INTRODUCTION À LA PARTITION D'AMPHITHÉÂTRE

JIN MAN

Licence 2
Université Claude Bernard Lyon 1
Mathématiques
Programme : Travaux d'Initiative Personnelle Encadrés
Sous la direction de : Jiang Zeng

Table des matières

Résumé. La théorie des partitions d'un entier positif n possède une longue histoire. Euler l'a étudiée et y a démontré de magnifiques théorèmes dans son ouvrage Introductio in analysin infinitorum, publié en 1748. Cette théorie trouve de nombreuses applications, par exemple dans la classification de la jordanisation d'une matrice $n * n$, qui repose essentiellement sur la partition de n. En 1997, M. Bousquet-Mélou et K. Eriksson ont démontré un théorème concernant un type particulier de partitions : les partitions d'amphithéâtre (lecture hall partitions). Le but de ce TIPE est comprendre deux démonstrations de ce théorème ainsi qu'une généralisation de ces partitions d'amphithéâtre.

Mots-clés : Bijection, partitions d'entier, partition d'amphithéâtre,

fonction génératrice, points du réseau.

Date: 13 juin 2025.

1. Introduction

Définition 1.1. Une partition d'un entier positif n est une suite monotone des entiers positives λ_1,λ_2,...,$\lambda_{l(\lambda)}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{l(\lambda)} \lambda_i = n$$

et on appelle $l(\lambda)$ la longueur de la partition.

Exemple 1.2. Si on note $p(n)$ le nombre de partitions de n, c'est-à-dire le nombre de façons par lesquelles n peut s'écrire comme la somme des entiers ≥ 1, par exemple $p(1) = 1$, $p(2) = 2$ car $2 = 2$ ou $2 = 1 + 1$, $p(3) = 3$ car $3 = 3 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$.

Théorème 1.3.

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

Avant la démonstration,nous calculons $p(3)$ en utilisant ce produit infini,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\cdots = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k}\right)\cdots$$
$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + \cdots)\cdots,$$

donc, comment obtenir x^3 ? Soit choisir x^3 de la première parenthèse(1+1+1), soit choisir x de la première parenthèse et x^2 de la seconde parenthèse(1+2), soit x^3 de la troisième parenthèse(3), ce qui convient notre résultat ci-dessus.

Démonstration. D'abord, nous avons

$$\frac{1}{1-x^k} = \sum_{m=0}^{\infty} x^{km},$$

donc

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{\infty}(\sum_{m=0}^{\infty} x^{km}),$$

donc $n = k_1m_1 + \cdots + k_lm_l$. □

Et puis,si on note par $p(i, n)$ le nombre de partitions de n de parts impaires, et note par $p(d, n)$ le nombre de partitions de n de parts distinctes. Euler a montré que $p(i, n) = p(d, n)$ [9]. En effet, similairement nous pouvons montrer

$$\sum_{n\geq 0} p(i, n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}},$$

$$\sum_{n\geq 0} p(d, n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^k),$$

donc il suffit de montrer

Lemme 1.4.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}} = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^k).$$

Démonstration.
$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}.$$
□

Une étape avancée

Si on note par $p_o(d,n)$ le nombre de partitions de n de longueur impaire des parts distinctes, et note par $p_e(d,n)$ le nombre de partitions de n de longueur paire des parts distinctes. Par exemple, $4=1+3=4$ donc $p_e(d,n)=p_o(d,n)=1$,

$7=7=1+2+4$, donc $p_o(d,n)=2$,

$7=1+6=2+5=3+4$, donc $p_e(d,n)=3$, $p_e(d,n)-p_o(d,n)=1$,

$12=12=1+2+9=1+3+8=1+4+7=1+5+6=2+3+7=2+4+6=3+4+5$, donc $p_o(d,n)=8$,

$12=1+11=2+10=3+9=4+8=5+7=1+2+3+6=1+2+4+5$, donc $p_e(d,n)=7$, $p_e(d,n)-p_o(d,n)=-1$.

Euler a prouvé un théorème

Théorème 1.5. *(Euler)*[9] *$p_e(d,n)=p_o(d,n)$ sauf que n est de la forme $\frac{k(3k+1)}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$*

Ce théorème est le résultat des deux lemmes suivants.

Lemme 1.6.
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{n=1}^{\infty}(p_e(d,n)-p_o(d,n))x^n.$$

Lemme 1.7.
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n+1)}{2}}=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(x^{\frac{n(3n+1)}{2}}+x^{\frac{n(3n-1)}{2}}\right).$$

Les démonstrations sont dans l'appendice.6.16

Nous pouvons voir le signe de $x^{\frac{n(3n+1)}{2}}$, i.e., la valeur de $(p_e(d,n)-p_o(d,n))$ d'après lemme 1.7,
$$1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(x^{\frac{n(3n+1)}{2}}+x^{\frac{n(3n-1)}{2}}\right)=1-x-x^2+x^5+x^7-\cdots$$

Si on combine théoreme1.3 et lemme 1.7,
$$\left(\sum_{n\geq 0}p(n)x^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n x^{n(3n-1)/2}\right)=1, \tag{1}$$

Nous obtenons par comparer les coéfficients des x^n
$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-\cdots=0,$$
où la somme arrête quand $n-k<0$. Avec $p(0)=1, p(1)=1$, nous pouvons obtenir les $p(n)$ par récurrence.

Exemple 1.8. $p(2) = p(1) + p(0) = 2$, $p(7) = p(6) + p(5) - p(2) - p(0) = 15$.

Maintenant, changeons un peu la notation, soient D l'ensemble des partitions avec les parts distinctes, O l'ensemble des partitions avec les parts impaires.

$$\sum_{\mu \in D} q^{|\mu|} = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}} = \sum_{\mu \in O} q^{|\mu|}$$

où le poid $|\mu|$ de la partition $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$ est $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m$. la question , c'est un produit infini, mais alors si j'écris un produit fini, i.e., $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-x^{2k+1}}$, puis-je le donner un sens ?

Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des partitions

$$\mathcal{L}_n = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) : 0 \leq \frac{\lambda_1}{1} \leq \frac{\lambda_2}{2} \leq \cdots \frac{\lambda_n}{n} \right\}.$$

On appelle les éléments de $\mathcal{L}_n$ partitions d'amphithéâtre(lecture hall partition) de longueur n,

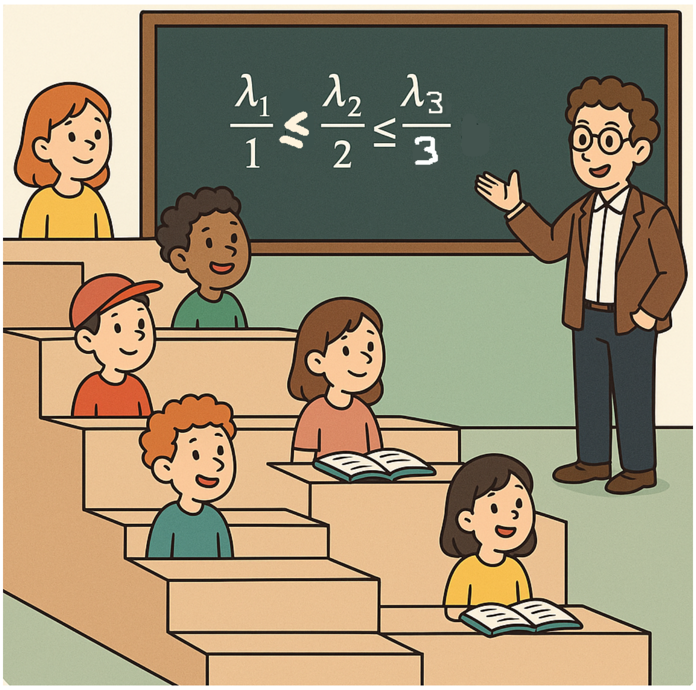
si on enlève les λ_i nuls, on obtiendra

$$D_n = \left\{ (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m) \in D : \frac{\mu_1}{n-m+1} \leq \frac{\mu_2}{n-m+2} \leq \cdots \leq \frac{\mu_m}{n} \right\}.$$

Ce qui est montré par Mireille Bousquet-Mélou et Kimmo Eriksson[3] et ce que je voudrais comprendre est le théorème suivant

Théorème 1

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}_n} q^{|\lambda|} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-x^{2k+1}}$$



2. Première démonstration

En fait, Mireille Bousquet-Mélou et Kimmo Eriksson ont prouvé un théorème meilleur, pour le comprendre, nous avons besoin des termes.

Définition 2.1. Pour une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, on définit le poid pair $|\lambda_e|$ et le poid impair $|\lambda_o|$ comme

$$|\lambda_e| = \sum_{0 \le k \le \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \lambda_{n-2k},$$

$$|\lambda_o| = \sum_{0 \le k \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \lambda_{n-2k-1}.$$

Exemple 2.2. Pour $n = 8$, $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 = 3$, $|\lambda_e| = \lambda_8 + \lambda_6 + \lambda_4 + \lambda_2$, $|\lambda_o| = \lambda_7 + \lambda_5 + \lambda_3 + \lambda_1$.

Pour $n = 7$, $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 = 2$, $|\lambda_e| = \lambda_7 + \lambda_5 + \lambda_3 + \lambda_1$, $|\lambda_o| = \lambda_6 + \lambda_4 + \lambda_2$.

Avec ces définitions, nous allons prouver

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}_n} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o} = \prod_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{1 - x^{i+1} y^i}.$$

Si on pose $x = y$, on obtient le théorème 1.

Exemple 2.3. Pour $n = 3$,

$$|\lambda|_e = \sum_{0 \le k \le 1} \lambda_{3-2k} = \lambda_3 + \lambda_1, \quad |\lambda|_o = \sum_{0 \le k \le 0} \lambda_{3-2k-1} = \lambda_2,$$

$$\sum_{\lambda \in L_3} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o} = \prod_{i=0}^{i=2} \frac{1}{1 - x^{i+1} y^i},$$

ou

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}_3} x^{\lambda_3 + \lambda_1} y^{\lambda_2} = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2 y} \frac{1}{1-x^3 y^2}.$$

D'abord, nous avons besoin d'une réduction de la partition. Fixons $n \ge 1$, soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, on définit la D-séquence associée $D(\lambda) = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ par $d_1 = \lambda_1$

$$d_i = \lambda_i - \left\lceil \frac{i\lambda_i}{i-1} \right\rceil, \quad 2 \le i \le n$$

Nous pouvons voir que λ est une partition d'amphithéâtre si et seulement si $d_i \ge 0$ pour tout i.

Pour $1 \le i \le n$, soit $\lambda^{(i)} = (0, 0, ..., 0, i, i+1, ..., n)$, alors $D(\lambda^{(i)}) = (0, ..., 0, i, 0, ..., 0)$. Si $\lambda \in \mathcal{L}_n$ avec $D(\lambda) = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$, alors $\lambda + \lambda^{(i)} \in \mathcal{L}_n$, car pour $D(\lambda + \lambda^{(i)}) = (d_1', d_2', \cdots, d_n')$.

$$d_i' = \lambda_i + i - \left\lceil \frac{i\lambda_i}{i-1} \right\rceil = d_i + i, d_{i+1}' = \lambda_{i+1} + i + 1 - \left\lceil \frac{(i+1)(\lambda_i + i)}{i} \right\rceil = d_{i+1}.$$

Exemple 2.4. Pour $n = 3$, soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, alors

$$d_1 = \lambda_1, d_2 = \lambda_2 - \lceil 2\lambda_1 \rceil, d_3 = \lambda_3 - \left\lceil \frac{3}{2}\lambda_2 \right\rceil,$$

et

$$\lambda^{(1)} = (1,2,3), D\left(\lambda^{(1)}\right) = (1,0,0),$$

$$\lambda^{(2)} = (0,2,3), D\left(\lambda^{(2)}\right) = (0,2,0),$$

$$\lambda^{(3)} = (0,0,3), D\left(\lambda^{(3)}\right) = (0,0,3).$$

similairement, nous pouvons obtenir un lemme pour $\lambda - \lambda^{(i)}$.

Lemme 2.5. *Soient $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ avec $D(\lambda) = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$. Alors $\lambda - \lambda^{(i)} \in \mathcal{L}_n$ si et seulement si $d_i \geq i$.*

Définition 2.6. On dit qu'une partition d'amphithéâtre de longueur n est réduite si sa D-séquence $(d_1, d_2, ..., d_n)$vérifie $0 \leq d_i < i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Et on note une telle partition par R_n. En effet, il y a $n!$ telles partitions.

Exemple 2.7. La D-séquence (d_1, d_2, d_3) doit vérifier $0 \leq d_1 < 1, 0 \leq d_2 < 2, 0 \leq d_3 < 3$.

Nous pouvons écrire une partitionλ sous la forme $\lambda = \mu + \sum_{i=1}^n k_i \lambda^{(i)}$ où $\left\{\lambda^{(i)}\right\}_{i=1}^n$peut être considéré comme une base d'un espace vectoriel.

Proposition 2.8. *Soit λ une partition d'amphithéâtre avec D-séquence $(d_1, d_2, ..., d_n)$. Alors l'application $\lambda \mapsto (\mu, k_1, k_2, ..., k_n)$ où $k_i = \lfloor d_i/i \rfloor$*

$$\lambda = \mu + \sum_{i=1}^{n} k_i \lambda^{(i)}$$

est une bijection entre $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{R}_n \times \mathbb{N}^n$.

Avec ces notations ci-dessus, nous pouvons réécrire ce que nous voulons étudier

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}_n} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o} = \sum_{\mu \in \mathcal{R}_n} x^{|\mu|_e + \sum_{i=1}^n k_i |\lambda^{(i)}|_e} y^{|\mu|_o + \sum_{i=1}^n k_i |\lambda^{(i)}|_o}$$

$$= \left(\sum_{\mu \in \mathcal{R}_n} x^{|\mu|_e} y^{|\mu|_o}\right) \left(\sum_{(k_1,k_2,...,k_n) \in \mathbb{N}^n} x^{\sum_{i=1}^n k_i |\lambda^{(i)}|_e} y^{\sum_{i=1}^n k_i |\lambda^{(i)}|_o}\right)$$

$$= \left(\sum_{\mu \in \mathcal{R}_n} x^{|\mu|_e} y^{|\mu|_o}\right) \prod_{i=1}^{n} \sum_{(k_1,k_2,...,k_n) \in \mathbb{N}^n} (x^{|\lambda^{(i)}|_e} y^{|\lambda^{(i)}|_o})^{k_i}$$

$$= \left(\sum_{\mu \in \mathcal{R}_n} x^{|\mu|_e} y^{|\mu|_o}\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x^{|\lambda^{(i)}|_e} y^{|\lambda^{(i)}|_o}}.$$

Donc, nous avons maintenant

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}_n} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o} = \frac{P_n(x,y)}{\prod_{i=1}^n 1 - x^{|\lambda^{(i)}|_e} y^{|\lambda^{(i)}|_o}},$$

où

$$P_n(x,y) = \sum_{\lambda \in \mathcal{R}_n} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o}$$

Alors, pourquoi écrire l'équalité sous cette forme ? une des motivations est calculer les $|\lambda^{(i)}|_e, |\lambda^{(i)}|_o$.

