
1.4	Probabilités continues	8
1.5	Équation de la chaleur	9
1.6	Résolution de l'équation de la chaleur	11
1.7	Théorème central limite	13
2	Mouvement brownien	15
2.1	Définition via les marches aléatoires	15
2.2	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck	17
2.3	Régime stationnaire (cas discret)	20
2.4	Simulation Numérique du Processus d'Ornstein-Uhlenbeck	22
2.4.1	Schéma de Discrétisation	22
2.4.2	Analyse des Résultats Graphiques	23

Chapitre 1

Marches aléatoires

1.1 Définition

Les marches aléatoires constituent l'un des modèles probabilistes les plus simples permettant de décrire l'évolution d'un système soumis au hasard. Elles interviennent dans de nombreux domaines tels que la physique statistique, la théorie des probabilités, la finance ou encore la biologie.

Soit $d \geq 1$. Une **marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$** est une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans le réseau $\mathbb{Z}^d$, définie par

$$S_0 = x_0 \in \mathbb{Z}^d,$$

et, pour tout entier $n \geq 0$,

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1},$$

où $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. Les variables (X_n) sont appelées les *incréments* ou *pas* de la marche.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, on obtient

$$S_n = x_0 + \sum_{k=1}^n X_k.$$

Autrement dit, la position de la particule après n étapes est obtenue en additionnant successivement les déplacements élémentaires effectués à chaque instant.

Dans toute la suite, on supposera que les incréments vérifient

$$\mathbb{E}[X_1] = 0$$

et possèdent une matrice de covariance finie

$$\Sigma = \text{Cov}(X_1).$$

L'hypothèse de moyenne nulle signifie que la marche ne présente pas de direction privilégiée : en moyenne, la particule ne dérive vers aucune direction particulière. Cette propriété jouera un rôle fondamental lors de l'étude de la convergence de la marche aléatoire vers le mouvement brownien. La matrice Σ est appelée **matrice de covariance** des incréments. Elle est définie par

$$\Sigma = \text{Cov}(X_1) = \left(\text{Cov}(X_1^{(i)}, X_1^{(j)}) \right)_{1 \leq i, j \leq d},$$

où $X_1 = (X_1^{(1)}, \dots, X_1^{(d)})$ désigne les coordonnées du vecteur aléatoire X_1 .

Les coefficients de cette matrice sont donnés par

$$\text{Cov}(X_1^{(i)}, X_1^{(j)}) = \mathbb{E} \left[\left(X_1^{(i)} - \mathbb{E}[X_1^{(i)}] \right) \left(X_1^{(j)} - \mathbb{E}[X_1^{(j)}] \right) \right].$$

Les termes diagonaux correspondent aux variances de chacune des composantes du vecteur X_1 , tandis que les termes hors diagonale mesurent les corrélations linéaires entre les différentes composantes.

Dans le cas particulier où les composantes de X_1 sont indépendantes et de variance 1, la matrice de covariance est la matrice identité d'ordre d :

$$\Sigma = I_d.$$

1.2 Marche aléatoire en dimension 1

Dans cette section, nous considérons une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.

Définition

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

La position de la marche à l'instant n est définie par

$$X_0 = 0,$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Autrement dit, à chaque étape, la particule se déplace d'une unité vers la droite avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Espace probabilisé

L'espace des résultats élémentaires est

$$\Omega = \{-1, 1\}^n,$$

dont chaque élément est une suite de n déplacements.

La tribu considérée est la tribu discrète

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega),$$

et l'on munit cet espace de la probabilité uniforme

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, toutes les suites de déplacements sont équiprobables.

Calcul de la loi de X_n

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Nous cherchons à déterminer la probabilité

$$\mathbb{P}(X_n = k).$$

Notons

$$N_+$$

le nombre de déplacements égaux à $+1$ et

$$N_-$$

le nombre de déplacements égaux à -1 .

Ces deux quantités vérifient naturellement

$$N_+ + N_- = n,$$

puisque chacun des n déplacements est soit égal à 1 , soit égal à -1 .

