Jeu CHSH
Compte-rendu de T.I.P.E.

Gabriel JULLIEN
Sous la direction de Guillaume AUBRUN
Université Claude Bernard Lyon 1

2023

Contents

1 Introduction **3**

2 Préliminaires **3**

2.1 Résultats sur les matrices hermitiennes et les endomorphismes hermitiens 3

2.2 Produit tensoriel, produit de Kronecker 4

2.3 Axiomes de la mécanique quantique 7

3 Jeu CHSH **8**

3.1 Jeu CHSH classique 8

3.2 Jeu CHSH quantique 9

3.2.1 Stratégie 9

3.2.2 Borne de Tsirelson 13

4 Conclusion **16**

1 Introduction

Dans la suite, $\mathbb{C}$ désignera le corps des nombres complexes, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$.
On utilisera la notation de Dirac, ainsi $|\psi\rangle$ désignera un élément de $\mathbb{C}^n$ et $\langle\psi|$ son dual.
L'objectif de ce compte-rendu est de présenter l'inégalité CHSH et l'intrication quantique d'un point de vue mathématique, à travers l'image d'un jeu probabiliste. En particulier, on montrera à travers la formulation mathématique de la mécanique quantique que celle-ci permet des propriétés physiques impossibles dans le cas classique.
Afin de simplifier le sujet et de l'adapter à un niveau de premier cycle universitaire, on travaillera dans l'espace hermitien $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, et on étudiera des systèmes indépendants du temps.

2 Préliminaires

2.1 Résultats sur les matrices hermitiennes et les endomorphismes hermitiens

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est hermitienne, ou autoadjointe, si $A = A^* = \overline{A^T}$.
Par le théorème spectral, toute matrice autoadjointe est semblable à une matrice diagonale. En particulier, la forme diagonale de toute matrice autoadjointe est égale à la transposée de sa conjuguée, d'où les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont nécessairement réelles.

Définition 1 *On définit une relation d'ordre sur l'ensemble des matrices hermitiennes :*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices hermitiennes. On définit :

$$A \leq B \iff B - A \text{ est positive}$$

On rappelle qu'une matrice hermitienne A est dite positive si, de manière équivalente :

(i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), X \neq 0, X^* A X \geq 0$

(ii) Toutes les valeurs propres de A (nécessairement réelles) sont positives

On dit que A est négative si $-A$ est positive.
On peut facilement vérifier que cette relation définit bien un ordre sur l'ensemble des matrices autoadjointes.

Proposition 1 *On note quelques propriétés liées à cette relation d'ordre :*
(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne. Alors $A^2 \geq 0$.
(ii) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice d'un projecteur orthogonal. Alors $P \geq 0$.
(iii) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitiennes. Alors AB est une matrice hermitienne si et seulement si $AB = BA$.

DÉMONSTRATION —

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ autoadjointe. Alors, par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
Alors : $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$
En particulier, A^2 et D^2 ont les mêmes valeurs propres. Etant donné que les valeurs propres de D sont réelles, celles de D^2 sont réelles et positives. Ainsi, les valeurs propres de A^2 sont toutes réelles et positives, d'où $A^2 \geq 0$

(ii) Soit P la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base quelconque. P est autoadjoint, et d'après la propriété précédente : $P^2 \geq 0$. $P^2 = P$, d'où $P \geq 0$
En particulier, les valeurs propres de P sont soit 0, soit 1, on a alors : $0 \leq P \leq Id$ avec Id la matrice identité de taille $n \times n$.

(iii) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices hermitiennes. Alors $(AB)^* = \overline{(AB)^T} = \overline{B^T A^T} = BA$.
D'où : $(AB)^* = AB$ si et seulement si $AB = BA$. ■

Soit f, g deux endomorphismes hermitiens de $\mathbb{C}^n$ et F, G leurs matrices respectives dans une base quelconque. On pose :

$$f \leq g \iff F \leq G$$

2.2 Produit tensoriel, produit de Kronecker

Définition 2 *On définit le produit tensoriel entre deux espaces hermitiens :*
Soit p, q deux entiers non nuls. On peut identifier l'espace $\mathbb{C}^p$ à l'espace des applications de $\{1, ..., p\}$ dans $\mathbb{C}$, et chaque vecteur $x \in \mathbb{C}^p$ à l'application qui pour chaque $i \in \{1, ..., p\}$ renvoie la i-ème composante de x.
On note $\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q$ le produit tensoriel entre les espaces $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^q$, défini comme l'espace des fonctions de $\{1, ..., p\} \times \{1, ..., q\}$ dans $\mathbb{C}$.
Soit $x \in \mathbb{C}^p$ et $y \in \mathbb{C}^q$. On définit alors le tenseur $x \otimes y \in \mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q$ comme l'application qui à $(i, j) \in \{1, ..., p\} \times \{1, ..., q\}$ associe $x_i y_j$, où x_i est la i-ème composante de x, et y_j est la j-ème composante de y.
Les éléments de $\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q$ de la forme $x \otimes y$ sont appelés tenseurs élémentaires.