Lemme 2.9. *Les poids pairs et impairs de la partition $\lambda(j)$, $1 \le j \le n$, sont pour $0 \le i \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$*

$$\left|\lambda^{(n-2i)}\right|_e = n + (n-2) + \cdots + (n-2i) = (i+1)(n-i),$$

$$\left|\lambda^{(n-2i)}\right|_o = (n-1) + (n-3) + \cdots + (n-2i+1) = i(n-i),$$

Et pour $0 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$

$$\left|\lambda^{(n-2i-1)}\right|_e = n + (n-2) + \cdots + (n-2i) = (i+1)(n-i),$$

$$\left|\lambda^{(n-2i-1)}\right|_e = (n-1) + (n-3) + \cdots + (n-2i-1) = (i+1)(n-i-1),$$

Donc,

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - x^{|\lambda^{(i)}|_e} y^{|\lambda^{(i)}|_o}\right)$$

$$= \prod_{0 \le i \le \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(1 - x^{|\lambda^{(n-2i)}|_e} y^{|\lambda^{(n-2i)}|_o}\right) \prod_{0 \le i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \left(1 - x^{|\lambda^{(n-2i-1)}|_e} y^{|\lambda^{(n-2i-1)}|_o}\right)$$

$$= \prod_{0 \le i \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \left(1 - (x^{i+1}y^i)^{n-i}\right) \prod_{0 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} \left(1 - (x^{n-i}y^{n-i-1})^{i+1}\right) \quad (*)$$

Pour compléter la déduction ci-dessus, il faut vérifier un lemme

Lemme 2.10. *Pour tout entier $n > 0$, on a*

$$\{1, 2, ..., n\} = \left\{n - 2i | 0 \le i \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\} \cup \left\{n - 2i - 1 | 0 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\}.$$

Démonstration. (i) Soit n pair, i.e., $n = 2m$, alors $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 = m - 1$, d'où

$$\{n - 2i | 0 \le i \le m - 1\} = \{n, n-2, n-4, ..., n - 2(m-1) = 2\}$$

et

$$\{n - 2i - 1 | 0 \le i \le m - 1\} = \{n-1, n-3, n-5, ..., n - 2(m-1) - 1 = 1\}$$

(ii)Soit n impair, i.e., $n = 2m + 1$, alors$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = m$, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 = m - 1$, d'où

$$\{n - 2i | 0 \le i \le m\} = \{n, n-2, n-4, ..., n - 2m = 1\}$$

et

$$\{n - 2i - 1 | 0 \le i \le m - 1\} = \{n-1, n-3, n-5, ..., n - 2(m-1) - 1 = 2\}$$

□

Avec un changement de variable $j = n - i - 1$ pour le seconde produit,

$$(*) = \prod_{0 \le i \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \left(1 - (x^{i+1}y^i)^{n-i}\right) \prod_{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le j \le n-1} \left(1 - (x^{j+1}y^j)^{n-j}\right)$$

Donc l'égalité peut s'écrire comme

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - x^{|\lambda^{(i)}|_e} y^{|\lambda^{(i)}|_o}\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - (x^{i+1}y^i)^{n-i}\right),$$

d'où notre but devient

$$P_n(x, y) = \sum_{\lambda \in R_n} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1 - (x^{i+1}y^i)^{n-i}}{1 - x^{i+1}y^i}.$$

On note $\{0, 1, 2, ..., n\}$ par $[0, n]$, nous pouvons prouver l'égalité ci-dessus par récursion si nous pouvons construire une bijection $\Upsilon : \mathcal{R}_n \times [0, n] \to \mathcal{R}_{n+1}$ telle que si $\eta = \Upsilon(\mu, i)$, alors,

$$|\eta|_o = |\mu|_e, \quad |\eta|_e = i + 2|\mu|_e - |\mu|_o$$

Avec cette relation, nous avons

$$P_{n+1}(x, y) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} P_n(x^2 y, x^{-1})$$

Maintenant, nous allons nous servir d'une involution dans l'ensemble des *lecture hall partitions* réduites. Soit μ une partition, la D-séquence $D(\mu) = (d_1, d_2, ..., d_n)$ avec $d_1 = \mu_1$, $d_i = \lambda_i - \left\lceil \frac{i\lambda_i}{i-1} \right\rceil$, $2 \le i \le n$

Pour $\mu \in \mathcal{R}_n$, on définit μ^* par

$$\mu^*_{n-2k} = \mu_{n-2k},$$
$$\mu^*_{n-2k-1} - \left\lceil \frac{n-2k-1}{n-2k-2} \mu^*_{n-2k-2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n-2k-1}{n-2k} \mu_{n-2k} \right\rfloor - \mu_{n-2k-1} (*)$$

Avec la convention $\mu_i = \mu^*_i = 0$ pour $i \le 0$.

Proposition 2.11. *La correspondence $\mu \mapsto \mu^*$ définit une involution de $\mathcal{R}_n$.*

Pour montrer cette proposition, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 2.12. *Soient l, m, i des entiers positifs, $i \ge 2$. Alors*

$$\left\lfloor \frac{i-1}{i} l \right\rfloor - m \in \{0, 1, 2, ..., i-2\} \iff l - \left\lceil \frac{i}{i-1} m \right\rceil \in \{0, 1, 2, ..., i-1\}.$$

La preuve de ce lemme est un peu longue, vous pouvez lire la preuve de la proposition directement si vous voulez..

Démonstration. (Preuve du lemme) Posons par division euclidienne

$$l = il' + a, 0 \le a \le i - 1,$$
$$m = (i - 1)m' + b, 0 \le b \le i - 2.$$

Cas 1 : $a = 0, b = 0$, i.e., $l = il', m = (i - 1)m'$

$$0 \le \left\lfloor \frac{i-1}{i} l \right\rfloor - m = (i - 1)l' - (i - 1)m' \le i - 2$$
$$\iff l' - m' = 0 \iff i(l' - m') = 0$$

ce qui implique que

$$l - \left\lceil \frac{i}{i-1} m \right\rceil = 0 \in \{0, 1, 2, ..., i - 1\}$$

Cas 2 : $a \ne 0, b = 0, i.e., l = il' + a, 1 \le a \le i - 1, m = (i - 1)m'$

$$\left\lfloor \frac{i-1}{i} l \right\rfloor - m = il' + a - l' - (i - 1)m' - 1$$

Donc l'inégalité

$$0 \le (i - 1)(l' - m') + a - 1 \le i - 2$$

est équivalente à

$$\frac{1-a}{i-1} \le l' - m' \le \frac{i-a-1}{i-1},$$

d'où

$$i\frac{1-a}{i-1} + a \le i(l' - m') + a \le i\frac{i-a-1}{i-1} + a,$$

or

$$i\frac{1-a}{i-1}+a=\frac{i-a}{i-1}\geq 0 \quad car \quad 1\leq a\leq i-1,$$

et

$$i\frac{i-a-1}{i-1}+a=i-\frac{a}{i-1},$$

ce qui entraîner que $i(l'-m')+a\leq i-1$ car

$$i(l'-m')+a\leq i\frac{i-a-1}{i-1}+a\leq i-\frac{a}{i-1}<i,$$

et $i(l'-m')+a$ est un entier. (nous utilisons ce raisonnement plusieurs fois dans cette démonstration)

Réciproquement, si

$$0\leq il'-im'+a\leq i-1 \iff \frac{-a}{i}\leq (l'-m')\leq \frac{i-a-1}{i},$$

alors

$$\frac{i-1}{i}(-a)+a-1\leq (i-1)(l'-m')+a-1\leq \frac{i-1}{i}(i-a-1)+a-1,$$

or

$$\frac{i-1}{i}(-a)+a-1=-1+\frac{a}{i}>-1,$$

donc $(i-1)(l'-m')+a-1\geq 0$ car

$$(i-1)(l'-m')+a-1\geq -1+\frac{a}{i}$$

et $(i-1)(l'-m')+a-1$ est un entier.

Cas 3 : $a=0, b\neq 0, i.e., l=il', m=(i-1)m'+b, 1\leq b\leq i-2$

Supposons que

$$0\leq \left\lfloor \frac{i-1}{i}l\right\rfloor -m=(i-1)(l'-m')-b\leq i-2,$$

alors

$$\frac{b}{i-1}\leq l'-m'\leq \frac{i+b-2}{i-1},$$

d'où

$$\frac{1}{i-1}\leq \frac{b}{i-1}\leq (l'-m')\leq \frac{i+b-2}{i-1}\leq \frac{2i-4}{i-1}<2,$$

donc $l'-m'=1$, ce qui implique que

$$1\leq i(l'-m')-b-1=l-\left\lceil \frac{i}{i-1}m\right\rceil \leq i-2.$$

Réciproquement, si

$$0\leq i(l'-m')-b-1\leq i-1,$$

alors

$$\frac{b+1}{i}\leq l'-m'\leq 1+\frac{b}{i},$$

ce qui implique aussi $l'-m'=1$, d'où

$$1\leq \left\lfloor \frac{i-1}{i}l\right\rfloor -m=i-1-b\leq i-2.$$

Cas 4 : $a \neq 0, b \neq 0$, i.e., $1 \leq a \leq i-1, 1 \leq b \leq i-2$ ou $2-i \leq b-a \leq i-3$

$$\left\lfloor \frac{i-1}{i} l \right\rfloor - m = il' + a - l' - 1 - (i-1)m' - b$$

Donc

$$0 \leq (i-1)(l'-m') + a - b - 1 \leq i-2$$

est équivalente à

$$\frac{b-a+1}{i-1} \leq l'-m' \leq \frac{i-2+b-a+1}{i-1} \leq \frac{2i-4}{i-1} < 2,$$

$$\frac{b-a+1}{i-1} \geq \frac{3-i}{i-1} > -1,$$

donc $0 \leq l'-m' < 2$.

(i)Si $l'-m'=0$, alors

$$\frac{-i}{i-1}(b-a+1) + a - b - 1 \leq l - \left\lceil \frac{i}{i-1} m \right\rceil = il' + a - im' - b - 1 = a - b - 1 \leq i-1.$$

(ii)Si $l'-m'=1$, alors

$$0 \leq (i-1)(l'-m') + a - b - 1 \leq i-2 \iff 2-i \leq a-b \leq 0,$$

par suite

$$1 \leq l - \left\lceil \frac{i}{i-1} m \right\rceil = i + a - b - 1 \leq i-1.$$

c'est ce que nous voulons.

Réciproquement,

$$0 \leq l - \left\lceil \frac{i}{i-1} m \right\rceil = i(l'-m') + a - b - 1 \leq i-1$$

implique que

$$\frac{b-a+1}{i} \leq l'-m' \leq \frac{i-1+b-a+1}{i}$$

or

$$\frac{b-a+1}{i} \geq \frac{3-i}{i} > -1, \frac{i-1+b-a+1}{i} = 2 - \frac{3}{i} < 2$$

donc soit $l'-m'=0$, soit $l'-m'=1$

(i) Si $l'-m'=0$, alors $0 \leq a-b-1 \leq i-1$ mais en fait, $a-b-1 \leq i-2$, car $1 \leq a \leq i-1, 1 \leq b \leq i-2$, donc

$$0 \leq (i-1)(l'-m') + a - b - 1 = \left\lfloor \frac{i-1}{i} l \right\rfloor - m \leq i-2$$

(ii) Si $l'-m'=1$, alors $0 \leq i+a-b-1 \leq i-1$, donc $a-b \leq 0$, ce qui implique que $(i-1)(l'-m') + a - b - 1 \leq i-2$ pour l'autre côté, il faut voir que $a-b \geq 3-i$, car $1 \leq a \leq i-1, 1 \leq b \leq i-2$, donc $a-b+i-1 \geq 2$, c'est exactement ce que nous voulons. $\square$

Démonstration. (Preuve de la proposition 2.12) Soit $\mu \in R_n$. Nous voulons montrer que $\mu^* \in R_n$, i.e., $d_i \in \{0,1,2,...,i-1\}$ pour $1 \leq i \leq n$. Selon le lemme, $d_{n-2k-1} \in \{0,1,2,...,n-2k-2\}$.

Comme $\mu^*_{n-2k} = \mu_{n-2k}$ pour tout k, nous pouvons réécrire (*) comme

$$\left\lfloor \frac{n-2k-1}{n-2k}\mu^*_{n-2k}\right\rfloor - \mu^*_{n-2k-1} = \mu_{n-2k-1} - \left\lceil \frac{n-2k-1}{n-2k-2}\mu_{n-2k-2}\right\rceil = d_{n-2k-1},$$

Or $d_{n-2k-1} \in [0, n-2k-2]$ car μ est une partition réduite.

$$d^*_{n-2k} = \mu^*_{n-2k} - \left\lceil \frac{n-2k}{n-2k-1}\mu_{n-2k-1}\right\rceil \in [0, n-2k-1],$$

selon le lemme, donc μ^* est une partition réduite.
d'ailleurs

$$\left(d^*_{n-2k-1}\right)^* = \left\lfloor \frac{n-2k-1}{n-2k}\mu^*_{n-2k}\right\rfloor - \mu^*_{n-2k-1} = \mu_{n-2k-1} - \left\lceil \frac{n-2k-1}{n-2k-2}\mu_{n-2k-2}\right\rceil = d_{n-2k-1},$$

Ce qui implique que l'application $\mu \mapsto \mu^*$ est une involution. □

N'oubliez pas que nous avons besoin d'une relation récursive pour prouver

$$P_n(x,y) = \sum_{\lambda \in \mathcal{R}_n} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1-(x^{i+1}y^i)^{n-i}}{1-x^{i+1}y^i}$$

Maintenant nous utilisons une bijection $\Upsilon : \mathcal{R}_n \times [0,n] \to \mathcal{R}_{n+1}$

$$\Upsilon(\mu, i) = \eta = \left(\mu^*_1, \mu^*_2, ..., \mu^*_n, \left\lceil \frac{n+1}{n}\mu^*_n\right\rceil + i\right)$$