Par ailleurs, la position finale étant égale à la somme des déplacements,

$$X_n = N_+ - N_-,$$

on obtient le système

$$\begin{cases} N_+ + N_- = n, \\ N_+ - N_- = k. \end{cases}$$

Sa résolution donne

$$N_+ = \frac{n+k}{2}, \quad N_- = \frac{n-k}{2}.$$

Ces deux entiers doivent être des nombres entiers naturels. Cette condition impose que $n+k$ et $n-k$ soient pairs.

Autrement dit, n et k doivent avoir la même parité.

En particulier,

- si n est pair, alors k doit être pair ;
- si n est impair, alors k doit être impair.

Dans le cas contraire,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = 0.$$

Supposons désormais que n et k aient la même parité.

Pour obtenir la position k , il suffit de choisir les $N_+ = \frac{n+k}{2}$ instants où la particule effectue un déplacement vers la droite. Les autres déplacements sont alors nécessairement égaux à -1 .

Le nombre de suites favorables est donc

$$\binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$$

Comme toutes les suites de déplacements sont équiprobables et que

$$|\Omega| = 2^n,$$

on obtient finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}},}$$

lorsque n et k sont de même parité et que $|k| \leq n$.

Dans tous les autres cas,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) = 0.}$$

Cette expression explicite de la loi de X_n constitue le point de départ de l'étude asymptotique de la marche aléatoire. Dans la section suivante, nous établirons un équivalent de cette probabilité lorsque le nombre de pas tend vers l'infini, ce qui permettra de mettre en évidence l'apparition de la loi normale.

1.3 Convergence vers une loi normale

Dans la section précédente, nous avons établi que, pour tout entier k de même parité que n ,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$$

Nous cherchons à étudier le comportement asymptotique de cette probabilité lorsque le nombre de pas n devient grand.

Approximation de Stirling

On admet la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

En posant

$$m = \frac{n+k}{2},$$

la loi précédente s'écrit

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n!}{2^n m! (n-m)!}.$$

En appliquant la formule de Stirling aux trois factorielles, on obtient

$$\mathbb{P}(X_n = k) \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{2^n \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi(n-m)} \left(\frac{n-m}{e}\right)^{n-m}}.$$

Les termes exponentiels en e se simplifient puisque

$$m + (n-m) = n.$$

Il reste alors

$$\mathbb{P}(X_n = k) \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi m(n-m)}} \frac{n^n}{2^n m^m (n-m)^{n-m}}.$$

Or

$$m = \frac{n+k}{2}, \quad n-m = \frac{n-k}{2},$$

ce qui permet d'écrire

$$m(n-m) = \frac{n^2 - k^2}{4}.$$

Après simplification des puissances de 2 et développement limité du logarithme au voisinage de 0, on obtient

$$\ln\left(\frac{n^n}{2^n m^m (n-m)^{n-m}}\right) = -\frac{k^2}{2n} + o(1),$$

lorsque

$$k = o(n).$$

Par exponentiation, il vient

$$\frac{n^n}{2^n m^m (n-m)^{n-m}} \sim \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right).$$

Par ailleurs,

$$\sqrt{m(n-m)} \sim \frac{n}{2},$$

d'où finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right).}$$

Interprétation

La variable X_n est discrète et prend ses valeurs sur les entiers de même parité que n . L'expression précédente montre cependant que, lorsque n est grand, sa loi est approchée par une fonction en cloche de type gaussien.

Introduisons alors la variable renormalisée

$$Z_n = \frac{X_n}{\sqrt{n}}.$$

L'espacement entre deux valeurs successives de Z_n est égal à

$$\frac{2}{\sqrt{n}},$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La loi discrète de Z_n tend ainsi vers une loi continue de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

qui est la densité de la loi normale centrée réduite

$$\mathcal{N}(0, 1).$$

On obtient ainsi le résultat fondamental

$$\boxed{\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1),}$$

qui constitue une première manifestation du théorème central limite.

1.4 Probabilités continues

Dans cette section, on introduit la notion de variable aléatoire à densité, qui permet de généraliser la notion de probabilité aux espaces continus.

Variables aléatoires à densité

Une variable aléatoire réelle X est dite **à densité** s'il existe une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx,$$

où l'intégrale est une intégrale au sens de Riemann.

La fonction f est appelée **densité de probabilité** de X .