Proposition 2 *Tous les tenseurs ne sont pas des tenseurs élémentaires.*

DÉMONSTRATION — Montrons par exemple que $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$, avec (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$, n'est pas un tenseur élémentaire de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

Soit $(i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2\}$.
Alors
$$(e_1 \otimes e_1)_{(i,j)} = e_{1,i}e_{1,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i=j=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$
De même :
$$(e_2 \otimes e_2)_{(i,j)} = e_{2,i}e_{2,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i=j=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$
On en déduit :
$$(e_1 \otimes e_1)_{(i,j)} + (e_2 \otimes e_2)_{(i,j)} = e_{1,i}e_{1,j} + e_{2,i}e_{2,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Supposons qu'il existe $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^n, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^n$ tels que pour tous $(i,j) \in \{1,2\}$,
$$x \otimes y = x_i y_j \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$
Alors :
$$\forall i \in \{1,2\}, x_i = \frac{1}{y_i}$$
Ce qui implique :
$$\forall i \in \{1,2\}, y_i \neq 0, x_i \neq 0$$
Mais :
$$\forall i \in \{1,2\}, y_i \neq 0, x_i \neq 0 \implies \forall (i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2\}, x_i y_j \neq 0$$
Il y a contradiction : il n'existe donc pas $x, y \in \mathbb{C}^2$ tels que :
$x \otimes y = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ ■

Définition 3 *Soit p' et q' deux entiers non nuls, $f : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^{p'}$ et $g : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^{q'}$ deux applications linéaires. On définit le produit tensoriel entre f et g :*
$f \otimes g : \mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^{p'} \otimes \mathbb{C}^{q'}, x \otimes y \to (f(x)) \otimes (g(y))$

En pratique, on utilise le produit de Kronecker, un cas particulier du produit tensoriel. Soit $A \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p' \times q'}(\mathbb{C})$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$. Alors leur produit tensoriel $A \otimes B \in \mathcal{M}_{pp' \times qq'}(\mathbb{C})$ vaut :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ a_{21}B & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pq}B \end{pmatrix}$$

Définition 4 *On définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ comme suit :*

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n,$$
$$\langle x, y\rangle = \textstyle\sum_{i,j} \overline{x_{ij}} y_{ij}$$

Où x_{ij} et y_{ij} sont les composantes de x et y, avec $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$.

On vérifie que c'est bien une forme hermitienne définie positive :
Soit $x, y, z \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ non nuls, soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Semi-linéarité par rapport à la première variable :

$$\langle \lambda x+y, z\rangle = \sum_{i,j} \overline{(\lambda x_{ij} + y_{ij})} z_{ij} = \overline{\lambda} \sum_{i,j} \overline{x_{ij}} z_{ij} + \sum_{i,j} \overline{y_{ij}} z_{ij} = \overline{\lambda}\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

- Linéarité par rapport à la deuxième variable :

$$\langle x, \lambda y+z\rangle = \sum_{i,j} \overline{x_{ij}}(\lambda y_{ij} + z_{ij}) = \lambda \sum_{i,j} \overline{x_{ij}} y_{ij} + \sum_{i,j} \overline{x_{ij}} z_{ij} = \lambda\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

- Symétrie :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i,j} \overline{x_{ij}} y_{ij} = \sum_{i,j} \overline{\overline{y_{ij}} x_{ij}} = \overline{\sum_{i,j} \overline{y_{ij}} x_{ij}} = \overline{\langle y, x\rangle}$$

- Définie positivité :

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i,j} \overline{x_{ij}} x_{ij} = \sum_{i,j} |x_{i,j}|^2 > 0$$

  Car c'est une somme de termes strictement positifs.

On a donc bien défini un produit scalaire hermitien.