Avant la démonstration, nous prenons $n = 3$ et voyons comment ça marche. D'abord, les partitions d'amphithéâtre réduites sont :$(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,2)$, $(0,1,2)$, $(0,1,3)$, $(0,1,4)$, tous vérifient$0 \leq d_i < i$. Rappelons que la relation voulue avec $n = 3$ est

$$P_4(x,y) = \frac{1-x^4}{1-x}P_3(x^2y, x^{-1})$$

donc avec

$$P_3(x,y) = 1 + x + x^2 + x^2y + x^3y + x^4y$$

où la puissance de x représente $|\mu|_e = \mu_3 + \mu_1 = \mu_3$ car $\mu_1 = 0$,
et la puissance de y représente $|\mu|_o = \mu_2$,
d'où

$$\begin{aligned} P_4(x,y) &= (1+x+x^2+x^3)(1+x^2y+x^4y^2+x^3y^2+x^5y^3+x^7y^4) \\ &= 1 + x^2y + x^4y^2 + x^3y^2 + x^5y^3 + x^7y^4 \\ &+x + x^3y + x^5y^2 + x^4y^2 + x^6y^3 + x^8y^4 \\ &+x^2 + x^4y + x^6y^2 + x^5y^2 + x^7y^3 + x^9y^4 \\ &+x^3 + x^5y + x^7y^2 + x^6y^2 + x^8y^3 + x^{10}y^4, \end{aligned}$$

maintenant nous calculons $\Upsilon(\mu, i)$ avec $i \in \{0,1,2,3\}$ et $\mu^*_3 = \mu_3$, $\mu^*_1 = \mu_1 = 0$, $\mu^*_2 = \lceil 2\mu_1 \rceil + \lfloor 2\mu_3/3 \rfloor - \mu_2$

$$\Upsilon((0,0,0), i) = \left(0,0,0,i + \left\lceil \frac{4}{3}\mu^*_3\right\rceil\right) = (0,0,0,i),$$

$$\Upsilon((0,0,1),i) = \left(0,0,1,i+\left\lceil\frac{4}{3}\mu_3^*\right\rceil\right) = (0,0,1,i+2),$$

$$\Upsilon((0,0,2),i) = \left(0,1,2,i+\left\lceil\frac{4}{3}\mu_3^*\right\rceil\right) = (0,1,2,i+3),$$

$$\Upsilon((0,1,2),i) = \left(0,0,2,i+\left\lceil\frac{4}{3}\mu_3^*\right\rceil\right) = (0,0,2,i+3),$$

$$\Upsilon((0,1,3),i) = \left(0,1,3,i+\left\lceil\frac{4}{3}\mu_3^*\right\rceil\right) = (0,1,3,i+4),$$

$$\Upsilon((0,1,4),i) = \left(0,1,4,i+\left\lceil\frac{4}{3}\mu_3^*\right\rceil\right) = (0,1,4,i+6),$$

les parties correspondentes sont notées par les couleurs pareilles.Par exemple, les termes $(0,1,4,i+6), 0 \le i \le 3$ correspondent aux $x^{1+i+6}y^{0+4}$.

Après cet exemple, nous revenons à la preuve que notre bijection vérifie

$$|\eta|_o = |\mu|_e, \quad |\eta|_e = i + 2|\mu|_e - |\mu|_o$$

Démonstration. D'abord comme $\mu_{n-2k}^* = \mu_{n-2k}$, nous avons $|\eta|_o = |\mu|_e$

Notons que $[1,n] = \{k \in \mathbb{Z} | 1 \le k \le n\} = \{1,2,...,n\}$

$$|\eta|_e = i + \left\lceil\frac{n+1}{n}\mu_n^*\right\rceil + \sum_{n-2k-1\in[1,n-1]} \mu_{n-2k-1}^*$$

$$= i + \left\lceil\frac{n+1}{n}\mu_n^*\right\rceil + \sum_{n-2k-1\in[1,n-1]} \left(\left\lceil\frac{n-2k-1}{n-2k-2}\mu_{n-2k-2}\right\rceil + \left\lfloor\frac{n-2k-1}{n-2k}\mu_{n-2k}\right\rfloor - \mu_{n-2k-1}\right)$$

$$= i + \left\lceil\frac{n+1}{n}\mu_n^*\right\rceil + \sum_{n-2k\in[1,n]} \left(\left\lceil\frac{n-2k-1}{n-2k-2}\mu_{n-2k-2}\right\rceil + \left\lfloor\frac{n-2k-1}{n-2k}\mu_{n-2k}\right\rfloor\right) - |\mu|_o$$

$$= i + \sum_{n-2k\in[1,n]} \left(\left\lceil\frac{n-2k+1}{n-2k}\mu_{n-2k}\right\rceil + \left\lfloor\frac{n-2k-1}{n-2k}\mu_{n-2k}\right\rfloor\right) - |\mu|_o$$

(grâce au lemme suivant en posant $i = n-2k, m = \mu_{n-2k}$)

$$= i + 2|\mu|_e - |\mu|_o.$$

□

Lemme 2.13. *Pour tout* $(i,m) \in \mathbb{Z}^2$, *nous avons*

$$\left\lceil\frac{i+1}{i}m\right\rceil + \left\lfloor\frac{i-1}{i}m\right\rfloor = 2m.$$

Démonstration. on commence par supposer que $i|m$, i.e., $m = pi$, alors

$$\left\lceil\frac{i+1}{i}m\right\rceil + \left\lfloor\frac{i-1}{i}m\right\rfloor = m+p+m-p = 2m.$$

Sinon on fait la division euclidienne, supposons $m = pi + q$ avec $0 < q < i$, alors $-m = -pi - q = -(p+1)i + (i-q)$,

$$\left\lceil\frac{i+1}{i}m\right\rceil + \left\lfloor\frac{i-1}{i}m\right\rfloor = m+p+1+m-(p+1) = 2m.$$

□

Exemple 2.14. Pour $n = 5$,

$$\Upsilon(\mu, i) = \eta = \left(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*, \mu_5^*, \left\lceil \frac{6}{5}\mu_5^* \right\rceil + i\right),$$

$$|\eta|_o = \eta_5 + \eta_3 + \eta_1 = \mu_5^* + \mu_3^* + \mu_1^* = \mu_5 + \mu_3 + \mu_1 = |\mu|_e,$$

$$|\eta|_e = \eta_6 + \eta_4 + \eta_2 = \left\lceil \frac{6}{5}\mu_5^* \right\rceil + i + \mu_4^* + \mu_2^*,$$

$$= \left\lceil \frac{6}{5}\mu_5^* \right\rceil + i + \left(\left\lceil \frac{4}{3}\mu_3^* \right\rceil + \left\lfloor \frac{4}{5}\mu_5^* \right\rfloor - \mu_4\right) + \left(\left\lceil \frac{2}{1}\mu_1^* \right\rceil + \left\lfloor \frac{2}{3}\mu_3^* \right\rfloor - \mu_2\right),$$

$$= i + (2\mu_5 + 2\mu_3 + 2\mu_1) - (\mu_2 + \mu_4) = i + 2|\mu|_e - |\mu|_o,$$

où $\mu_1 = 0$.

Maintenant, nous allons montrer comment obtenir une partition d'amphithéâtre à partir d'une partition dont les parties sont impaires en suivant l'algorithme de M. Bousquet-Mélou et de K. Eriksson.

Soit $\lambda \in \mathcal{O}_n$, écrissons λ sous la forme

$$\lambda = 1^{i_n}3^{i_{n-1}}5^{i_{n-2}}...(2n-3)^{i_2}(2n-1)^{i_1}, \quad 0 \le i_j < j \quad pour \quad 1 \le j \le n$$

Alors la partion d'amphithéâtre obtenue est

$$\mu = \Upsilon(\Upsilon(...(\Upsilon(\Upsilon((0), i_2), i_3), ...), i_{n-1}), i_n).$$

On commence par un exemple $\eta = (1, 3, 5, 5, 7) \in \mathcal{O}_5$. D'abord, écrissons $\eta = 1^1 3^1 5^2 7^1 9^0$.

Rappelons notre formule pour l'application Υ

$$\mu_{n-2k}^* = \mu_{n-2k},$$

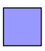
$$\mu_{n-2k-1}^* - \left\lceil \frac{n-2k-1}{n-2k-2}\mu_{n-2k-2}^* \right\rceil = \left\lfloor \frac{n-2k-1}{n-2k}\mu_{n-2k} \right\rfloor - \mu_{n-2k-1} (*),$$

$$\Upsilon(\mu, i) = \eta = \left(\mu_1^*, \mu_2^*, ..., \mu_n^*, \left\lceil \frac{n+1}{n}\mu_n^* \right\rceil + i\right).$$

Donc

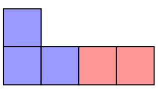
(i)

$$\eta^{(1)} = \Upsilon((0), 1) = (0, 1) \quad car \quad \eta_1^{(1)} = 0, \eta_2^{(1)} = \lceil 2 * 0 \rceil + 1 = 1$$



(ii)

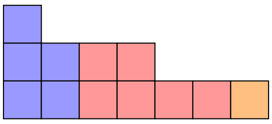
$$\eta^{(2)} = \Upsilon((0, 1), 2) = (0, 1, 4) \quad car \quad \eta_2^{(2)} = \eta_2^{(1)} = 1, \eta_1^{(2)} = \left\lfloor \frac{1}{2}\eta_2^{(1)} \right\rfloor - \eta_1^{(1)} = 0, \eta_3^{(2)} = \left\lceil \frac{3}{2}\eta_2^{(1)} \right\rceil + 2 = 4$$



(iii)

$$\eta^{(3)} = \Upsilon((0, 1, 4), 1) = (0, 1, 4, 7) \quad car \quad \eta_3^{(3)} = \eta_3^{(2)} = 4, \eta_1^{(3)} = \eta_1^{(2)} = 0$$

$$\eta_2^{(3)} = \left\lceil \frac{2}{1}\eta_1^{(2)} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2}{3}\eta_3^{(2)} \right\rfloor - \eta_2^{(2)} = 1, \eta_4^{(3)} = \left\lceil \frac{4}{3}\eta_3^{(2)} \right\rceil + 1 = 7$$

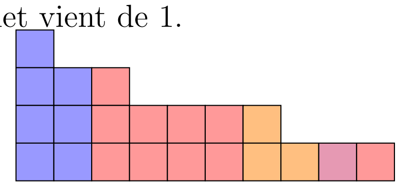


(iv)

$$\eta^{(4)} = \Upsilon((0,1,4,7),1) = (0,1,4,7) \quad car \quad \eta_4^{(4)} = \eta_4^{(3)} = 7, \eta_2^{(4)} = \eta_2^{(3)} = 1,$$

$$\eta_1^{(4)} = \left\lfloor \frac{1}{2}\eta_2^{(3)} \right\rfloor - \eta_1^{(3)} = 0, \eta_3^{(4)} = \left\lceil \frac{3}{2}\eta_2^{(3)} \right\rceil + \left\lfloor \frac{3}{4}\eta_4^{(3)} \right\rfloor - \eta_3^{(3)} = 3, \eta_5^{(4)} = \left\lceil \frac{5}{4}\eta_4^{(3)} \right\rceil + 1 = 10.$$

On peut vérifier que c'est vraiment une partition d'amphithéâtre et nous pouvons voir comment les entiers impairs sont ajoutés chaque étape. Les carreaux bleus viennent de 7, les carreaux rouges viennent de 5+5, les carreaux jaunes viennent de 3, et le carreau violet vient de 1.



3. Seconde démonstration

Dans cette partie, je vais introduire une autre démonstration appartenant à AE JA YEE[5]. Son méthode est créer une bijection entre $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{O}_n$, où

$$\mathcal{L}_n = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n : 0 \leq \frac{\lambda_1}{1} \leq \frac{\lambda_2}{2} \leq \cdots \frac{\lambda_n}{n}, \quad \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3, ..., n \right\},$$

$$O_n = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n : \lambda_i \equiv 1 (mod 2)\}.$$

D'abord, nous allons comprendre l'application $\Phi_n : \mathcal{O}_n \to \mathcal{L}_n$, étant donné une partition $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$, nous commençons par $(0, 0, 0, \cdots, 0) \in \mathcal{L}_n$, et insérons un par un le plus grand σ_i restant dans $\mathcal{L}_n$,alors chaque étape est une application ϕ_n telle que $\tau = \phi_n(\mu, 2k-1)$,où $\mu \in \mathcal{L}_n$, $k \leq n+1$ et $\Phi_n$est la composée de ϕ_i , $1 \leq i \leq n$
Pour faire l'insertion, il faut savoir d'abord la position d'insérer

$$c = min\left\{ \left\{ j \middle| \frac{\mu_{n-2j-1}}{n-2j-1} = \frac{\mu_{n-2j}}{n-2j}, 0 \leq j < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}, k-1 \right\},$$

nous appelons c la position d'insertion.

Après la position, nous devons savoir la façon d' insérer. Soit $\tau = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$ défini comme ci-dessous.

$$\tau_{n-i} = \sigma_{n-i} + 1, \quad 0 \leq i \leq 2c-1,$$
$$\tau_{n-2c} = \sigma_{n-2c} + k - c,$$
$$\tau_{n-2c-1} = \sigma_{n-2c-1} + k - c - 1,$$
$$\tau_{n-i} = \sigma_{n-i}, \quad 2c+2 \leq i < n$$

par calculation simple, nous avons

$$|\tau| = \sum_{i=1}^{n} \tau_i = |\mu| + 2c + (k-c) + (k-c-1) = |\mu| + 2k - 1.$$

Cette définition est un peu compliquée, donc nous commençons par un exemple.

Exemple 3.1. soit $n = 5, k = 3, \mu = (0, 0, 0, 3, 4)$, c'est-à-dire, je voudrais insérer 5 dans μ.

$$\frac{\mu_4}{4} = 3/4 \neq 4/5 = \frac{\mu_5}{5}, \frac{\mu_2}{2} = 0 = \frac{\mu_3}{3} = \frac{\mu_{5-2*1}}{5-2*1},$$

Donc $c = 1$,

$$\tau_5 = \sigma_5 + 1, \tau_4 = \sigma_4 + 1, \tau_3 = \sigma_3 + (3-1), \tau_2 = \sigma_2 + (3-1-1), \tau_1 = \sigma_1,$$

donc nous obtenons $\tau = (0, 1, 2, 4, 5)$.

Avant la preuve, laissez moi réécrire

$$\lambda_i = i * \left\lceil \frac{\lambda_i}{i} \right\rceil - (i - r_i), \quad 1 \leq r_i \leq i$$

Maintenant, il faut expliquer plus précisément la condition de la partition d'amphithéâtre

Lemme 3.2. *Pour $(\lambda_i, \lambda_{i+1}) \in \mathbb{N}^2$, la condition*

$$\frac{\lambda_i}{i} \leq \frac{\lambda_{i+1}}{i+1}$$

est équivalente à
Soit

$$\left\lceil \frac{\lambda_i}{i} \right\rceil < \left\lceil \frac{\lambda_{i+1}}{i+1} \right\rceil,$$

Soit

$$\left\lceil \frac{\lambda_i}{i} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda_{i+1}}{i+1} \right\rceil \quad et \quad r_i < r_{i+1}.$$

Démonstration. Nous considérons en deux cas

Cas1 : $\frac{\lambda_i}{i} \leq k$, $\frac{\lambda_{i+1}}{i+1} > k$ pour certain $k \in \mathbb{Z}$, alors $\left\lceil \frac{\lambda_i}{i} \right\rceil = k$ et $\left\lceil \frac{\lambda_{i+1}}{i+1} \right\rceil = k + 1$.