Propriété fondamentale

Toute densité de probabilité vérifie la condition de normalisation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1.$$

Cette propriété traduit le fait que la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur dans l'univers entier vaut 1.

Exemple : loi normale

Un exemple fondamental de variable aléatoire à densité est la **loi normale** de paramètres μ et σ^2 , notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Elle admet pour densité la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Les paramètres μ et σ^2 correspondent respectivement à l'espérance et à la variance de la loi.

1.5 Équation de la chaleur

On considère une marche aléatoire en dimension 1 décrivant le déplacement d'une particule sur le réseau $\mathbb{Z}$.

Modèle discret

On fixe deux paramètres :

- $\ell > 0$ la longueur d'un saut spatial,
- $\tau > 0$ le pas de temps entre deux sauts.

La particule se déplace de la manière suivante : à chaque instant $t = n\tau$, elle se trouve en une position multiple de ℓ et effectue un saut de longueur ℓ vers la droite ou vers la gauche avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On note alors $K(x, t)$ la probabilité que la particule soit en position $x \in \ell\mathbb{Z}$ au temps $t = n\tau$.

Ainsi,

$$K(x, t + \tau) = \frac{1}{2}K(x - \ell, t) + \frac{1}{2}K(x + \ell, t).$$

Cette relation exprime que pour être en x au temps $t + \tau$, la particule devait nécessairement être en $x - \ell$ ou $x + \ell$ au temps précédent.

Passage au continu

On s'intéresse au régime où $\ell \rightarrow 0$ et $\tau \rightarrow 0$, en supposant que la fonction $K(x, t)$ admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2.

On effectue un développement de Taylor :

$$K(x \pm \ell, t) = K(x, t) \pm \ell \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) + \frac{\ell^2}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t) + o(\ell^2).$$

De même,

$$K(x, t + \tau) = K(x, t) + \tau \frac{\partial K}{\partial t}(x, t) + o(\tau).$$

En remplaçant dans la relation de récurrence, on obtient :

$$K(x, t) + \tau \frac{\partial K}{\partial t}(x, t) = K(x, t) + \frac{\ell^2}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t) + o(\tau) + o(\ell^2).$$

Après simplification, il vient :

$$\tau \frac{\partial K}{\partial t}(x, t) = \frac{\ell^2}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t) + o(\tau) + o(\ell^2).$$

Échelle diffusive

On suppose que les paramètres ℓ et τ tendent vers 0 de manière couplée, en imposant que le rapport

$$D = \frac{\ell^2}{2\tau}$$

converge vers une constante strictement positive $D > 0$.

Cette hypothèse permet d'obtenir une limite non dégénérée : si ℓ tendait trop vite vers 0 par rapport à τ , le mouvement serait instantanément diffusé ; inversement, si τ dominait, la particule resterait immobile.

Équation limite

En divisant par τ et en faisant tendre $\ell, \tau \rightarrow 0$, on obtient :

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t).$$

On obtient ainsi l'équation de la chaleur.

Interprétation probabiliste

La fonction $K(x, t)$ représente la probabilité (ou, dans le passage continu, la densité de probabilité) de présence d'une particule soumise à une agitation aléatoire.

Elle décrit donc l'évolution dans le temps de la répartition spatiale d'une particule effectuant une marche aléatoire microscopique.

L'équation de la chaleur apparaît ainsi comme la limite continue d'un modèle discret de déplacements aléatoires, reliant directement dynamique microscopique et comportement macroscopique diffusif.

1.6 Résolution de l'équation de la chaleur

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur obtenue précédemment :

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t), \quad D > 0.$$

Recherche d'une solution gaussienne

L'étude probabiliste de la marche aléatoire suggère que la solution doit être une loi de type gaussien. On cherche donc une solution sous la forme :

$$K(x, t) = A(t) \exp(-B(t)x^2),$$

où $A(t) > 0$ et $B(t) > 0$ sont deux fonctions à déterminer.