Proposition 3 *Soit $x, y, x', y' \in \mathbb{C}^n$. Alors :*

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y'\rangle = \langle x, x'\rangle\langle y, y'\rangle \tag{1}$$

Démonstration — Soit $x, y, x', y' \in \mathbb{C}^n$. D'après la définition (4) :

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y'\rangle = \sum_{i,j} \overline{x_i y_j} x'_i y'_j$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\langle x, x'\rangle\langle y, y'\rangle &= \sum_i \overline{x_i} x'_i \sum_j \overline{y_j} y'_j \\ &= \sum_{i,j} \overline{x_i y_j} x'_i y'_j \\ &= \langle x \otimes y, x' \otimes y'\rangle\end{aligned}$$

■

2.3 Axiomes de la mécanique quantique

Les systèmes quantiques sont régis par des axiomes, certains étant nécessaires pour comprendre le jeu CHSH.

Un système isolé est représenté par un espace hermitien $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pour représenter plusieurs systèmes interagissant, on utilise le produit tensoriel entre les espaces de chaque système.
L'état d'un système est représenté par un vecteur $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^n$ non nul.
On appelle mesure le choix d'une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$, dont le résultat est aléatoire.
Règle de Born : Lors d'une mesure dans une base $(a_1, ..., a_n)$, la probabilité d'obtenir le résultat $i \in \{1, ..., n\}$ est $\langle \psi | P_i | \psi \rangle$, où P_i est la projection orthogonale sur $Vect(a_i)$.
Notons qu'avec la notation de Dirac, on remarque que la norme au carré d'un vecteur $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ s'écrit : $\langle \psi | \psi \rangle$ (on peut facilement s'en convaincre en utilisant l'expression matricielle de $|\psi\rangle$ et de son dual $\langle \psi |$), et la projection orthogonale sur $Vect(|\psi\rangle)$ se note $\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$
Alors, sachant que a_i est de norme 1, la probabilité d'obtenir le résultat i lors de la mesure devient :

$$\langle \psi | P_i | \psi \rangle = \langle \psi || a_i \rangle \langle a_i || \psi \rangle = \langle \psi | a_i \rangle \langle a_i | \psi \rangle = |\langle \psi | a_i \rangle|^2$$

Dans $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, une mesure dans les bases $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ donne le résultat $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ avec la probabilité :

$$\langle \psi | \big(|a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_j\rangle\langle b_j| \big) |\psi\rangle = |\langle \psi | a_i \otimes b_j \rangle|^2 \tag{2}$$

3 Jeu CHSH

3.1 Jeu CHSH classique

Le jeu est le suivant : Il y a trois protagonistes : un arbitre et deux joueurs, Alice et Bob. L'arbitre pose une question x (resp. y), déterminée aléatoirement, à Alice (resp. Bob) de telle sorte que $(x, y) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Ensuite, Alice (resp. Bob) renvoie une réponse a (resp. b) tel que $(a, b) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$. a (resp. b) dépend uniquement de x (resp. y) et d'une éventuelle stratégie décidée au préalable. Il est impossible pour Alice et Bob de communiquer une fois les questions posées (on peut imaginer qu'ils disposent d'un temps t pour répondre, et qu'ils sont séparés d'une distance $c \times t$, rendant toute communication impossible avant d'avoir répondu). Le jeu est gagné si on a l'égalité :

$$(x + y)[2] = ab \tag{3}$$

Autrement dit :

$$x \oplus y = ab$$

On considère que les quatres couples de questions sont équiprobables.

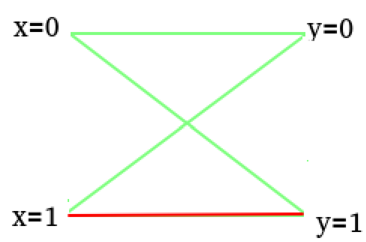

Figure 1: Schéma représentant les règles du jeu CHSH. Chaque segment représente un couple de question. Les segments verts ont $a = b$ comme condition de victoire, le segment rouge a $a \neq b$ comme condition de victoire

Théorème 1 *La probabilité de victoire au jeu CHSH dans le cas classique ne peut pas excéder* $\frac{3}{4}$

Démonstration — On considère deux situations : soit Alice et Bob choisissent d'utiliser une stratégie déterministe, soit ils utilisent une stratégie impliquant l'aléatoire.
Pour le premier cas, on peut remarquer :

$$(a, b) \text{ est une combinaison gagnante pour } (x, y) = (0, 0), (1, 0) \text{ ou } (0, 1) \implies (a, b) \text{ est une combinaison perdante pour } (x, y) = (1, 1)$$