Cas2 : $k - 1 < \frac{\lambda_i}{i} \leq \frac{\lambda_{i+1}}{i+1} \leq k$, dans ce cas,nous avons

$$\lambda_i = (k-1) * i + q \quad (division \quad euclidienne) = ki - (i - q) \quad donc \quad r_i = q,$$

$$\lambda_{i+1} = (k-1)*(i+1)+p \quad (division \quad euclidienne) = k(i+1)-(i+1-p) \quad donc \quad r_{i+1} = p.$$

Donc avec les deux côtés divisés par i et $(i + 1)$ respectivement, nous avons

$$\frac{\lambda_i}{i} = (k-1) + q/i, \frac{\lambda_{i+1}}{i+1} = (k-1) + \frac{p}{i+1},$$

Comme $\frac{\lambda_i}{i} \leq \frac{\lambda_{i+1}}{i+1}$, alors $p \geq \frac{i+1}{i} q > q$, i.e., $r_i < r_{i+1}$. □

Ce que je voudrais montrer est si une partition μ est obtenue par insérer $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ itérativement, avec $\sigma_1 \geq 2k - 1$(le plus petit), alors $\phi_n(\mu, 2k - 1)$ est encore une partition d'amphithéâtre.

D'après l'algorithme, pour tous les lemmes ou théorèmes, il faut les vérifier en cas différents par exemple comme suivant :

$$n - 2c + 1 \leq i \leq n, i = n - 2c, i = n - 2c - 1, n - 2c + 2 \leq i < n$$

Lemme 3.3. *Etant donné une partition $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_l) \in \mathcal{O}_n$ avec $\sigma_1 = 2k-1$, supposons que $\phi_n(\lambda^{(i)}, \sigma_{l-i}) = \lambda^{(i+1)}$ est une partition d'amphithéâtre pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$, avec $\lambda^{(0)} = (0, 0, ..., 0)$. Alors pour tout $j = 0, 1, 2, ..., k-2$, nous avons*

$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2j-1}}{n-2j-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2j}}{n-2j} \right\rceil \quad et \quad r^{(l)}_{n-2j-1} + 1 = r^{(l)}_{n-2j}$$

Démonstration. Nous le prouvons par récurrence en l. Pour $l = 0$, c'est trivial. Supposons le résultat est vrai pour $l-1$. Soit c la position de l-ème insértion. Rappelons ici la définition de c,

$$c = min\left\{\left\{j \middle| \frac{\mu_{n-2j-1}}{n-2j-1} = \frac{\mu_{n-2j}}{n-2j}, 0 \leq j < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}, k-1\right\}$$

D'abord, nous avons $c < k$.

(i)Montrons pour $0 \leq j \leq c-1$, $(n-2j-1)|\lambda^{(l-1)}_{n-2j-1}$ si et seulement si $(n-2j)|\lambda^{(l-1)}_{n-2j}$. Si $\lambda^{(l-1)}_{n-2j-1} = q*(n-2j-1)$, alors $r^{(l-1)}_{n-2j-1} = n-2j-1$, donc par hypothèse, $r^{(l-1)}_{n-2j} = n-2j$, c'est-à-dire, $(n-2j)|\lambda^{(l-1)}_{n-2j}$.

Réciproquement, c'est similaire grâce à l'équation $r^{(l-1)}_{n-2j-1} + 1 = r^{(l-1)}_{n-2j}$. Or, par la minimalité de c, aucun de $\frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2j-1}}{n-2j-1}, \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2j}}{n-2j}$ ne peut être entier. Ainsi, pour $0 \leq h \leq 2c-1$, comme $\frac{\lambda^{(l-1)}_{n-h}}{n-h}$ n'est pas entier, on a $\left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil - \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-h}}{n-h} \geq \frac{1}{n-h}$, de plus $\lambda^{(l)}_{n-h} = \lambda^{(l-1)}_{n-h} + 1$, donc

$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil \quad et \quad r^{(l-1)}_{n-h} + 1 = r^{(l)}_{n-h},$$

donc nous avons montré le résultat pour $0 \leq j \leq c-1$

(ii)pour $c \leq j < k-1$.

Si $c = k-1$, rien à montrer.

Si $c < k-1$, alors

$$\frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c-1}}{n-2c-1} = \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} \quad et \quad r^{(l-1)}_{n-2c-1} + 1 = r^{(l-1)}_{n-2c},$$

donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda^{(l-1)}_{n-2c-1} = q(n-2c-1)$, $\lambda^{(l-1)}_{n-2c} = q(n-2c)$, donc $\lambda^{(l)}_{n-2c-1} = q(n-2c-1)+k-c-1$ et $\lambda^{(l)}_{n-2c} = q(n-2c)+k-c$. Nous savons par hypothèse que λ^l est une partition d'amphithéâtre, ce qui entraîne que $\frac{k-c-1}{n-2c-1} \leq \frac{k-c}{n-2c} \Rightarrow k-c \leq n-2c$, donc $r_{n-2c} = k-c = (k-c-1)+1 = r_{n-2c-1}+1$. Cela finit la partie pour $c \leq j < k-1$

(iii)pour $c < j < k-1$, comme pour $h \geq 2c+2$, $\lambda^{(l-1)}_{n-h} = \lambda^{(l)}_{n-h}$, le résultat est vrai par hypothèse. □

Il faut un lemme simple pour la phrase bleue

Lemme 3.4. *Si $(x, y, n, n+1) \in \mathbb{Z}^4$ vérifie $x/n = y/(n+1)$, alors n divise x, et $n+1$ divise y*

Corollaire 3.5. *Soit $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_l) \in \mathcal{O}_n$. Supposons que $\phi_n(\lambda^{(i)}, \sigma_{l-i}) = \lambda^{(i+1)}$ est une partition d'amphithéâtre pour tout $i < l$. Soit c la position d'insertion, alors pour $0 \leq h \leq 2c-1$, $\lambda^{(l)}_{n-h}$ n'est pas multiple de $(n-h)$*

Et puis ,on va donner une borne inférieure de r_{n-h} , i.e., $r_{n-h} \geq k - \left\lceil \frac{h}{2} \right\rceil$ pour $h < 2k-2$

Lemme 3.6. *Etant donné une partition $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in O_n$ avec $\sigma_1 = 2k-1$, supposons que $\phi_n(\lambda^{(i)}, \sigma_{n-i}) = \lambda^{(i+1)}$ est une partition d'amphithéâtre pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$, avec $\lambda^{(0)} = (0, 0, ..., 0)$, pour tout $j = 0, 1, 2, ..., k-2$, si $\lambda^{(l)}_{n-2j} > 0$, alors*

$$r^{(l)}_{n-2j-1} \geq k-j-1, r^{(l)}_{n-2j} \geq k-j$$

Démonstration. Nous prouvons par récurrence en l. Pour $l = 0$, c'est vrai. Supposons le résultat est vrai pour $l-1$

Cas 1 : $h \geq 2c+2$, alors $\lambda^{(l)}_{n-h} = \lambda^{(l-1)}_{n-h}$,donc par hypothèse, le résultat est vrai pour $c < j < k-1$

Cas 2 : $h < 2c$, par corollaire 4, $\lambda^{(l-1)}_{n-h}$ n'est pas multiple de $(n-h)$, i.e. $r^{(l-1)}_{n-h} < n-h$. Comme $r^{(l)}_{n-h} = r^{(l-1)}_{n-h}+1$ et $r^{(l-1)}_{n-2j-1} \geq k-j-1$, nous avons $r^{(l)}_{n-2j-1} \geq k-j-1, r^{(l)}_{n-2j} \geq k-j$

Cas 3 : $h = 2c, 2c+1$. Si $c = k-1$, c'est fini. Sinon, comme

$$\frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c-1}}{n-2c-1} = \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} = q, r^{(l-1)}_{n-2c-1} = n-2c-1, r^{(l-1)}_{n-2c} = n-2c,$$

nous avons

$$\lambda^{(l)}_{n-2c-1} = \lambda^{(l-1)}_{n-2c-1}+k-c-1 = q(n-2c-1)+k-c-1 = (q+1)(n-2c-1)-(n-2c-1-(k-c-1)),$$

donc

$$r^{(l)}_{n-2c-1} = k-c-1, r^{(l)}_{n-2c} = k-c.$$

C'est ce que l'on veut montrer. □

le lemme suivant montre que $\left\lceil \lambda^{(l)}_h / h \right\rceil$ augmente au plus 1 après chaque insertion.

Lemme 3.7. *Etant donné une partition $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_l) \in \mathcal{O}_n$ avec $\sigma_1 = 2k-1$, supposons que $\phi_n(\lambda^{(i)}, \sigma_{l-i}) = \lambda^{(i+1)}$ est une partition d'amphithéâtre pour tout $i = 0, 1, ..., l-2$, avec $\lambda^{(0)} = (0, 0, ..., 0)$. Soit $\phi_n(\lambda^{(l-1)}, \sigma_1) = \lambda^{(l)}$, alors pour $h = 1, 2, ..., n$, on a*

$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_h}{h} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_h}{h} \right\rceil + 1$$

Démonstration. Soit c la position d'insertion, d'après corollaire 4, on sait que $\lambda^{(l-1)}_h / h$ n'est pas entier pour $h \geq n-2c+1$, donc selon notre méthode d'insertion, nous avons

$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_h}{h} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_h}{h} \right\rceil \quad si \quad h = n-2c-1, ou \quad h = n-2c$$

et

$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_h}{h} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_h}{h} \right\rceil \quad sinon$$

Donc maintenant, supposons que $\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil > \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil + 1$, comme $\lambda^{(l)}_{n-2c} = \lambda^{(l-1)}_{n-2c} + k - c$, donc $k - c \geq 2$, on a

$$\frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c-1}}{n-2c-1} = \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} = q,$$

Or

$$\lambda^{(l)}_{n-2c} = \lambda^{(l-1)}_{n-2c} + k - c = (q+1)(n-2c) - (n - 2c - (k-c)),$$

si on veut que

$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil > \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil + 1,$$

il faut $k - c > n - 2c$.

Pour une contradiction, considérons $r^{(l-1)}_{n-2n+2}$, le lemme 5 nous dit que $r^{(l-1)}_{n-2n+2} \geq k - c + 1$, alors

$$n - 2c + 2 - r^{(l-1)}_{n-2c+2} \leq n - 2c + 2 - (k - c + 1) < n - 2c + 2 - (n - 2c + 1) = 1,$$

ce qui implique que $\lambda^{(l-1)}_{n-2c+2}$ est un multiple de $n-2c+2$, contradiction à la corollaire 4. De même pour le cas $h = n - 2c - 1$ □

Lemme 3.8. *Etant donné une partition $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_l) \in \mathcal{O}_n$ avec $\sigma_1 > 2k-1$, supposons que $\phi_n(\lambda^{(i)}, \sigma_{l-i}) = \lambda^{(i+1)}$ est une partition d'amphithéâtre pour tout $i = 0, 1, ..., l-1$, avec $\lambda^{(0)} = (0, 0, ..., 0)$.*

Alors il existe un $j \in \{0, 1, ..., \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ tel que

$$\frac{\lambda^{(l)}_{n-2j-1}}{n-2j-1} = \frac{\lambda^{(l)}_{n-2j}}{n-2j}.$$

Démonstration. D'après lemme 3.4, si $\frac{\lambda^{(l)}_{n-2j-1}}{n-2j-1}$ est un entier, alors l'équation $\frac{\lambda^{(l)}_{n-2j-1}}{n-2j-1} = \frac{\lambda^{(l)}_{n-2j}}{n-2j}$ est satisfaite. Donc notre but est chercher un tel j.

Cas 1 : n est pair, alors on prend $j = \frac{n}{2} - 1$, car $\lambda^{(l)}_1$ est un multiple de 1.

Cas 2 : n est impair, nous considérons $\lambda^{(l)}_2$. Si $\lambda^{(l)}_2 = 0$, alors $2|0$, c'est fini. Si $\lambda^{(l)}_2 > 0, \lambda^{(l)}_2 = \lambda^{(l)}_{n-2*\frac{n-3}{2}-1}$, donc d'après lemme 3.6, $2 - r^{(l)}_2 \leq 2 - k + \frac{n-3}{2} + 1$(*). De plus $2k - 1 \geq n + 1$, or n est impair, ainsi en effet $2k - 1 \geq n + 2$(**). Grâce aux (*)et(**), $2 - r^{(l)}_2 \leq 0$, c'est-à-dire, $2|\lambda^{(l)}_2$ et $\lambda^{(l)}_2, \lambda^{(l)}_3$ conviennent. □

Théorème 3.9. *Pour tout $\sigma \in \mathcal{O}_n$, $\Phi_n(\sigma)$ est une partition d'amphithéâtre.*

Démonstration. Soit $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_l)$, et $\sigma_1 = 2k - 1$ pour certain k.

Montrons par récurrence en l. Supposons que $\lambda^{(l-1)}$ est une partition d'amphithéâtre et c est la position d'insertion.

Cas 1 : $0 \leq h \leq 2c - 1$, λ_{n-h} n'est pas multiple de $n - h$, donc

$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil \quad et \quad r^{(l-1)}_{n-h} + 1 = r^{(l)}_{n-h}.$$

Comme $\lambda^{(l-1)}$ est une partition d'amphithéâtre, on sait que

soit
$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil < \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-h+1}}{n-h+1} \right\rceil,$$
qui implique que
$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil < \left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-h+1}}{n-h+1} \right\rceil,$$
soit
$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-h+1}}{n-h+1} \right\rceil \quad et \quad r^{(l-1)}_{n-h} < r^{(l-1)}_{n-h+1},$$
ce qui entraine que
$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-h+1}}{n-h+1} \right\rceil \quad et \quad r^{(l)}_{n-h} < r^{(l)}_{n-h+1},$$
car $r^{(l-1)}_{n-h} + 1 = r^{(l)}_{n-h}$, $r^{(l-1)}_{n-h+1} + 1 = r^{(l)}_{n-h+1}$

Cas 2 : $2c+2 < h < n$,$\lambda^{(l-1)}_{n-h} = \lambda^{(l)}_{n-h}$ et $\lambda^{(l-1)}$ est une partition d'amphithéâtre, donc $\lambda^{(l)}_{n-h}$ l'est aussi.