Substitution dans l'équation

On calcule les dérivées :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = A'(t)e^{-B(t)x^2} - A(t)B'(t)x^2e^{-B(t)x^2},$$

et

$$\frac{\partial K}{\partial x} = -2A(t)B(t)xe^{-B(t)x^2},$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = (4A(t)B(t)^2x^2 - 2A(t)B(t))e^{-B(t)x^2}.$$

En substituant dans l'équation de la chaleur, et en simplifiant par le facteur exponentiel non nul, on obtient :

$$A'(t) - A(t)B'(t)x^2 = D(4A(t)B(t)^2x^2 - 2A(t)B(t)).$$

Identification des coefficients

Cette égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on identifie les coefficients de 1 et de x^2 , ce qui donne le système :

$$\begin{cases} A'(t) = -2DA(t)B(t), \\ -B'(t)A(t) = 4DA(t)B(t)^2. \end{cases}$$

En simplifiant par $A(t) \neq 0$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{A'(t)}{A(t)} = -2DB(t), \\ B'(t) = -4DB(t)^2. \end{cases}$$

Résolution du système

On résout d'abord l'équation sur B :

$$B'(t) = -4DB(t)^2.$$

Elle est à variables séparables :

$$\frac{dB}{B^2} = -4D dt.$$

On obtient :

$$B(t) = \frac{1}{4Dt + C}.$$

Ensuite,

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = -\frac{2D}{4Dt + C}.$$

On intègre :

$$A(t) = \frac{C'}{\sqrt{4Dt + C}}.$$

Détermination des constantes

On cherche une solution correspondant à une particule initialement localisée en 0. Formelle-ment, cela correspond à une masse initiale concentrée en un point, représentée par la mesure de Dirac δ_0 .

Intuitivement, cela signifie que toute la probabilité est concentrée en $x = 0$ au temps $t = 0$, et qu'elle se diffuse ensuite.

Cette condition impose que la solution soit normalisée :

$$\int_{\mathbb{R}} K(x, t) dx = 1.$$

On en déduit que les constantes sont :

$$C = 0, \quad C' = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}}.$$

Solution fondamentale

On obtient ainsi :

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

Cette fonction est une densité de probabilité.

Remarque en dimension d

En dimension d , la solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial K}{\partial t} = D\Delta K$$

est encore gaussienne et s'écrit :

$$K(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4Dt}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Elle décrit la diffusion isotrope d'une particule soumise à une agitation aléatoire dans l'espace.

1.7 Théorème central limite

Le théorème central limite est un résultat fondamental de la théorie des probabilités, expliquant l'apparition universelle de la loi normale dans les phénomènes de sommes de variables aléatoires indépendantes.

Énoncé

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telles que

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_1) = \sigma^2 < +\infty.$$

On définit la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Alors on a la convergence en loi :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Autrement dit, après centrage par la moyenne et renormalisation par $\sqrt{n}$, la somme des variables aléatoires converge vers une loi normale.

Remarque

Ce théorème sera admis dans la suite. Il constitue un outil fondamental permettant de justifier rigoureusement l'apparition de la loi normale dans l'étude des marches aléatoires et du mouvement brownien.

Chapitre 2

Mouvement brownien

2.1 Définition via les marches aléatoires

Le mouvement brownien peut être introduit comme la limite d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, lorsque l'échelle spatiale et l'échelle temporelle tendent vers zéro de manière appropriée.

Construction discrète

Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ définie par

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1},$$

où les incréments (X_n) sont i.i.d., centrés, et de covariance $\Sigma = I_d$.

On suppose que les incréments vérifient :

$$\mathbb{P}(X_1 = e_i) = \mathbb{P}(X_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}, \quad i = 1, \dots, d,$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Ainsi, à chaque étape, la particule choisit uniformément une direction parmi les axes et se déplace d'une unité dans cette direction.

On a alors :

$$\mathbb{E}[X_1] = 0, \quad \text{Cov}(X_1) = \frac{1}{d} I_d.$$

On introduit une échelle temporelle $\tau > 0$ et une échelle spatiale $\ell > 0$, et on définit le processus renormalisé :

$$B^\varepsilon(t) = \ell S_{\lfloor t/\tau \rfloor}.$$

On impose le régime diffusif :

$$\frac{\ell^2}{\tau} \rightarrow 2D \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

où $D > 0$ est une constante de diffusion.