Inversement, si (a, b) est une combinaison de réponses gagnante pour $(x, y) = (1, 1)$, elle est perdante pour les trois autres cas.
Les quatre couples de questions étant équiprobables, on en déduit que la meilleure stratégie donnera $\mathbb{P}(V) = \frac{3}{4}$

Utiliser une stratégie aléatoire revient à choisir aléatoirement une stratégie déterministe. Il existe 16 combinaisons (x, y, a, b) possibles, qu'on note S_i, $i \in \{1, ..., 16\}$. On note p_i la probabilité d'obtenir la combinaison S_i, et $\mathbb{P}(V)$ la probabilité de gagner le jeu. On a alors :

$$\mathbb{P}(V) = \sum_{i=1}^{16} p_i \mathbb{P}(V|S_i)$$

Avec :

$$\sum_{i=1}^{16} p_i = 1$$

On a vu que pour tout $i \in \{1, ..., 16\}$, $\mathbb{P}(V|S_i) \leq \frac{3}{4}$, d'où :

$$\mathbb{P}(V) \leq \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{16} p_i$$

Alors :

$$\mathbb{P}(V) \leq \frac{3}{4}$$

Ainsi, dans le cas classique, la probabilité de victoire au jeu CHSH ne peut pas excéder $\frac{3}{4}$. ■

3.2 Jeu CHSH quantique

On peut montrer qu'en mécanique quantique, en prenant avantage de l'intrication, la probabilité de victoire au jeu CHSH peut dépasser $\frac{3}{4}$.
On considère maintenant que Alice et Bob partagent un état d'intrication maximale, appelé état de Bell, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ où $|00\rangle = e_0 \otimes e_0$ et $|11\rangle = e_1 \otimes e_1$, avec (e_0, e_1) la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
Les règles du jeu changent légèrement. Désormais, chaque question correspond à une base orthonormée dans laquelle Alice (resp. Bob) mesure l'état de Bell, le résultat de la mesure étant la réponse à la question.
Ainsi, si l'arbitre pose le couple de questions $(x, y) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, Alice mesurera dans la base (a_0^x, a_1^x) et Bob mesurera dans la base (b_0^y, b_1^y). La probabilité d'obtenir le couple de réponses $(i, j) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ après les questions (x, y) est $|\langle a_i^x \otimes b_j^y|\psi\rangle|^2$.
On considère toujours les quatre couples de questions équiprobables.

3.2.1 Stratégie

On commence par trouver une stratégie (c'est-à-dire deux bases pour Alice, deux pour Bob) permettant de dépasser la probabilité de victoire de $\frac{3}{4}$ imposée par le cas classique.

Proposition 4 *Soient (a_0, a_1) et (b_0, b_1) deux bases orthonormées de $\mathbb{C}^2$. Pour tout $i, j \in \{0, 1\}$:*

$$|\langle a_i \otimes b_j|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\langle a_i|b_j\rangle|^2 \tag{4}$$

DÉMONSTRATION —

Soient $i, j \in \{0, 1\}$. On note $a_{i,0}$ (resp. $b_{j,0}$) et $a_{i,1}$ (resp. $b_{j,1}$) les coordonnées de a_i (resp. b_j) dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
Alors, par les propriétés du produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^2$ et la propriété (3), on a :

$$\begin{aligned}
|\langle a_i \otimes b_j|\psi\rangle|^2 &= |\langle \psi|a_i \otimes b_j\rangle|^2 \\
&= |\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)|a_i \otimes b_j\rangle|^2 \\
&= |\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)|a_i \otimes b_j\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}|\langle e_0 \otimes e_0|a_i \otimes b_j\rangle + \langle e_1 \otimes e_1|a_i \otimes b_j\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}|\langle e_0|a_i\rangle\langle e_0|b_j\rangle + \langle e_1|a_i\rangle\langle e_1|b_i\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}|a_{i,0}b_{j,0} + a_{i,1}b_{j,1}|^2 \\
&= \frac{1}{2}|\langle \overline{a_i}|b_j\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}|\langle a_i|b_j\rangle|^2
\end{aligned}$$

■

On obtient donc une nouvelle formule pour la probabilité d'obtenir un couple de réponses (après le choix des questions).