Cas 3 : $h = 2c+2$. Comme $\frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c-2}}{n-2c-2} \leq \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c-1}}{n-2c-1}$, $\lambda^{(l)}_{n-2c-2} = \lambda^{(l-1)}_{n-2c-2}$ et $\lambda^{(l)}_{n-2c-1} = \lambda^{(l-1)}_{n-2c-1} + k - c - 1$, alors $\frac{\lambda^{(l)}_{n-2c-2}}{n-2c-2} \leq \frac{\lambda^{(l)}_{n-2c-1}}{n-2c-1}$

Cas 4 : $h = 2c+1$. On sait que $\frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c-1}}{n-2c-1} \leq \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c}$ car $\lambda^{(l-1)}$ est une partition d'amphithéâtre et $\lambda^{(l)}_{n-2c-1} = (k-c-1) + \lambda^{(l-1)}_{n-2c-1}$, $\lambda^{(l)}_{n-2c} = (k-c) + \lambda^{(l-1)}_{n-2c}$.

Donc soit (1)
$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c-1}}{n-2c-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil \quad et \quad r^{(l-1)}_{n-2c-1} < r^{(l-1)}_{n-2c}$$

(i)Si $\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil + 1$, alors la condition de partition d'amphithéâtre est toujours satisfaite.

(ii)Si $\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil$, i.e., $r^{(l-1)}_{n-2c} + k - c < n - 2c$, ce qui implique que $r^{(l-1)}_{n-2c-1} + k - c - 1 < n - 2c - 1$, donc $\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2c-1}}{n-2c-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c-1}}{n-2c-1} \right\rceil$ et $r^{(l)}_{n-2c-1} < r^{(l)}_{n-2c}$.

Soit (2)
$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c-1}}{n-2c-1} \right\rceil < \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil.$$
la question maintenant est : est-il possible que
$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2c-1}}{n-2c-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil \quad et \quad r^{(l)}_{n-2c-1} \geq r^{(l)}_{n-2c}?$$

dans ce cas, $r^{(l)}_{n-2c-1}$ est au plus $k-c-1$ mais $r^{(l)}_{n-2c}$ est au moins $k-c+1$, donc c'est impossible, donc la condition de partition d'amphithéâtre est satisfaite.

D'après lemme 3.7,

$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-h}}{n-h} \right\rceil + 1,$$

donc l'autres cas n'existent pas.

Cas 5 : D'après corollaire 3.5, $\lambda^{(l-1)}_{n-2c+1}$ n'est pas un multiple de $n-2c+1$.

(i)Si $\lambda^{(l-1)}_{n-2c}$ n'est pas un multiple de $n-2c$, alors $c = k-1$, ce qui implique que $\lambda^{(l)}_{n-2c} = \lambda^{(l-1)}_{n-2c} + 1$. Comme $\lambda^{(l)}_{n-2c+1} = \lambda^{(l-1)}_{n-2c+1} + 1$, alors le raisonnement restant est similaire au cas 1.

(ii)Si $\lambda^{(l-1)}_{n-2c}$ est un multiple de $n-2c$, alors

$$\frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} = \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil < \left\lceil \frac{\lambda^{(l-1)}_{n-2c+1}}{n-2c+1} \right\rceil,$$

supposons que

$$\left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2c}}{n-2c} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lambda^{(l)}_{n-2c+1}}{n-2c+1} \right\rceil \quad et \quad r^{(l)}_{n-2c} \geq r^{(l)}_{n-2c+1},$$

donc $r_{n-2c} = k-c$. Par lemme 3.6, nous avons $r^{(l)}_{n-2c+1} = r^{(l-1)}_{n-2c+1} + 1 \geq m-c+1$, où $\sigma_2 = 2m-1$, ce qui implique que $k > m$, contradiction à notre condition que $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq ... \leq \sigma_n$. □

Exemple 3.10. Comme à la fin de la première démonstration, nous allons montrer l'algorithme de Ae Ja Yee par le même exemple $(1, 3, 5, 5, 7)$, nous commençons par $\lambda^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0)$.

(i)$7 = 2*4-1$, donc $k_1 = 4$.

$$\frac{\lambda^{(0)}_{5-2*0-1}}{5-2*0-1} = \frac{\lambda^{(0)}_4}{4} = \frac{\lambda^{(0)}_{5-2*0}}{5-2*0} = \frac{\lambda^{(0)}_5}{5} = 0 \quad donc \quad c_1 = 0,$$

alors d'après notre formule

$$\lambda^{(1)}_{5-2*0-1} = \lambda^{(0)}_{5-2*0-1} + (k_1 - c_1 - 1) = 3, \lambda^{(1)}_{5-2*0} = \lambda^{(0)}_{5-2*0} + (k_1 - c_1) = 4,$$

$$\lambda^{(1)}_3 = \lambda^{(0)}_3 = 0, \lambda^{(1)}_2 = \lambda^{(0)}_2 = 0, \lambda^{(1)}_1 = \lambda^{(0)}_1 = 0,$$

nous obtenons $\lambda^{(1)} = (0, 0, 0, 3, 4)$ après la première étape.

(ii)$5 = 2*3-1$, donc $k_2 = 3$.

$$\frac{\lambda^{(1)}_{5-2*0-1}}{5-2*0-1} = \frac{3}{4} \neq \frac{\lambda^{(1)}_{5-2*0}}{5-2*0} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{\lambda^{(1)}_{5-2*1-1}}{5-2*1-1} = \frac{\lambda^{(1)}_2}{2} = \frac{\lambda^{(1)}_{5-2*1}}{5-2*1} = \frac{\lambda^{(1)}_3}{3} = 0 \quad donc \quad c_2 = 1,$$

alors d'après notre formule

$$\lambda_5^{(2)} = \lambda_5^{(1)} + 1 = 5, \lambda_4^{(2)} = \lambda_4^{(1)} + 1 = 4,$$

$$\lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(1)} + (k_2 - c_2) = 2, \lambda_2^{(2)} = \lambda_2^{(1)} + (k_2 - c_2 - 1) = 1,$$

$$\lambda_1^{(2)} = \lambda_1^{(1)} = 0,$$

donc le résultat après deuxième étape est (0,1,2,4,5).

(iii) $5 = 2 * 3 - 1$, donc $k_3 = 3$.

$$\frac{\lambda^{(2)}_{5-2*0-1}}{5 - 2*0 - 1} = \frac{4}{4} = \frac{\lambda^{(2)}_{5-2*0}}{5 - 2*0} = \frac{5}{5} = 1 \quad donc \quad c_3 = 0,$$

$$\lambda^{(3)}_{5-2*0-1} = \lambda_4^{(2)} + (k_3 - c_3 - 1) = 6, \lambda^{(3)}_{5-2*0} = \lambda_5^{(2)} + (k_3 - c_3) = 8,$$

$$\lambda_3^{(3)} = \lambda_3^{(2)} = 2, \lambda_2^{(3)} = \lambda_2^{(2)} = 1, \lambda_1^{(3)} = \lambda_1^{(2)} = 0,$$

donc le résultat après troisième étape est $\lambda^{(3)} = (0, 1, 2, 6, 8)$.

(iv)$3 = 2 * 2 - 1$,donc $k_4 = 2$.

$$\frac{\lambda^{(3)}_{5-2*0-1}}{5 - 2*0 - 1} = \frac{6}{4} \neq \frac{\lambda^{(3)}_{5-2*0}}{5 - 2*0} = \frac{8}{5},$$

$$\frac{\lambda^{(3)}_{5-2*1-1}}{5 - 2*1 - 1} = \frac{1}{2} \neq \frac{\lambda^{(3)}_{5-2*1}}{5 - 2*1} = \frac{2}{3},$$

dans ce cas, posons $c_4 = k_4 - 1 = 1$.

$$\lambda^{(4)}_{5-2*1-1} = \lambda_2^{(3)} + (k_4 - c_4 - 1) = 1, \lambda^{(4)}_{5-2*1} = \lambda^{(3)}_{5-2*1} + (k_4 - c_4) = 3,$$

$$\lambda_5^{(4)} = \lambda_5^{(3)} + 1 = 9, \lambda_4^{(4)} = \lambda_4^{(3)} + 1 = 7,$$

$$\lambda_1^{(4)} = \lambda_1^{(3)} = 0,$$

donc le résultat après cette étape est $\lambda^{(4)} = (0, 1, 3, 7, 9)$.

(v)$1 = 2 * 1 - 1$, donc $k_5 = 1$, ce qui entraine que $c_5 = 0$.

$$\lambda_5^{(5)} = \lambda_5^{(4)} + (k_5 - c_5) = 10, \lambda_4^{(5)} = \lambda_4^{(4)} + (k_5 - c_5 - 1) = 7,$$

$$\lambda_3^{(5)} = \lambda_3^{(4)} = 3, \lambda_1^{(5)} = \lambda_1^{(4)} = 1, \lambda_1^{(5)} = \lambda_1^{(4)} = 0,$$

Donc le résultat après quinzième étape est $\lambda^{(5)} = (0, 1, 3, 7, 10)$.

Réciproquement, définissons l'application inverse Ψ par itération. Chaque étape il faut extraire un entier impair de la partition d'amphithéâtre.

soient $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) \in \mathcal{L}_n$, $l(\tau)$ le nombre des parties nonnulles.

Pour $0 \leq j \leq \left\lceil \frac{l(\tau)}{2} \right\rceil$, posons k_j le plus petit entier $k > j$ tel que

$$\frac{\tau_{n-2j-1} - (k - j - 1)}{n - 2j - 1} \leq \frac{\tau_{n-2j} - (k - j)}{n - 2j},$$

ici,nous utilisons la convention que $\tau_0 = 0$ et si n est impair, alors $k_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

choisissons $k = min\{k_j | 0 \leq j < \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ et $b = min\{j | k_j = k\}$, nous appelons b la position d'extraction. Définir $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ comme suivant.

$$\mu_{n-i} = \tau_{n-i} - 1, 0 \leq i \leq 2b - 1,$$
$$\mu_{n-2b} = \tau_{n-2b} - (k - b),$$
$$\mu_{n-2b-1} = \tau_{n-2b-1} - (k - b - 1),$$
$$\mu_{n-i} = \tau_{n-i}, 2b + 2 \leq i < n$$

Nous pouvons voir que $2k-1$ est extrait de la partition τ, donc notons $\mu = \psi(\tau, 2k-1)$

On commence par un exemple pour montrer comment obtenir une partition$\in \mathcal{O}_n$ à partir d'une partition d'amphithéâtre $\tau^{(0)} = (0, 1, 3, 6, 9)$.

(i)Pour $j = 0, k = j + 1 = 1$, nous avons

$$\frac{\tau_4^{(0)}}{4} = 6/4 \leq \frac{\tau_5^{(0)} - 1}{5} = 8/5,$$

donc $k_0 = 1, b = 0$, d'après l'algorithme

$$\tau_5^{(1)} = \tau_5^{(0)} - 1, \tau_4^{(1)} = \tau_4^{(0)},$$
$$\tau_i^{(1)} = \tau_i^{(0)}, 1 \leq i \leq 3,$$

donc après la première étape,nous obtenons $\tau^{(1)} = (0, 1, 3, 6, 8)$, 1 est sorti

(ii)

$j = 0, k = 1$

$$\frac{\tau_4^{(1)}}{4} = 6/4 > \frac{\tau_5^{(1)} - 1}{5} = 7/5,$$

$j = 0, k = 2$

$$\frac{\tau_4^{(1)} - 1}{4} = 5/4 > \frac{\tau_5^{(1)} - 2}{5} = 6/5,$$

$j = 0, k = 3$

$$\frac{\tau_4^{(1)} - 2}{4} = 4/4 \leq \frac{\tau_5^{(1)} - 3}{5} = 5/5,$$

donc $k_0 = 3$.

$j = 1, k = 2$

$$\frac{\tau_2^{(1)}}{2} = 1/2 \leq \frac{\tau_3^{(1)} - 1}{3} = 2/3,$$

d'où $k_1 = 2$, donc $k = min\{k_0, k_1\} = k_1 = 2, b = 1$,

$$\tau_5^{(2)} = \tau_5^{(1)} - 1 = 7, \tau_4^{(2)} = \tau_4^{(1)} - 1 = 5,$$
$$\tau_3^{(2)} = \tau_3^{(1)} - (2 - 1) = 2, \tau_2^{(2)} = \tau_2^{(1)} - (2 - 1 - 1) = 1,$$

donc après la seconde étape, nous obtenons $\tau^{(2)} = (0, 1, 2, 5, 7)$, 3 est sorti

(iii)$j = 0, k = 1$

$$\tau_4^{(2)}/4 = 5/4 > (\tau_5^{(2)} - 1)/5 = 6/5,$$

$j = 0, k = 2$

$$(\tau_4^{(2)} - 1)/4 = 4/4 \leq (\tau_5^{(2)} - 2)/5 = 5/5,$$

donc $k_0 = 2$.
$j = 1, k = 2$,

$$\tau_2^{(2)}/2 = 1/2 > (\tau_3^{(2)} - 1)/3 = 1/3,$$

$j = 1, k = 3$,

$$(\tau_2^{(2)} - 1)/2 = 0 \leq (\tau_3^{(2)} - 2)/3 = 0,$$

d'où $k_1 = 3$, donc $k = 2, b = 0$,

$$\tau_5^{(3)} = \tau_5^{(2)} - (k - b) = 5, \tau_4^{(3)} = \tau_4^{(2)} - (k - b - 1) = 4,$$

donc après la troisième étape, nous obtenons $\tau^{(3)} = (0, 1, 2, 4, 5)$, 3 est sorti.

(iv)une calculation similaire donne $k_0 = 5, k_1 = 3$, d'où $k = 3, b = 1$ et après la troisième étape, nous obtenons $\tau^{(4)} = (0, 0, 0, 3, 4)$, 5 est sorti.

(v)une calculation similaire donne $k = 4, b = 0$, et après la cinquième étape, nous obtenons $\tau^{(4)} = (0, 0, 0, 0, 0)$, 7 est sorti.

les entiers sortis forme une partition$(1, 3, 3, 5, 7) \in \mathcal{O}_5$.

Remarque 3.11. Généralement, $k_j = j + 1$, comme vu dans $(i) j = 0$, $k = 1$. Mais dans(ii), voyons que $j = 0$, $k_0 = 3$, donc définissons

$$A = \left\{ 0 \leq j < \left\lfloor \frac{l(\tau)}{2} \right\rfloor \middle| \left\lceil \frac{\tau_{n-2j-1}}{n - 2j - 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\tau_{n-2j}}{n - 2j} \right\rceil, r_{n-2j-1} + 1 = r_{n-2j} \right\},$$

dans ce cas, $k_j = r_{n-2j} + j$. Par exemple, pour(ii), $k_0 = r_5 + 0$, où $8 = 5 * 2 - (5 - 3), i.e., r_5 = 3$.