Justification par le théorème central limite

Pour un temps fixé t , on a :

$$B^\varepsilon(t) = \ell \sum_{k=1}^{\lfloor t/\tau \rfloor} X_k.$$

Par le théorème central limite,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \Longrightarrow \mathcal{N}(0, I_d).$$

En prenant $n = \lfloor t/\tau \rfloor$ et en utilisant $\ell^2 n \sim 2Dt$, on obtient :

$$B^\varepsilon(t) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2Dt I_d).$$

Ainsi, à temps fixé, la position limite est une variable aléatoire gaussienne.

Remarque importante

Pour un temps fixé t , $B(t)$ est une **variable aléatoire à densité**. En revanche, le mouvement brownien n'est pas une seule variable, mais un **processus**, c'est-à-dire un ensemble non dénombrable de variables aléatoires indexées par le temps :

$$(B(t))_{t \geq 0}.$$

Chaque trajectoire $t \mapsto B(t)$ est une fonction aléatoire continue, représentant un objet infiniment riche.

Axiomes du mouvement brownien

On admet que le processus limite $(B(t))_{t \geq 0}$ vérifie les propriétés suivantes :

— **(1) Initialisation** :

$$B(0) = 0.$$

Intuitivement, la particule part de l'origine.

- **(2) Accroissements indépendants** : Pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables

$$B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

sont indépendantes. Cela traduit l'absence de mémoire du système.

- **(3) Accroissements gaussiens stationnaires** : Pour tout $s < t$,

$$B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, 2D(t-s)I_d).$$

La loi ne dépend que de la durée $t - s$, ce qui traduit l'homogénéité du temps.

- **(4) Continuité des trajectoires** : Avec probabilité 1, la fonction $t \mapsto B(t)$ est continue. Cela signifie que, bien que les fluctuations soient aléatoires, il n'y a pas de saut brutal.

Interprétation

Le mouvement brownien décrit donc un processus aléatoire continu dans le temps, obtenu comme limite d'une succession de petits déplacements indépendants.

Il permet de modéliser l'évolution d'une particule soumise à une agitation microscopique.

Ainsi, le passage de la marche aléatoire au mouvement brownien correspond à une transition du discret vers le continu, rendue possible par le théorème central limite et le choix d'une échelle diffusives adaptée.

2.2 Processus d'Ornstein–Uhlenbeck

On considère un pas de temps $\Delta t > 0$ et on définit $t_n = n\Delta t$. On note $(X_n)_{n \geq 0}$ la position du processus.

Agitation aléatoire et choix de la loi

On introduit une source de bruit représentant l'agitation thermique du milieu. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(\xi_k)_{k \geq 1}$ telles que :

$$\mathbb{P}(\xi_k = \sqrt{\Delta t}) = \mathbb{P}(\xi_k = -\sqrt{\Delta t}) = \frac{1}{2}.$$

Ce choix est fondamental : il garantit que

$$\mathbb{E}[\xi_k] = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var}(\xi_k) = \Delta t,$$

ce qui permet d'obtenir, à la limite, un processus de type brownien.

On introduit également un paramètre $\sigma > 0$, appelé **intensité du bruit**, qui mesure l'amplitude des fluctuations aléatoires.

Ainsi, le terme d'agitation est donné par :

$$\sigma \xi_{k+1}.$$

Force de rappel

On ajoute une force de rappel vers l'origine, proportionnelle à la position :

$$-\theta X_n,$$

où $\theta > 0$.

Intuitivement, ce terme ramène le système vers l'équilibre.

Relation de récurrence

La dynamique discrète s'écrit alors :

$$X_{n+1} = X_n - \theta X_n \Delta t + \sigma \xi_{n+1}.$$

On interprète :

- X_n : état du système,
- $-\theta X_n \Delta t$: dissipation,
- $\sigma \xi_{n+1}$: agitation aléatoire.

Somme et séparation des contributions

En sommant la relation de récurrence, on obtient :

$$X_n = X_0 - \theta \sum_{k=0}^{n-1} X_k \Delta t + \sigma \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

On sépare ainsi clairement deux contributions :

- une somme déterministe (dissipation),
- une somme aléatoire (bruit).

On pose le temps continu :

$$t = n \Delta t.$$

Passage à la limite

On passe ensuite au régime continu en faisant tendre $\Delta t \rightarrow 0$.