On pose :

- $a_0^0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
- $a_1^0 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
- $b_0^0 = (\cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8})$
- $b_1^0 = (\cos\frac{5\pi}{8}, \sin\frac{5\pi}{8})$
- $a_0^1 = (1, 0)$
- $a_1^1 = (0, 1)$
- $b_0^1 = (\cos\frac{3\pi}{8}, \sin\frac{3\pi}{8})$
- $b_1^1 = (\cos\frac{7\pi}{8}, \sin\frac{7\pi}{8})$

Ainsi que :

- $\mathcal{A}_0 = (a_0^0, a_1^0)$
- $\mathcal{B}_0 = (b_0^0, b_1^0)$
- $\mathcal{A}_1 = (a_0^1, a_1^1)$
- $\mathcal{B}_1 = (b_0^1, b_1^1)$

Qui sont alors quatre bases orthonormées de $\mathbb{C}^2$. Si l'arbitre pose la question $x = 0$ à Alice, celle-ci mesurera dans la base $\mathcal{A}_0$, si il pose la question $y = 0$ à Bob, il mesurera dans la base $\mathcal{B}_0$, de même pour les cas $x = 1$ et $y = 1$.
Comme motivation pour le choix de ces quatre bases, on peut imaginer ces 8 vecteurs comme des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, espacés d'un angle de $\frac{\pi}{8}$.

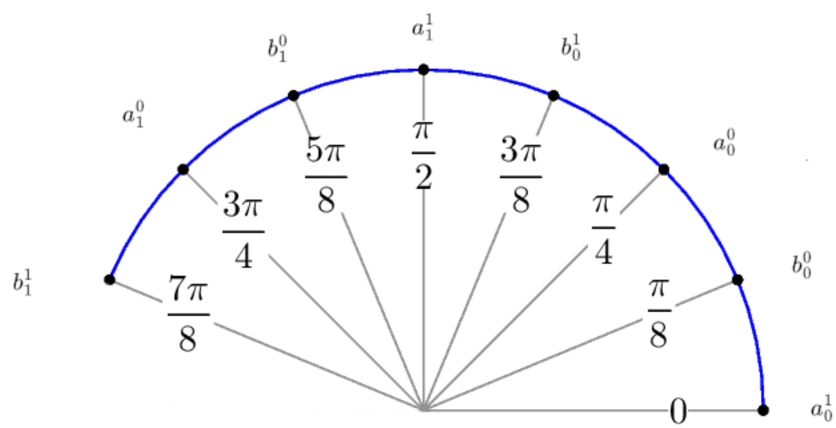

Figure 2: Représentation dans $\mathbb{R}^2$ des 8 vecteurs utilisés dans cette stratégie

Théorème 2 *La probabilité de gagner au jeu CHSH dans le cas quantique peut dépasser* $\frac{3}{4}$.

Démonstration — On utilise la stratégie définie plus tôt. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4}\Big(&\mathbb{P}\big((a,b) = (0,0)|(x,y) = (0,0)\big) + \mathbb{P}\big((a,b) = (1,1)|(x,y) = (0,0)\big)\Big) \\
+\frac{1}{4}\Big(&\mathbb{P}\big((a,b) = (0,0)|(x,y) = (1,0)\big) + \mathbb{P}\big((a,b) = (1,1)|(x,y) = (1,0)\big)\Big) \\
+\frac{1}{4}\Big(&\mathbb{P}\big((a,b) = (0,0)|(x,y) = (0,1)\big) + \mathbb{P}\big((a,b) = (1,1)|(x,y) = (0,1)\big)\Big) \\
+\frac{1}{4}\Big(&\mathbb{P}\big((a,b) = (1,0)|(x,y) = (1,1)\big) + \mathbb{P}\big((a,b) = (0,1)|(x,y) = (1,1)\big)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}|\langle a_0^0|b_0^0\rangle|^2 + \tfrac{1}{2}|\langle a_1^0|b_1^0\rangle|^2\right)\\
&+\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}|\langle a_0^1|b_0^0\rangle|^2 + \tfrac{1}{2}|\langle a_1^1|b_1^0\rangle|^2\right)\\
&+\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}|\langle a_0^0|b_0^1\rangle|^2 + \tfrac{1}{2}|\langle a_1^0|b_1^1\rangle|^2\right)\\
&+\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}|\langle a_1^1|b_0^1\rangle|^2 + \tfrac{1}{2}|\langle a_0^1|b_1^1\rangle|^2\right)\\
&= \tfrac{1}{8}\big(7\cos^2\tfrac{\pi}{8} + \cos^2\tfrac{7\pi}{8}\big)\\
&= \tfrac{1}{8}\big(8\cos^2\tfrac{\pi}{8}\big)\\
&= \cos^2\tfrac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Or, on a, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

- (i) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- (ii) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Alors, par (i) :