Lemme 3.12. *Pour une partiton d'amphithéâtre $\tau \in \mathcal{L}_n$, posons $\psi(\tau) = (\mu, 2k - 1)$, alors μ est une partiton d'amphithéâtre de longueur n.*

Démonstration. Soit b la position d'extraction,pour montrer que μ_{n-h} et μ_{n-h+1} satisfait la condition de la partition d'amphithéâtre, i.e.,

$$\frac{\mu_{n-h}}{n - h} \leq \frac{\mu_{n-h+1}}{n - h + 1}. \tag{2}$$

après l'extraction, il faut vérifier 5 cas.

Cas 1 : $0 \leq h \leq 2b - 1$, nous savons

$$\frac{\tau_{n-h}}{n - h} \leq \frac{\tau_{n-h+1}}{n - h + 1}$$

et d'après l'algorithme, $\mu_{n-h} = \tau_{n-h} - 1$, d'où (2).
Cas 2 : $h \geq 2b + 3$, c'est le cas trivial car $\mu_{n-h} = \tau_{n-h}$.

Cas 3 : $h = 2b$,comme$\mu_{n-2b+1} = \tau_{n-2b+1} - 1, \mu_{n-2b} = \tau_{n-2b} - (k - b)$, où $(k - b) \geq 1$, donc la condition de la partition d'amphithéâtre est satisfaite.

Cas 4 : $h = 2b + 1$, la condition de la partition d'amphithéâtre est satisfaite grâce à la définition de b.

Cas 5 : $h = 2b + 2$,

(i)Pour $k-b>1$, si $b+1\in A$, alors $k_{b+1}=r_{n-2b-2}+b+1$, ce qui implique que $r_{n-2b-2}+b+1\geq r_{n-2b}+b$ par minimalité de k, donc $r_{n-2b-2}\geq r_{n-2b}-1=r_{n-2b-1}$, mais cela implique que

$$\left\lceil\frac{\tau_{n-2b-2}}{n-2b-2}\right\rceil<\left\lceil\frac{\tau_{n-2b-1}}{n-2b-1}\right\rceil$$

car τ est une partition d'amphithéâtre. Maintenant, $\mu_{n-2b-2}=\tau_{n-2b-2}$ et $\mu_{n-2b-1}=\tau_{n-2b-1}-(k-b-1)$, or notre algorithme garantit que

$$\frac{\tau_{n-2b-1}-(k-b-1)}{n-2b-1}\geq\left\lceil\frac{\tau_{n-2b-1}}{n-2b-1}\right\rceil-1,$$

donc

$$\frac{\mu_{n-2b-2}}{n-2b-2}\leq\frac{\mu_{n-2b-1}}{n-2b-1}.$$

(ii)Pour $k-b>1$, si $b+1\notin A$. D'abord,pour $\tau_{n-2b-2}=0$, c'est fini. Pour $\tau_{n-2b-2}\neq 0$, $k_{b+1}=b+2$, alors $b+2\geq r_{n-2b}+b$, i.e., $r_{n-2b}=2=r_{n-2b-1}+1$, cela revient au raisonnement au-dessus.

(iii)$b=k-1$, comme $\tau_{n-2b-2}=\mu_{n-2b-2}$, $\tau_{n-2b-1}=\tau_{n-2b-1}-(k-b-1)=\mu_{n-2b-1}$, la condition de la partition d'amphithéâtre est satisfaite. □

Lemme 3.13. *Pour $\tau^{(0)}\in\mathcal{L}_n$ tel que $|\tau^{(0)}|\neq 0$, posons*

$$\psi(\tau^{(0)})=(\tau^{(1)},2k-1),\psi(\tau^{(1)})=(\tau^{(2)},2m-1),$$

alors $k\leq m$.

Démonstration. Posons pour $i=0,1$

$$A_i=\left\{0\leq j<\left\lfloor\frac{l(\tau)}{2}\right\rfloor\middle|\left\lceil\frac{\tau^{(i)}_{n-2j-1}}{n-2j-1}\right\rceil=\left\lceil\frac{\tau^{(i)}_{n-2j}}{n-2j}\right\rceil,r^{(i)}_{n-2j-1}+1=r^{(i)}_{n-2j}\right\},$$

$$B_i=\left\{0,1,...,\left\lceil\frac{l(\tau^{(i)})}{2}-1\right\rceil\right\}\bigg\backslash A,$$

Soit $b^{(i)}$ la position d'extraction pour $\tau^{(i)}$. Et selon la définition et la remarque de k, nous avons

$$k^{(i)}=min(\{r^{(i)}_{n-2j}+j|j\in A_i\}\cup\{j+1|j\in B_i\})$$

Par minimalité de $k^{(0)}$, les j tels que $j<b^{(0)}$ appartiennent à A_0 et $r^{(0)}_{n-2j}+j>k^{(0)}\geq b^{(0)}+1$, i.e., $r^{(0)}_{n-2j}>2$. De plus, on a $r^{(1)}_{n-2j}=r^{(0)}_{n-2j}-1$ et $j\in A_1$ pour $j<b$. Comme $r^{(1)}_{n-2j}+j\geq k^{(0)}$, alors $b^{(1)}<b^{(0)}$ implique que $k^{(0)}\leq k^{(1)}$.

Si $b^{(1)}>b^{(0)}$, pour $h\leq n-2b-2$, alors $\tau^{(1)}_h=\tau^{(0)}_h$, ce qui implique que pour $j>b^{(0)}$, $j\in A_1(B_1\quad respectivement)$ si et seulement si $j\in A_0(B_0\quad respectivement)$. Par minimalité de $k^{(0)}$, nous avons $k^{(0)}\leq j+1$ si $j\in B_0$ et $k^{(0)}\leq r^{(0)}_{n-2j}+j$ si $j\in A_0$, donc $k^{(0)}\leq j+1$ si $j\in B_1$ et $k^{(0)}\leq r^{(1)}_{n-2j}+j$ si $j\in A_1$, i.e. , $k^{(0)}\leq k^{(1)}$.

Pour $b^{(1)}=b^{(0)}$. Si $k^{(0)}=r^{(0)}_{n-2b^{(0)}}+b^{(0)}$, alors $b^{(0)}\in A_1$, or $k^{(1)}=r^{(1)}_{n-2b^{(0)}}+b^{(0)}=n-2b^{(0)}+b^{(0)}\geq k^{(0)}$. Sinon,alors $k^{(0)}=b^{(0)}+1=b^{(1)}+1=k^{(1)}$.

En résumé, nous avons toujours $k^{(0)}\leq k^{(1)}$, c'est-à-dire, l'entier extrait cette fois est toujours plus grand que la fois dernière. □

les deux lemmes suivant montrent que $\psi=\phi^{-1}$

Lemme 3.14. *Pour toute* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ...\sigma_l) \in \mathcal{O}_n$ *telle que* $\sigma_1 = 2m - 1$*, alors pour* $k = 1, 2, ..., m$*, nous avons*

$$\psi(\phi(\mu, 2k-1)) = \mu.$$

Démonstration. Posons $\tau = \phi(\mu, 2k-1)$, c la position d'insertion, nous allons montrer que la position d'extraction est aussi c. Notons par r_i le reste de μ_i et $\tilde{r}_i$ le reste de τ_i.

D'après le lemme 3.6, pour $\mu_{n-2j} > 0$, $j = 0, 1, 2, ..., m-2$, nous avons $r_{n-2j} + j \geq m$. Pour $j < c$, $\tau_{n-2j} = \mu_{n-2j} + 1$. Et μ_{n-2j} n'est pas un multiple de $n-2j$. Donc

$$\tilde{r}_{n-2j} + j = r_{n-2j} + j + 1 \geq m + 1 > k, \quad \textit{quand} \quad j < c$$

$$\tilde{r}_{n-2j} + j = r_{n-2j} + j \geq m \geq k, \quad \textit{quand} \quad j > c$$

Le lemme 3.3 nous dit que $j \in A$ si $j \leq k-2$. Combinons ce résultat et le lemme 3.3, nous avons pour $j \neq c$,$k_j \geq k$.

il reste à montrer que $k_c = k$.

Cas 1 : $c < k-1$, i.e.,

$$\frac{\mu_{n-2c-1}}{n-2c-1} = \frac{\mu_{n-2c}}{n-2c},$$

donc $\tilde{r}_{n-2c-1} + 1 = \tilde{r}_{n-2c} = k - c$, alors $c \in A$ et $k_c = c + \tilde{r}_{n-2c} = k$.

Cas 2 : $c = k-1$, alors $\tau_{n-2c-1} = \mu_{n-2c} + 1$, ce qui implique $k_c = k$. □

Lemme 3.15. *Pour* $\tau \in \mathcal{L}_n$*,* $\phi(\psi(\tau)) = \tau$*.*

Démonstration. Soient $(\mu, 2k-1) = \psi(\tau)$ et b la position d'extraction. Nous allons montrer que b est la position d'insertion.

Soit r_h le reste de μ_h et $\tilde{r}_h$ le reste de τ_h, respectivement. Nous avons montré dans lemme 3.13 que $j < b$ implique $j \in A$,

$$\left\lceil \frac{\tau_{n-2j-1}}{n-2j-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\tau_{n-2j}}{n-2j} \right\rceil, \tilde{r}_{n-2j-1} + 1 = \tilde{r}_{n-2j},$$

avec $\tilde{r}_{n-2j} > 2$.

Pour $j < b$, nous avons $r_{n-2j-1} = \tilde{r}_{n-2j} - 1 < n - 2j$, donc il est impossible d'avoir

$$\frac{\mu_{n-2j-1}}{n-2j-1} = \frac{\mu_{n-2j}}{n-2j}.$$

Cas 1 : $b = k-1$, c'est le cas où b est la position d'insertion d'après notre algorithme.

Cas 2 : $b < k-1$, nous avons en fait ici que

$$\frac{\mu_{n-2b-1}}{n-2b-1} = \frac{\mu_{n-2b}}{n-2b}.$$

On peut s'inspirer de la deuxième étape où $j = 0$ ou troisième étape pour comprendre pourquoi cette équation est vraie. Donc b est la position d'insertion d'après notre algorithme.

□

Maintenant, comme Φ et Ψ sont obtenues par itération de ϕ et ψ respectivement, nous avons une bijection entre $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{L}_n$.

4. Généralisation

4.1. **(k,l)-partition d'amphithéâtre.** Pour généraliser le théorème, nous introduisons une séquence $\{a_n^{(k,l)}\}$ qui satisfait

$$a_{2i}^{(k,l)} = la_{2i-1}^{(k,l)} - a_{2i-2}^{(k,l)},$$

$$a_{2i+1}^{(k,l)} = ka_{2i}^{(k,l)} - a_{2i-1}^{(k,l)},$$

avec $a_0^{(k,l)} = 0$, $a_1^{(k,l)} = 1$.

Définissons $L_n^{(k,l)} = \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \middle| \frac{\lambda_1}{a_n^{(k,l)}} \geq \frac{\lambda_2}{a_{n-1}^{(k,l)}} \geq ... \geq \frac{\lambda_n}{a_1^{(k,l)}} \geq 0 \right\}$.

Remarque 4.1. Si $k = l = 2$, alors on a

$$a_{2i}^{(k,l)} = 2a_{2i-1}^{(k,l)} - a_{2i-2}^{(k,l)},$$

équivalent à

$$a_{2i}^{(k,l)} - a_{2i-1}^{(k,l)} = a_{2i-1}^{(k,l)} - a_{2i-2}^{(k,l)},$$

ce qui implique que

$$a_n^{(k,l)} = n, n \in \mathbb{N}$$

Cela revient au cas simple de la partition d'amphithéâtre.

Exemple 4.2. $k = 1, l = 5$, par calculation nous obtenons

$$a^{(1,5)} = (a_0^{(1,5)}, a_1^{(1,5)}, a_2^{(1,5)}, ...) = (0, 1, 5, 4, 15, 11, 40, 29, 105, 76, 275, ...),$$

Si nous posons la condition initiale de la suite fibonacci comme

$$f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2,$$

alors nous pouvons voir que $a_{2n}^{(1,5)} = 5 * f_{2n-1}$ et $a_{2n+1}^{(1,5)} = f_{2n+1} + f_{2n-1}$ pour $n \geq 1$

de même,

$$a^{(5,1)} = \left(a_0^{(5,1)}, a_1^{(5,1)}, a_2^{(5,1)}, ...\right) = (0, 1, 1, 4, 3, 11, 8, 29, 21, ...),$$

$a_{2n}^{(5,1)} = f_{2n-1}$ et $a_{2n+1}^{(5,1)} = f_{2n+1} + f_{2n-1}$ pour $n \geq 1$.

Grâce aux Mireille Bousquet-Mélou et Kimmo Eriksson[4], nous avons le théorème suivant.

Théorème 2

$$G_n^{(k,l)}(q) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - q^{a_i^{(k,l)} + a_{i-1}^{(l,k)}}}, \quad n = 2m$$

$$G_n^{(k,l)}(q) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - q^{a_i^{(l,k)} + a_{i-1}^{(k,l)}}}, \quad n = 2m + 1$$

nous admettons ce théorème sans le prouver.

Exemple 4.3. $k=1, l=4$

par calculation,nous obtenons

$$a_{2i+1}^{(1,4)}=2i+1, a_{2i}^{(1,4)}=4i;$$

$$a_{2i+1}^{(4,1)}=2i+1, a_{2i}^{(4,1)}=i;$$

ce qui implique que

$$G_{2k}^{(1,4)}(q)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{\left(1-q^{a_{2i+1}^{(1,4)}+a_{2i}^{(4,1)}}\right)\left(1-q^{a_{2i+2}^{(1,4)}+a_{2i+1}^{(4,1)}}\right)}=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(1-q^{3i+1})(1-q^{6i+5})}.$$

Maintenant, d'après le théorème 4.3, $G_{2k}^{(1,4)}(q)$ est la fonction génératrice de

$$\mathcal{L}_{2k}^{(1,4)}=\left\{(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{2k})\middle|\frac{\lambda_1}{4k}\geq\frac{\lambda_2}{2k-1}\geq\frac{\lambda_3}{4(k-1)}\geq\cdots\geq\frac{\lambda_{2k}}{1}\geq 0\right\}$$

avec

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}^{(1,4)}}{a_{2k-1}^{(1,4)}}=\lim_{k\to\infty}\frac{4k}{2k-1}=2,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k+1}^{(1,4)}}{a_{2k}^{(1,4)}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{4k}=1/2,$$

donc pour la condition$\frac{\lambda_1}{2}>\frac{\lambda_2}{1}>\frac{\lambda_3}{2}>\frac{\lambda_4}{1}>...$

la fonction génératrice est

$$\lim_{k\to\infty}G_{2k}^{(1,4)}(q)=\frac{1}{(q;q^3)_\infty(q^5;q^6)_\infty}.$$

Exemple 4.4. On reprend l'exemple pour $k=1, l=5$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}^{(1,5)}}{a_{2k-1}^{(1,5)}}=\lim_{k\to\infty}\frac{5f_{2k-1}}{f_{2k-1}+f_{2k-3}},$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k+1}^{(1,5)}}{a_{2k}^{(1,5)}}=\lim_{k\to\infty}\frac{f_{2k+1}+f_{2k-1}}{5f_{2k-1}},$$

Nous obtenons que

$$G_{2k}^{(1,5)}(q)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{\left(1-q^{a_{2i+1}^{(1,5)}+a_{2i}^{(5,1)}}\right)\left(1-q^{a_{2i+2}^{(1,5)}+a_{2i+1}^{(5,1)}}\right)}=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(1-q^{f_{2i+1}+2f_{2i-1}})(1-q^{6f_{2i+1}+f_{2i-1}})}.$$

Or on sait que pour la suite Fibonacci,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

ce qui implique que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

ainsi

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}^{(1,5)}}{a_{2k-1}^{(1,5)}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a^{(1,5)}_{2k+1}}{a^{(1,5)}_{2k}}=\frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

le résultat n'est pas aussi joli que l'exemple précédent.