La somme de Riemann vérifie alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} X_k \Delta t \longrightarrow \int_0^t X(s) ds.$$

De plus, la somme des variables aléatoires converge vers le mouvement brownien construit précédemment :

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \longrightarrow B_t.$$

Comme pour la construction du mouvement brownien , on considère le processus discret $X^{\Delta t}$, lorsque que $\Delta t \rightarrow 0$ on admet que la famille $(X_n)_{n \geq 0}$ converge vers un processus continu X_t . sous cette hyphotèse, la somme de Riemann converge vers l'intégrale tandis que la somme des variables converge vers le mouvement brownien construit précédemment.

Équation limite

On obtient alors :

$$X_t = X_0 - \theta \int_0^t X(s) ds + \sigma B_t.$$

En dérivant formellement, on obtient l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dB_t.$$

Condition de non-dégénérescence

Le choix de l'échelle $\sqrt{\Delta t}$ pour les incréments est essentiel : il garantit que

$$\text{Var}(\sigma \xi_k) = \sigma^2 \Delta t.$$

Ainsi, sur un intervalle de temps fini, la variance totale est proportionnelle au temps :

$$\sum \text{Var}(\sigma \xi_k) \sim \sigma^2 t.$$

Si le bruit avait une amplitude indépendante de Δt , la variance divergerait lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ (cas explosif). À l'inverse, si le bruit était d'ordre plus petit que $\sqrt{\Delta t}$, il disparaîtrait à la limite (cas dégénéré).

Le choix $\sqrt{\Delta t}$ constitue donc le seul régime permettant un équilibre non trivial entre agitation et dissipation.

2.3 Régime stationnaire (cas discret)

On se place ici dans un cadre entièrement discret, avec un pas de temps $\Delta t > 0$ fixé. On s'intéresse au comportement lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui permet de mettre en évidence l'existence d'un régime stationnaire.

Dynamique discrète

On part du schéma :

$$X_{n+1} = X_n - \theta X_n \Delta t + \sigma \xi_{n+1},$$

où (ξ_n) est une suite i.i.d. vérifiant

$$\mathbb{E}[\xi_n] = 0, \quad \text{Var}(\xi_n) = \Delta t.$$

On pose

$$a = 1 - \theta \Delta t,$$

ce qui donne :

$$X_{n+1} = aX_n + \sigma \xi_{n+1}.$$

Expression explicite

Par récurrence, on obtient :

$$X_n = a^n X_0 + \sigma \sum_{k=1}^n a^{n-k} \xi_k.$$

On distingue donc :

- un terme mémoire $a^n X_0$,
- une somme pondérée de perturbations aléatoires.

Comme $|a| < 1$ (pour Δt suffisamment petit), on a :

$$a^n X_0 \longrightarrow 0,$$

ce qui traduit la perte de mémoire du système.

Pourquoi le TCL classique ne suffit pas

La somme

$$\sum_{k=1}^n a^{n-k} \xi_k$$

n'est pas une somme de variables identiquement distribuées : les coefficients a^{n-k} pondèrent les variables de manière non uniforme.

Ainsi, le théorème central limite classique ne s'applique pas directement.

On utilise alors une version plus générale : le **théorème central limite de Lindeberg–Feller**.

TCL de Lindeberg–Feller (intuition)

Ce théorème généralise le TCL classique aux sommes de variables indépendantes non identiquement distribuées.

Il affirme que si aucune contribution individuelle ne domine asymptotiquement la somme, alors la normalisation appropriée conduit encore à une loi normale.

Intuitivement : la somme de nombreuses petites fluctuations indépendantes, même pondérées, converge vers une gaussienne dès que chaque terme reste négligeable devant la somme totale.

Variance de la limite

On calcule la variance de X_n :

$$\text{Var}(X_n) = \text{Var} \left(a^n X_0 + \sigma \sum_{k=1}^n a^{n-k} \xi_k \right).$$

Comme X_0 est indépendant du bruit et que les ξ_k sont indépendants :

$$\text{Var}(X_n) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a^{2(n-k)} \text{Var}(\xi_k).$$

Or $\text{Var}(\xi_k) = \Delta t$, donc :

$$\text{Var}(X_n) = \sigma^2 \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} a^{2k}.$$

Cette somme géométrique donne :

$$\text{Var}(X_n) = \sigma^2 \Delta t \frac{1 - a^{2n}}{1 - a^2}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $|a| < 1$, on obtient :

$$\text{Var}(X_n) \longrightarrow \frac{\sigma^2 \Delta t}{1 - a^2}.$$

Convergence en loi

On obtient alors :

$$X_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2), \quad \sigma_\infty^2 = \frac{\sigma^2 \Delta t}{1 - a^2}.$$

Interprétation

On obtient ainsi un équilibre entre :

- la dissipation (facteur a),
- le bruit aléatoire ($\sigma \xi_n$).