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{8}) &= \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8})\\
&= \cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{8})\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{\pi}{8}))
\end{aligned}$$

En élevant cette expression au carré, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos^2(\tfrac{\pi}{8}) &= \tfrac{1}{2}(\cos^2(\tfrac{\pi}{8}) + \sin^2(\tfrac{\pi}{8}) + 2\cos(\tfrac{\pi}{8})\sin(\tfrac{\pi}{8}))\\
&= \tfrac{1}{2} + \cos(\tfrac{\pi}{8})\sin(\tfrac{\pi}{8})
\end{aligned}$$

Or, par (ii) :

$$\sin(\tfrac{\pi}{8})\cos(\tfrac{\pi}{8}) = \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{4})$$

D'où :

$$\cos^2(\tfrac{\pi}{8}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{4}$$

Finalement :

$$\cos^2(\tfrac{\pi}{8}) \approx 0.85$$

■

On a donc une chance de réussite d'environ 85%, ce qui est supérieur aux 75% du cas classique. L'intrication quantique permet donc bien des propriétés impossibles sans mécanique quantique.

On peut désormais se pencher sur l'optimisation de ce nombre, et chercher la probabilité maximum de victoire au jeu CHSH. On s'intéresse pour cela aux travaux de Tsirelson, publiés en 1980.

3.2.2 Borne de Tsirelson

Lemme 1 *Soit A_0, B_0, A_1, B_1 quatre endomorphismes hermitiens de $\mathbb{C}^2$ qui commutent deux à deux, supérieurs à $-id$ et inférieurs à id, avec id l'application identité de $\mathbb{C}^2$. Alors on a :*

$$A_0B_0 + A_1B_0 + A_0B_1 - A_1B_1 \leq 2\sqrt{2}id \tag{5}$$

Démonstration — Soit A_0, B_0, A_1, B_1 quatre endomorphismes hermitiens de $\mathbb{C}^2$ supérieurs à $-id$ et inférieurs à id. Alors :

$$\begin{aligned} &A_0B_0 + A_1B_0 + A_0B_1 - A_1B_1 \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A_0^2 + A_1^2 + B_0^2 + B_1^2) \\ &- \tfrac{\sqrt{2}-1}{8}\big((\sqrt{2}+1)(A_0 - B_0) + A_1 - B_1\big)^2 \\ &- \tfrac{\sqrt{2}-1}{8}\big((\sqrt{2}+1)(A_0 - B_1) - A_1 - B_0\big)^2 \\ &- \tfrac{\sqrt{2}-1}{8}\big((\sqrt{2}+1)(A_1 - B_0) + A_0 + B_1\big)^2 \\ &- \tfrac{\sqrt{2}-1}{8}\big((\sqrt{2}+1)(A_1 + B_1) - A_0 - B_0\big)^2 \end{aligned}$$

On remarque que les termes au carré sont des applications hermitiennes (ce sont des combinaisons linéaires d'applications hermitiennes). On obtient donc une expression de la forme :

$$\begin{aligned} &A_0B_0 + A_1B_0 + A_0B_1 - A_1B_1 \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A_0^2 + A_1^2 + B_0^2 + B_1^2) - X \end{aligned}$$

Où X est un endomorphisme autoadjoint positif (une somme d'endomorphismes hermitiens positifs est un endomorphisme hermitien positif).
$A_0B_0 + A_1B_0 + A_0B_1 - A_1B_1$ est un endomorphisme hermitien étant donné que A_0, B_0, A_1, B_1 commutent deux à deux.
On en déduit :

$$A_0B_0 + A_1B_0 + A_0B_1 - A_1B_1 \leq \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A_0^2 + A_1^2 + B_0^2 + B_1^2)$$

Or, pour tout $i, j \in \{0, 1\}$, $-id \leq A_i \leq id$ et $-id \leq B_j \leq id$, d'où pour tout $i, j \in \{0, 1\}$: $A_i^2 \leq id$ et $B_j^2 \leq id$.
Enfin, on a :

$$\begin{aligned} A_0B_0 + A_1B_0 + A_0B_1 - A_1B_1 &\leq \frac{4}{\sqrt{2}}Id \\ &= 2\sqrt{2}id \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lemme 2 *Soit A et B deux endomorphismes autoadjoints de $\mathbb{C}^2$. Alors :*

$$A \otimes B = \big(A \otimes id\big)\big(id \otimes B\big)$$

Démonstration — Soit A et B deux endomorphismes autoadjoints de $\mathbb{C}^2$.
On montre une égalité matricielle et on se place dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$
Soit $(i,j) \in \{0,1\}^2$. On note $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ et $\mathcal{B} = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ les matrices respectives de A et B dans cette base.
Alors :