4.2. **points de réseau.** Un autre point de vue par permutations et points de réseau.

Considérons la partition d'amphithéâtre $\mathcal{L}_n$ avec la partie la plus grande $\leq k$, écrivons $k = tn + i$ par la division euclidienne, Sylvie Corteel et Sunyoung Lee ont prouvé que

Théorème 4.5. *(Corteel, Lee, S*[11]*).*

$$|\{\lambda\in\mathcal{L}_n\,|\lambda_n\leq tn+i\}|=(t+1)^{n-i}(t+2)^i$$

En particulier,pour $i = 0$, on a

$$|\{\lambda\in\mathcal{L}_n\,|\lambda_n/n\leq t\}|=(t+1)^n,$$

et nous pouvons voir que

$$\mathcal{L}_n=\cup_{t\geq 0}\{\lambda\in\mathcal{L}_n|t-1<\lambda_n/n\leq t\},$$

et Schuster a prouvé que

Théorème 4.6.

$$\sum_{\lambda\in\{\lambda\in\mathcal{L}_n|\lambda_n/n\leq t\}}u^{|\lceil\lambda\rceil|}=([t+1]_u)^n,$$

où $\lceil\lambda\rceil=(\lceil\lambda_1/1\rceil,\lceil\lambda_2/2\rceil,...,\lceil\lambda_n/n\rceil)$, $[t+1]_u=\frac{1-u^{t+1}}{1-u}$.

On peut déduit que

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{L}_n}x^{\lceil\lambda_n/n\rceil}u^{|\lceil\lambda\rceil|}=\sum_{t\geq 0}(([t+1]_u)^n-([t]_u)^n)x^t=(1-x)\sum_{t\geq 0}([t+1]_u)^n x^t.$$

Maintenant, nous avons besoins du polynôme Eulerien E(x), défini par

$$\sum_{t\geq 0}(t+1)^n x^t=\frac{E_n(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

ou par

$$E_n(x)=\sum_{\pi\in S_n}x^{des(\pi)},$$

où S_n est l'ensemble des permutations de $\{1,2,...,n\}$, $D(\pi)=\{1\leq i\leq n|\pi_i>\pi_{i+1}\}$, $des(\pi)=card(D(\pi))$, $maj\ \pi=\sum_{i\in D(\pi)}i$, il y a plus de détails sur le polynôme Eulerien dans l'appendice.

Avec le théorème suivant,

Théorème 4.7. *(MacMahon)*

$$\sum_{t\geq 0}([t+1]_u)^n x^t=\frac{\sum_{\pi\in S_n}x^{des(\pi)}u^{maj\pi}}{\prod_{i=0}^n(1-xu^i)}.$$

le théorème 4.7 et le théorème 4.8 impliquent que

Théorème 4.8. *(S,Schuster*[12]*)*

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{L}_n}x^{\lceil\lambda_n/n\rceil}u^{|\lceil\lambda\rceil|}=\frac{\sum_{\pi\in S_n}x^{des(\pi)}u^{maj\pi}}{\prod_{i=1}^n(1-xu^i)}.$$

Définition 4.9. Pour une suite $s = (s_1, ..., s_n)$ des entiers positifs, le cône s-amphithéâtre est défini comme

$$C_n^{(s)} = \{\lambda \in \mathbb{R}^n | 0 \leq \frac{\lambda_1}{s_1} \leq \frac{\lambda_2}{s_2} \leq ... \leq \frac{\lambda_n}{s_n}\},$$

alors $\mathcal{L}_n^{(s)} = C_n^{(s)} \cap \mathbb{Z}^n$.

la fonction génératrice pour $C_n^{(s)}$ est

$$F_n^{(s)}(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}_n^{(s)}} z^\lambda,$$

où $z^\lambda = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_n^{\lambda_n}$.

Rappelons ce que nous avons fait dans la première démonstration pour construire une application de la partition d' amphithéâtre à la partition réduite, maintenant nous faisons des choses similaires.

Posons $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ avec $v_i = (0, 0, ..., 0, s_i, s_{i+1}, ..., s_n)$(dans la première démonstration, $v_i = (0, 0, ..., i, i+1, ..., n))$, alors

$$C_n^{(s)} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i | 0 \leq \alpha_i \right\},$$

et le parallélépipède associé est

$$\Pi_n^{(s)} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i | 0 \leq \alpha_i < 1 \right\},$$

donc, énumérer les partitions de s-amphithéâtre est en fait énumérer les points dans $\Pi_n^{(s)}$.

Théorème 3

$$F_n^{(s)}(z) = \frac{\sum_{\lambda \in \Pi_n^{(s)} \cap \mathbb{Z}^n} z^\lambda}{\prod_{i=1}^n (1 - z^{v_i})}.$$

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathcal{L}_n^{(s)} = C_n^{(s)} \cap \mathbb{Z}^n$, λ peut s'écrire sous la forme

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \lfloor \alpha_i \rfloor v_i + \sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} v_i,$$

donc (comme dans la proposition 2.8)

$$\begin{aligned} F_n^{(s)}(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}_n^{(s)}} z^\lambda &= \left(\sum_{(\lfloor \alpha_1 \rfloor, ..., \lfloor \alpha_n \rfloor) \in \mathcal{N}^n} z^{\sum_{i=1}^n \lfloor \alpha_i \rfloor v_i} \right) \left(\sum z^{\sum_{i=1}^n \{\alpha_i\} v_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{(\lfloor \alpha_1 \rfloor, ..., \lfloor \alpha_n \rfloor) \in \mathcal{N}^n} (z^{v_i})^{\lfloor \alpha_i \rfloor} \left(\sum_{\lambda \in \Pi_n^{(s)} \cap \mathbb{Z}^n} z^\lambda \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - z^{v_i}} \left(\sum_{\lambda \in \Pi_n^{(s)} \cap \mathbb{Z}^n} z^\lambda \right). \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 4.10. Posons $s = (2, 4)$, alors $v_1 = (2, 4), v_2 = (0, 4)$

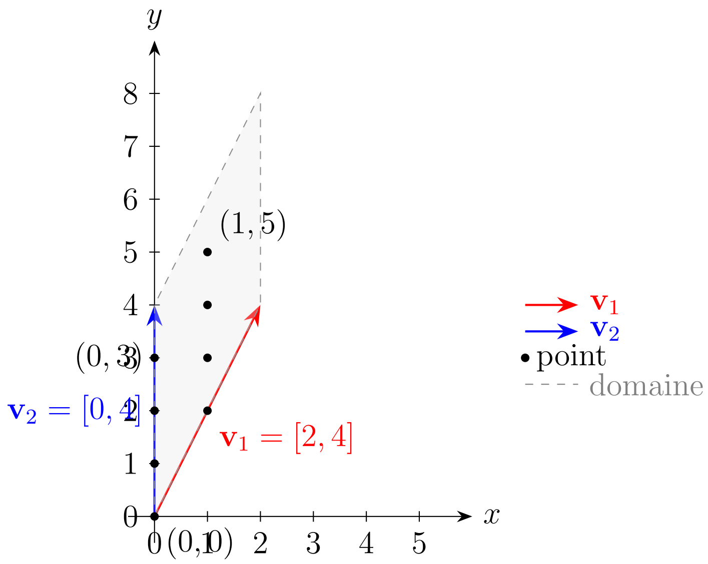
$$\Pi_2^{(s)} \cap \mathbb{Z}^2 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\},$$

donc

$$F_2^{(2,4)} = \frac{1 + z_2 + z_2^2 + z_2^3 + z_1z_2^2 + z_1z_2^3 + z_1z_2^4 + z_1z_2^5}{(1 - z_1^2z_2^4)(1 - z_2^4)} = \frac{1 + z_1z_2^2}{(1 - z_1^2z_2^4)(1 - z_2)},$$

en posant $q = z_1 = z_2$, on obtient

$$\mathcal{L}_2^{(2,4)}(q) = \frac{1 + q^3}{(1 - q)(1 - q^6)}.$$



Exemple 4.11. Posons $s = (1, 2)$, alors $v_1 = (1, 2), v_2 = (0, 2)$, c'est le cas de la partition d'amphithéâtre

$$\mathcal{L}_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) : 0 \le \frac{\lambda_1}{1} \le \frac{\lambda_2}{2}\}.$$

Et

$$\Pi_2^{(s)} \cap \mathbb{Z}^2 = \{(0,0),(0,1)\},$$

la fonction génératrice est

$$F_2^{(1,2)} = \frac{1}{(1 - z_1z_2^2)(1 - z_2)},$$

$$\mathcal{L}_2^{(1,2)}(q) = \frac{1}{(1 - q^3)(1 - q)},$$

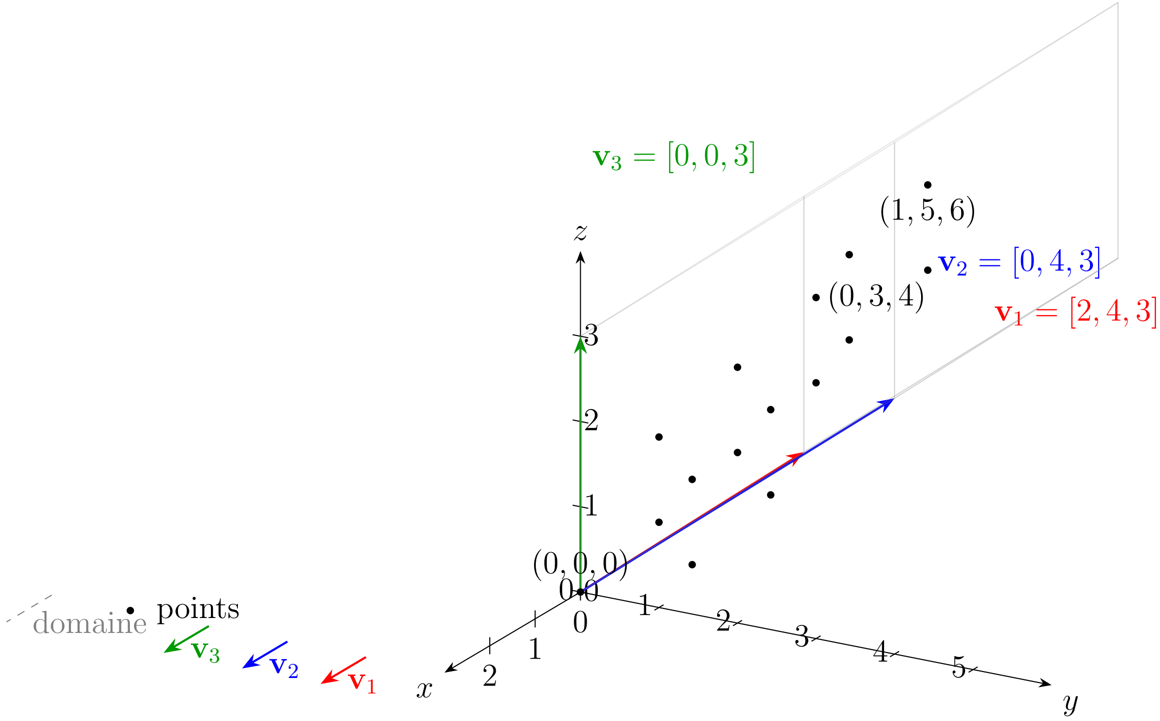
c'est exactement le théorème 1

Exemple 4.12. Posons $s = (2, 4, 3)$, alors $v_1 = (2, 4, 3), v_2 = (0, 4, 3), v_3 = (0, 0, 3)$

$$\Pi_3^{(s)} \cap \mathbb{Z}^3 = \{(0,0,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,2,2),(0,2,3),(0,3,3),(0,3,4),(1,2,1),(1,2,2)$$
$$,(1,3,2),(1,3,3),(1,4,4),(1,4,5),(1,5,5),(1,5,6)\},$$

donc la fonction génératrice est

$$F_3^{(2,4,3)}(z) = \frac{\sum_{(a,b,c)\in\Pi_3^{(s)}\cap\mathbb{Z}^3} z_1^a z_2^b z_3^c}{(1 - z_1^2z_2^4z_3^3)(1 - z_2^4z_3^3)(1 - z_3^3)}.$$



5. Conclusion et remerciements

Durant ce TIPE, sous la direction du professeur Jiang Zeng, j'ai acquis des connaissances fondamentales sur les partitions et me suis particulièrement intéressé à un type spécifique : les partitions d'amphithéâtre.

Mon étude s'est articulée autour de deux démonstrations distinctes :

La première approche, développée par M. Bousquet-Mélou et K. Eriksson,

La seconde méthode, proposée par A.J. Yee,

Cette analyse comparative m'a permis d'appréhender en profondeur les propriétés de ces partitions.

Par ailleurs, j'ai exploré une généralisation des partitions d'amphithéâtre à l'aide d'une suite s arbitraire, en adoptant une perspective géométrique basée sur l'étude des points du réseau.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à professeur Jiang Zeng pour son enseignement patient et son guidage précieux, ainsi qu'à professeur Laurent Bétermin et Guillaume Aubrun pour l'opportunité qu'ils m'ont offerte.

J'espère que mes compétences linguistiques limitées n'affectent pas votre compréhension du problème.

6. Appendice

6.1. Connaissances préliminaires de combinatoriques.

Définition 6.1. (nombre de Stirling de seconde espèce)une partition de l'ensemble [n] est une collection des blocs nonvides tel que chaque element de [n] appartient à exactement un bloc. Le nombre de telles partitions est dit le nombre de Stirling de seconde espèce, noté S(n,k).

convention : $S(0,0) = 1, S(n,k) = 0$ si $n \leq k$, S(n,0)=0 si $n \geq 0$.

Exemple 6.2. $S(n,1) = S(n,n) = 1, S(n,n-1) = \binom{n}{2}$.