Le processus d'Ornstein–Uhlenbeck admet une loi stationnaire gaussienne explicite, obtenue directement par le calcul de la variance de la somme géométrique des perturbations. Cette loi stationnaire existe pour tout Δt fixe, le passage à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ permet uniquement de retrouver la version continue du processus, mais n'est pas nécessaire pour établir l'existence de la distribution stationnaire. Cette loi stationnaire traduit l'équilibre statistique du système : les fluctuations persistent mais restent bornées grâce à la force de rappel.

2.4 Simulation Numérique du Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Afin d'illustrer le comportement dynamique et les propriétés asymptotiques du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU), nous mettons en œuvre une simulation numérique basée sur la discrétisation temporelle de son équation différentielle stochastique (EDS).

2.4.1 Schéma de Discrétisation

Pour rappel, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck X_t est régi par l'EDS suivante :

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dW_t \tag{2.1}$$

où $\lambda > 0$ représente la force de rappel vers la moyenne (ici nulle), $\sigma > 0$ désigne l'intensité du bruit brownien, et W_t est un processus de Wiener standard.

Pour simuler ce processus de manière discrète sur un horizon temporel $[0, T]$ divisé en N intervalles de pas $\Delta t = T/N$. La relation de récurrence s'écrit :

$$X_{k+1} = X_k - \lambda X_k \Delta t + \sigma \Delta W_k \tag{2.2}$$

2.4.2 Analyse des Résultats Graphiques

L'analyse de la trajectoire simulée et de sa distribution empirique confirme les propriétés théoriques fondamentales du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

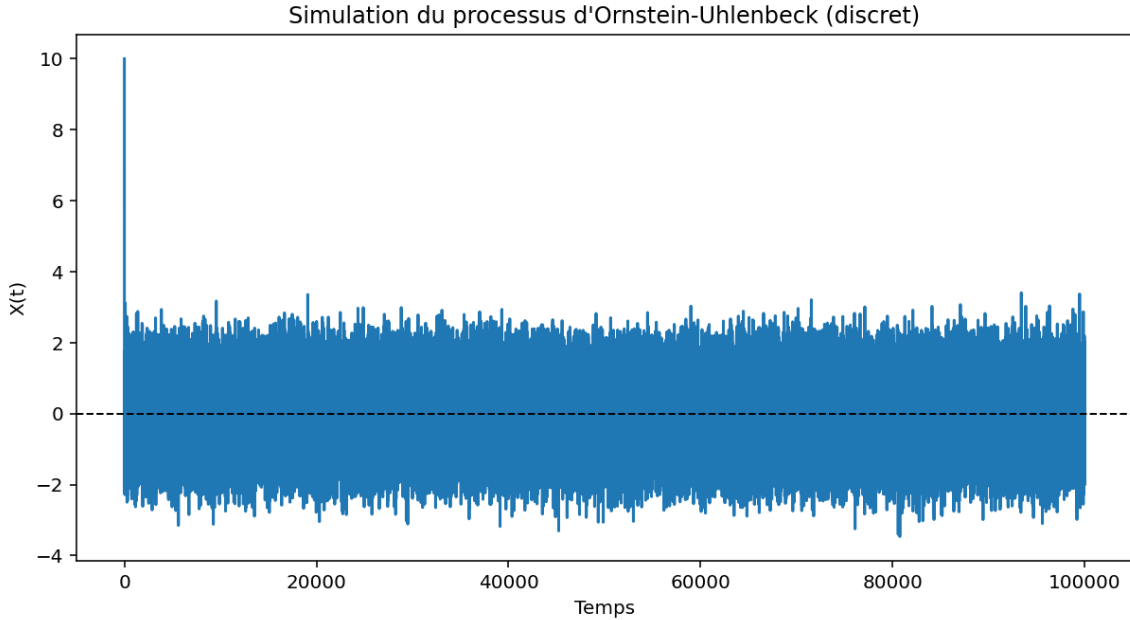


FIGURE 2.1 – Trajectoire temporelle du processus d'Ornstein-Uhlenbeck ($X_0 = 10$, $\lambda = 1$, $\sigma = 1$). On observe une décroissance déterministe rapide vers l'équilibre (phénomène de retour à la moyenne) suivie d'un régime stationnaire fluctuant autour de zéro.