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathcal{B} & a_{12}\mathcal{B} \\ a_{21}\mathcal{B} & a_{22}\mathcal{B} \end{pmatrix}$$

Et :

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{A} \otimes Id\big)\big(Id \otimes \mathcal{B}\big) &= \begin{pmatrix} a_{11}Id & a_{12}Id \\ a_{21}Id & a_{22}Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\mathcal{B} & a_{12}\mathcal{B} \\ a_{21}\mathcal{B} & a_{22}\mathcal{B} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \big(\mathcal{A} \otimes Id\big)\big(Id \otimes \mathcal{B}\big)$$

Ce qui équivaut à :

$$A \otimes B = \big(A \otimes id\big)\big(id \otimes B\big)$$

■

Théorème 3 *La probabilité de victoire au jeu CHSH dans le cas quantique ne peut pas excéder $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$*

Démonstration — Pour relier le lemme (1) à la probabilité de victoire, on travaille dans l'intervalle $[-1,1]$, pour cela on pose : $q = 2\mathbb{P}(V) - 1$.

On pose $a_0^0, a_0^1, a_1^0, a_1^1, b_0^0, b_0^1, b_1^0, b_1^1 \in \mathbb{C}^2$ huit vecteurs unitaires tels que pour tout $i \in \{0,1\}$, (a_0^i, a_1^i) et (b_0^i, b_1^i) soient des bases orthonormées de $\mathbb{C}^2$.
On pose également f, la fonction qui à (x,y,a,b) renvoie 1 si la combinaison est gagnante, -1 si elle est perdante.
Alors :

$$q = \frac{1}{4} \sum_{(x,y) \in \{0,1\}^2} \sum_{(a,b) \in \{0,1\}^2} f(x,y,a,b)\mathbb{P}\big((a,b)|(x,y)\big) \tag{6}$$

On compte négativement la probabilité d'obtenir une combinaison (x,y,a,b) perdante et positivement celle d'obtenir une combinaison gagnante.

Notons, pour tout $i \in \{0,1\}$, $A_i = |a_0^i\rangle\langle a_0^i|$ la projection orthogonale sur $Vect(a_0^i)$. De même, on note $B_i = |b_0^i\rangle\langle b_0^i|$.
On pose pour tout $i \in \{0,1\}$: $\alpha_i = |a_0^i\rangle\langle a_0^i| - |a_1^i\rangle\langle a_1^i|$ et $\beta_i = |b_0^i\rangle\langle b_0^i| - |b_1^i\rangle\langle b_1^i|$

Alors, pour tout $i \in \{0,1\}$:

$$\alpha_i = 2A_i - id$$
$$\beta_i = 2B_i - id$$

On peut déjà remarquer, étant donné que A_i et B_i sont des projecteurs orthogonaux et d'après la proposition (1) :

$$-id \leq \alpha_i, \beta_i \leq id$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
&\forall (i,j) \in \{0,1\}^2, \\
&\langle \psi | \alpha_i \otimes \beta_j | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | (|a_0^i\rangle\langle a_0^i|) \otimes (|b_0^j\rangle\langle b_0^j|) | \psi \rangle \\
&+ \langle \psi | (|a_1^i\rangle\langle a_1^i|) \otimes (|b_1^j\rangle\langle b_1^j|) | \psi \rangle \\
&- \langle \psi | (|a_1^i\rangle\langle a_1^i|) \otimes (|b_0^j\rangle\langle b_0^j|) | \psi \rangle \\
&- \langle \psi | (|a_0^i\rangle\langle a_0^i|) \otimes (|b_1^j\rangle\langle b_1^j|) | \psi \rangle \\
&= \frac{1}{2}|\langle a_0^i | b_0^i \rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle a_1^i | b_1^i \rangle|^2 - \frac{1}{2}|\langle a_1^i | b_0^i \rangle|^2 - \frac{1}{2}|\langle a_0^i | b_1^i \rangle|^2
\end{aligned}$$

D'après les équations (2) et (4).