Théorème 6.3. *(une formule recursive)*
$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Démonstration. Considérons un élément particulier "n". Si cet élément forme un bloc singleton, alors les autres $(n-1)$ éléments forment $(k-1)$ blocs, c'est $S(n-1,k-1)$. Sinon, les autres $(n-1)$ éléments forment k blocs, et je dois ajouter "n" dans un de ces blocs, il y a k possibilités, c'est pourquoi $kS(n-1,k)$ existe. □

Si nous voulons mettre n boules différentes dans k boîtes différentes,alors il y a $k!S(n,k)$ façons. En effet, nous pouvons d'abord séparer ces n boules dans k boîtes comme ci-dessus, et puis labelliser ces k boîtes($k!$ possibilités). Donc nous obtenons une corollaire :

Corollaire 6.4. *le nombre des applications surjectives $f : [n] \to [k]$ est $k!S(n,k)$.*

Corollaire 6.5. *Pour tout x reels, n entier positif, nous avons*
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k, (x)_k = \frac{x!}{(x-k)!}.$$

Démonstration. x^n et $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k$ sont tous les deux polynômes de degrés n, donc si nous pouvons prouver qu'ils sont égaux pour $n+1$ entiers ou plus, alors ces deux polynômes sont identiques.

Soit x un entier positif, x^n est le nombre de fonctions de $[n]$ à $[x]$. De l'autre côté, $S(n,k)(x)_k = k!S(n,k)\binom{x}{k}$, c'est le nombre des fonctions de $[n]$ à un sous-ensemble de [n] de taille k. Donc après la sommation, les deux côtés sont égaux pour tout entier positif, ce qui entraîne l'égalité de deux polynômes. □

Définition 6.6. Soient $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ des entiers tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$. Alors la suite monotone $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ est appelée une partition de n. Le nombre de partitions de n est noté $p(n)$, le nombre de partitions de n en k parties est noté $p_k(n)$

Exemple 6.7. 4 a 5 partitions :$(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)$, donc $p(4) = 5, p_2(4) = 2$

Définition 6.8. (diagramme de ferrers) une partition $p = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ est un ensemble de carrés tel qu'il y a x_i carrés pour la ième ligne. Si on transpose l'image par rapport à la diagonale,on obtient sa conjuguée.

Théorème 6.9. *Le nombre de partitions de n en au plus k parties est égal au nombre de partitions de n tel que chaque partie est inférieure à k.*

Démonstration. En prenant la conjuguée,on peut construire une bijection entre ces deux partitions. □

Exemple 6.10. Si on prend $n = 5, k = 2$ et $n = 17, k = 4$

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \end{array}, \qquad \begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Théorème 6.11. *(principe d'inclusion-exclusion)*

Soit $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des ensembles finis. Alors
$$card(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i_1, i_2, \cdots i_j} (-1)^{j-1} card(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}),$$
où $i_1, i_2, \cdots, i_j$ parcourt tous les j-element sous-ensembles de [n].

Démonstration. Montrons que pour chaque $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, x est compté une fois dans le côté droite. Supposons que $x \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_s}$, c'est-à-dire l'intersection $A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_t}$ ne peut pas contenir x sauf que $(k_1, k_2, \cdots, k_t) \in (i_1, i_2, \cdots, i_s)$.

Donc à droite, x est compté
$$s - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - \cdots + (-1)^{s-1}\binom{s}{s} = 1$$
fois. l'égalité ci-dessus est une transformation de $(1-1)^s = 0$. □

Exemple 6.12. (relations récursives et fonctions génératrices) On commence par des exemple : $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, et posons $a_0 = 0, a_1 = 1$, nous cherchons une formule pour a_n.

Soit $G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, donc nous avons
$$\sum_{n \geq 0} a_{n+2} x^{n+2} = 3 \sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{n+2} - 2 \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+2},$$
ce qui entraine que
$$G(x) - x = 3xG(x) - 2x^2 G(x),$$
ainsi
$$G(x) = \frac{x}{1 - 3x + 2x^2} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = -\sum_{n \geq 0} x^n + \sum_{n \geq 0} (2x)^n,$$
Donc $a_n = 2^n - 1$.

6.2. **Connaissances préliminaires des q-séries.**

Théorème 6.13. *Pour $|t| < 1$,$|q| < 1$, nous avons*
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})t^n}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - atq^n}{1 - tq^n}.$$
Pour simplifier l'écriture, nous utilisons les notations suivantes

$$(a)_n = (a;q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}), \quad avec \quad (a)_0 = 1,$$

$$(a)_\infty = (a;q)_\infty = \lim_{n\to\infty}(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}),$$

donc l'équation est

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n t^n}{(q)_n} = \frac{(at)_\infty}{(t)_\infty}.$$

Démonstration. Posons

$$F(t) = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-atq^n}{1-tq^n} = \sum_{n=0}^{\infty}A_n t^n,$$

Donc

$$(1-t)F(t) = (1-at)\prod_{n=1}^{infty}\frac{1-atq^n}{1-tq^n} = (1-at)\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-atq^{n+1}}{1-tq^{n+1}} = (1-at)F(tq),$$

c'est équivalent à

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}A_n t^n = (1-at)\sum_{n=0}^{\infty}A_n t^n q^n.$$

En comparant les coefficients des t^n, nous avons

$$A_n - A_{n-1} = q^n A_n - aq^{n-1}A_{n-1},$$

ce qui implique que

$$A_n = \frac{1-aq^{n-1}}{1-q^n}A_{n-1} = \cdots = \frac{(1-aq^{n-1})\cdots(1-a)}{(1-q^n)\cdots(1-q)}A_0 = \frac{(a)_n}{(q)_n}.$$

□

Corollaire 6.14. *Pour* $|t|<1, |q|<1$,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty}(1-tq^n)^{-1},$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty}(1+tq^n).$$

Démonstration. Pour la première équation, posons $a=0$ dans le théorème 6.13.

Pour la seconde équation, en remplaçant a par a/b et t par bz dans le théorème 6.13, nous obtenons

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(b-a)(b-aq)\cdots(b-aq^{n-1})z^n}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-azq^n}{1-bzq^n},$$

et puis posons $a=0$, $b=-1$, nous aurons l'équation voulue. □

Nous pouvons les écrire comme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(q)_n} = \frac{1}{(t;q)_\infty},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q)_n} = (-t;q)_\infty.$$

Corollaire 6.15. *(Heine) Pour* $|q| < 1, |t| < 1, |b| < 1$, *nous avons*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n t^n}{(q)_n (c)_n} = \frac{(b)_\infty (at)_\infty}{(c)_\infty (t)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b)_m (t)_m b^m}{(q)_m (at)_m}.$$

Démonstration. On sait que $(b)_n = (1-b)(1-bq)\cdots(1-bq^{n-1})$, alors

$$(b)_n = \frac{(b)_\infty}{(bq^n)_\infty},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n t^n}{(q)_n (c)_n} = \frac{(b)_\infty}{(c)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n t^n}{(q)_n} \frac{(cq^n)_\infty}{(bq^n)_\infty}$$

d'après le théorème 6.13, en posant $t = bq$, $a = c/b$, on a

$$\frac{(cq^n)_\infty}{(bq^n)_\infty} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b)_m b^m q^{nm}}{(q)_m},$$

donc on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n t^n}{(q)_n (c)_n} = \frac{(b)_\infty}{(c)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_n t^n}{(q)_n} \frac{(c/b)_m b^m q^{nm}}{(q)_m},$$

de même, par théorème 6.13

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (tq^m)^n}{(q)_n} = \frac{(atq^m)_\infty}{(tq^m)_\infty} = \frac{(at)_\infty}{(at)_m} \frac{(t)_m}{(t)_\infty},$$

donc on a finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n t^n}{(q)_n (c)_n} = \frac{(b)_\infty (at)_\infty}{(c)_\infty (t)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b)_m (t)_m b^m}{(q)_m (at)_m}.$$

□

Théorème 6.16. *Pour* $z \neq 0$, $|q| < 1$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + zq^{2n+1})(1 + z^{-1} q^{2n+1}).$$

Démonstration. Pour $z > |q|$, $|q| < 1$, d'après la corollaire 6.14, en posant $t = zq, q = q^2$, on a

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m q^{m^2}}{(q^2; q^2)_m} = \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} z^m q^{m^2} (q^{2m+2}; q^2)_\infty$$
$$= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m q^{m^2} (q^{2m+2}; q^2)_\infty.$$

Or appliquons corollaire 6.14 en posant $t = q^{2m+2}$, $q = q^2$, nous avons

$$(q^{2m+2}; q^2)_\infty = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r q^{2mr+2r} q^{r(r-1)}}{(q^2; q^2)_r},$$

donc

$$\frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m q^{m^2} (q^{2m+2}; q^2)_\infty = \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{-r} q^r}{(q^2; q^2)_r} q^{(m+r)^2} z^{m+r},$$

d'après la corollaire 6.14,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-q/z)^r}{(q^2;q^2)_r} = \frac{1}{(-q/z;q^2)_\infty},$$

Donc le résultat final est

$$\frac{1}{(-q/z;q^2)_\infty (q^2;q^2)_\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m q^{m^2}.$$

C'est équivalent à ce que nous voulons montrer. $\square$

Remarque 6.17. Si on remplace q par $q^{3/2}$ et pose $a = -q^{1/2}$, alors on a

$$(q;q)_\infty = (q;q^3)_\infty (q^2;q^3)_\infty (q^3;q^3)_\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{(3k^2-k)/2}.$$

Il y a d'autres preuves de cette égalité, mais il faut des connaissances supplémentaires, par exemple la fonction theta

$$\Theta(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}, \quad im(\tau) > 0$$

ou la noyau de chaleur

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x},$$

Si c'est intéressant pour vous, veuillez trouver un livre de l'analyse de Fourier ou de l'analyse complexe.

6.3. **Polynôme eulerien.** Pour $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in S_n$, i est une descente de w si $w_i > w_{i+1}$, définissons

$$D(w) = \{i | w_i > w_{i+1}\}, \quad des(w) = card(D(w)).$$

Posons

$$A_d(x) = \sum_{w \in S_d} x^{1+des(w)} = \sum_{k=1}^{d} A(d,k) x^k,$$

alors $A(d,k)$ est le nombre de permutations $w \in S_d$ avec $k-1$ descentes.

Exemple 6.18. $A_3(x) = x + 4x^2 + x^3$, car la permutation avec 0 descentes est (123), les permutations avec 1 descentes sont $\{(132),(213),(231),(312)\}$, et la permutation avec 2 descentes est (321).

Supposons que

$$w = (a_1, a_2, ..., a_{i_1})(a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, ..., a_{i_2}) \cdots (a_{i_{k-1}+1}, ..., a_d)$$

avec $a_1, a_{i_1+1}, ..., a_{i_{k-1}+1}$ les éléments les plus grands dans les cycles, et $a_1 < a_{i_1+1} < \cdots < a_{i_{k-1}+1}$, cela implique que si $w(a_i) \neq a_{i+1}$, alors $a_i < a_{i+1}$. Donc $a_i < a_{i+1}$ ou $i = d$ si et seulement si $w(a_i) \geq a_i$. Par suite on a

$$d - des(\hat{w}) = card\{1 \leq i \leq d | w(i) \geq i\},$$

où $\hat{w} = (a_1, a_2, ..., a_{i_1}, a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, ..., a_{i_2} \cdots, a_{i_{k-1}+1}, ..., a_d)$ pour

$$w = (a_1, a_2, ..., a_{i_1})(a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, ..., a_{i_2}) \cdots (a_{i_{k-1}+1}, ..., a_d).$$

Exemple 6.19. pour $w = (21)(634)(75)$, $\hat{w} = (2163475)$.

Proposition 6.20. *Pour tout $d \geq 0$, on a*

$$\sum_{m\geq 0} m^d x^m = \frac{A_d(x)}{(1-x)^{d+1}}.$$

Démonstration. Montrons par récurrence en d.

(i) pour d=0, c'est vrai.

(ii) supposons que l'équation est vraie pour $d \geq 0$. Dériver l'équation par rapport à x, on a

$$\sum_{m\geq 0} m^{d+1} x^m = \frac{x(1-x)A_d'(x) + (d+1)xA_d(x)}{(1+x)^{d+2}},$$

donc il suffit de montrer que

$$A_{d+1}(x) = x(1-x)A_d'(x) + (d+1)xA_d(x),$$

en comparant les coefficients des x^n, c'est équivalent à

$$A(d+1,k) = kA(d,k) + (d-k+2)A(d,k-1) \quad (*)$$

D'un côté, $A(d+1,k)$ est le nombre de permutations dans S_{d+1} avec $k-1$ descentes, de l'autre côté, on peut obtenir une telle permutation par

(1) choisir une permutation $w = w_1 w_2 \cdots w_d$ avec $k-1$ descentes, et ajouter $d+1$ après w_i si $i \in D(w)$ ou à la fin, donc il y a $kA(d,k)$ permutations.

(2) choisir une permutation $w = w_1 w_2 \cdots w_d$ avec $k-2$ descentes, et ajouter $d+1$ après w_i si $i \notin D(w)$ ou au début, donc il y en a $(d-k+2)A(d,k-1)$.

d'après (1) et (2),on a prouvé (*). □

Références

[1] G.E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, MA, 1976.

[2] Alladi,K., Garvan,F, *Partitions, q-Series,and Modular Forms*, Developments in Mathematics, 23.Springer

[3] M. Bousquet-Mélou, K. Eriksson, "Lecture hall partitions", *The Ramanujan J.1*,101-111, 1997.

[4] M. Bousquet-Mélou, K. Eriksson, "Lecture hall partitions II", *The Ramanujan J.1*, 165-185, 1997.

[5] A.J. Yee, "On combinatorics of lecture hall partitions", *The Ramanujan J. 5* (2001) 247–262.

[6] Carla D.Savage, "The mathematics of lecture hall partitions",*Journal of Combinatorial Theory,Series A 144*(2016) 443–475

[7] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics,Volume 1*,Cambridge University Press

[8] Ezra Miller, Victor Reiner, Bernd Sturmfels (Eds.), *Geometric Combinatorics*, IAS/Park City Mathematics Series, vol.13, American Mathematical Society/Institute for Advanced Study (IAS), Providence, RI/Princeton, NJ, 2007, Lectures from the Graduate Summer School held in Park City, UT, 2004.

[9] L.Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1748, *Introduction to Analysis of the Infinite*, Springer-Verlag New York (1988)

[10] G.E. Andrews, K. Eriksson, *integer partitions*, Cambridge University Press(2004)

[11] Sylvie Corteel, Sunyoung Lee, Carla D. Savage, *Enumeration of sequences constrained by the ratio of consecutive parts*, Sém. Lothar. Combin. 54A :Art. B54Aa (2005/07) 12.

[12] Carla D. Savage, Michael J. Schuster, *Ehrhart series of lecture hall polytopes and Eulerian polynomials for inversion sequences*, J. Combin. Theory Ser. A 119(4) (2012) 850–870.