En premier lieu, la Figure 2.1 illustre la dynamique temporelle de $X(t)$. Bien que le processus débute à une valeur extrême de $X_0 = 10$, la dérive négative $-\lambda X_t$ force une convergence exponentielle rapide vers sa moyenne à long terme ($\mu = 0$). Une fois cette phase transitoire passée (pour $t > 5$), le processus oscille de manière stable autour de l'asymptote, démontrant l'effet de la force de rappel qui compense les fluctuations aléatoires induites par le terme de diffusion σdW_t .

En second lieu, la Figure 2.2 présente la distribution empirique des états du processus calculée uniquement sur la seconde moitié de la trajectoire ($t \in [5000, 10000]$), assurant ainsi l'effacement complet de l'impact de la condition initiale.

Théoriquement, la distribution stationnaire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck est une loi gaussienne de moyenne $\mu = 0$ et de variance :

$$\sigma_\infty^2 = \frac{\sigma^2}{2\lambda} = \frac{1.0^2}{2 \times 1.0} = 0.5 \quad (2.3)$$

L'histogramme obtenu corrobore ce résultat : la distribution présente un profil symétrique en cloche parfaitement centré en 0. La densité maximale observée est proche de $1/\sqrt{2\pi\sigma_\infty^2} = 1/\sqrt{\pi} \approx 0.56$, ce qui valide numériquement la convergence vers la mesure invariante théorique.

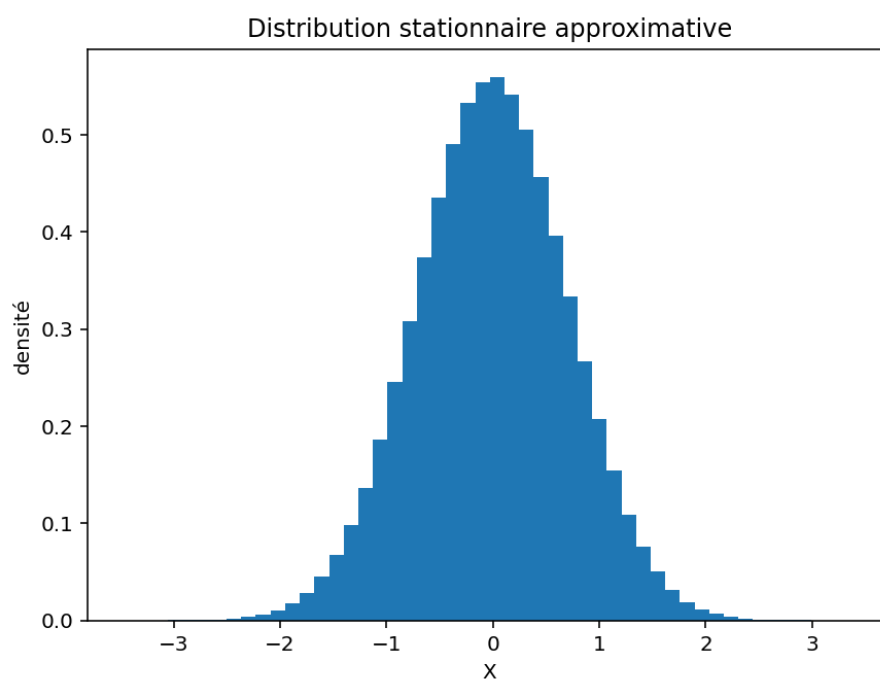


FIGURE 2.2 – Histogramme des fréquences empiriques du processus en régime stationnaire (calculé sur la seconde moitié de la simulation). La forme obtenue concorde parfaitement avec la densité d’une loi normale centrée.