On remarque dans cette expression que pour les cas $(i,j) \neq (1,1)$, on compte positivement les différentes probabilités d'obtenir un résultat gagnant au jeu, et négativement celles permettant d'obtenir un résultat perdant. C'est l'inverse pour le cas $(i,j) = (1,1)$.
On peut alors en déduire :

$$\begin{aligned}
&\langle \psi | \alpha_0 \otimes \beta_0 | \psi \rangle + \langle \psi | \alpha_1 \otimes \beta_0 | \psi \rangle + \langle \psi | \alpha_0 \otimes \beta_1 | \psi \rangle - \langle \psi | \alpha_1 \otimes \beta_1 | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \big(\alpha_0 \otimes \beta_0 + \alpha_1 \otimes \beta_0 + \alpha_0 \otimes \beta_1 - \alpha_1 \otimes \beta_1 \big) | \psi \rangle \\
&= \textstyle\sum_{(x,y) \in \{0,1\}^2} \sum_{(a,b) \in \{0,1\}^2} f(x,y,a,b) \mathbb{P}\big((a,b)|(x,y)\big)
\end{aligned}$$

D'où :

$$q = \tfrac{1}{4} \langle \psi | \big(\alpha_0 \otimes \beta_0 + \alpha_1 \otimes \beta_0 + \alpha_0 \otimes \beta_1 - \alpha_1 \otimes \beta_1 \big) | \psi \rangle$$

D'après le lemme (2), on a pour tout $(i,j) \in \{0,1\}^2$:

$$\alpha_i \otimes \beta_j = \big(\alpha_i \otimes id\big)\big(id \otimes \beta_j\big)$$

On peut ensuite remarquer que $\alpha_i \otimes id$ et $id \otimes \beta_j$ sont eux-mêmes des endomorphismes autoadjoints compris entre $-id$ et id d'après la définition de α_i et β_i, et on peut facilement vérifier qu'ils commutent. On peut donc utiliser le résultat du lemme 1.
On a donc :

$$q = \tfrac{1}{4} \langle \psi | \big(\alpha_0 \otimes \beta_0 + \alpha_1 \otimes \beta_0 + \alpha_0 \otimes \beta_1 - \alpha_1 \otimes \beta_1 \big) | \psi \rangle$$

$$= \frac{1}{4}\langle\psi|\big(\big(\alpha_0 \otimes id\big)\big(id \otimes \beta_0\big) + \big(\alpha_1 \otimes id\big)\big(id \otimes \beta_0\big) + \big(\alpha_0 \otimes id\big)\big(id \otimes \beta_1\big)$$
$$-\big(\alpha_1 \otimes id\big)\big(id \otimes \beta_1\big)\big)|\psi\rangle$$
$$\leq \frac{1}{4}\langle\psi|2\sqrt{2}id|\psi\rangle$$
$$= \frac{1}{4}2\sqrt{2}\langle\psi|\psi\rangle$$
$$= \frac{1}{4}2\sqrt{2}$$

Car $|\psi\rangle$ est de norme 1.

Finalement, on a :

$$q \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Enfin, $\mathbb{P}(V) = \frac{q+1}{2}$, d'où :

$$\mathbb{P}(V) \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

■

Le théorème (3) nous donne une borne supérieure pour la probabilité de victoire au jeu CHSH quantique. On a vu par le théorème (2) que cette borne pouvait être atteinte avec une certaine stratégie. On obtient donc que $\cos^2(\frac{\pi}{8})$ est la probabilité maximale de réussite au jeu CHSH. On a ainsi montré que la stratégie utilisée plus tôt donnait la probabilité de victoire maximale.

4 Conclusion

Bien que le jeu CHSH ne soit qu'une expérience de pensée, il n'en reste pas moins une métaphore pour expliquer l'inégalité CHSH, et on peut relier les résultats montrés ici à des situations physiques (par exemple, la polarisation de deux photons intriqués). La violation expérimentale de l'inégalité CHSH permet de prouver fausses les théories déterministes locales, et joue donc un rôle important dans l'interprétation physique des résultats de la mécanique quantique. Cette preuve expérimentale a été réalisée après la formulation mathématique de l'inégalité CHSH (et des autres inégalités de Bell), par Alain Aspect, ce qui lui vaudra le prix Nobel de physique en 2022.

References

[1] Multiples contributeurs. *CHSH Inequality*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/CHSH_inequality.

[2] Multiples contributeurs. *Mathematical formulation of quantum mechanics.* URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_formulation_of_quantum_mechanics.

[3] Glenn Sun. *Intro to quantum computing*. 2021.

[4] *Tsirelson's Bound*. URL: https://mycqstate.wordpress.com/2012/10/10/tsirelsons-bound/.

[5] John Watrous. *Theory of Quantum Information*. 2013.