

La dimension de Minkowski-Bouligand du graphe de Weierstrass

Jérémie GOURION

Sous la direction de Vincent BORRELLI

6 juillet 2023

Table des matières

1	Introduction	2
2	Un peu de théorie de la mesure	3
2.1	Le paradoxe de Banach-Tarski	3
2.2	La tribu Borélienne	3
3	Dimension de Minkowski-Bouligand	5
3.1	Définition de cette dimension	5
3.2	Exemples	5
3.3	Définition équivalente de la dimension de Minkowski-Bouligand	6
4	Dimension de l'ensemble de Cantor	8
4.1	Construction de l'ensemble de Cantor	8
4.2	L'ensemble de Cantor est non vide	8
4.3	Calcul de la dimension de Minkowski-Bouligand de l'ensemble de Cantor	9
5	Dimension de Minkowski-Bouligand pour des courbes simples	10
5.1	Symétrisation de Steiner	10
5.2	Dimension par croix	11
6	Dimension de Minkowski-Bouligand des Graphes	13
6.1	Oscillation et Variation	13
6.2	Variation et dimension de Minkowski-Bouligand	13
7	Graphe de Fonctions Holderiennes	16
8	La Fonction de Weierstrass	17
8.1	Définition	17
8.2	Dimension de Minkowski-Bouligand du graphe de la fonction de Weierstrass	17

1 Introduction

Le but de ce TIPE est de calculer la dimension de Minkowski-Bouligand du graphe de la fonction de Weierstrass, en s'appuyant sur la preuve de C. Tricot donnée dans l'ouvrage "Courbes et dimension fractale" [1].

L'objectif a été atteint, à ceci près que j'ai modifié la rédaction de certaines démonstrations, quitte à parfois proposer des approches alternatives à l'ouvrage, car je n'ai pas eu l'intuition nécessaire pour pleinement comprendre certains arguments affirmés sans justification par l'auteur. Je me suis donc également appuyé sur un ouvrage de K. Falconer [2]. Toute erreur m'est donc directement imputable.

Tous les résultats ne relevant pas de la géométrie fractionnaire seront admis, en particulier les théorèmes relatifs à la théorie de la mesure, à la topologie, à la symétrisation de Steiner, ainsi que le théorème de Jordan. Cependant, tous ces résultats ne faisant pas partie du programme de L2, ils seront rappelés au fur et à mesure que le besoin de leur utilisation se fera sentir. Il y aura dans la section Bibliographie des références sur lesquelles je me suis appuyé pour la compréhension de ces notions, avec bien souvent des démonstrations.

Ce travail a été réalisé avec la précieuse aide de V. Borrelli, dans le cadre de la L2 de mathématiques à l'université Lyon 1.

2 Un peu de théorie de la mesure

Le but de cette section est de rappeler des résultats relatifs à la théorie de la mesure, utiles pour la suite, sans les démontrer. Un livre plus complet sur la théorie de la mesure, avec démonstrations, [3]. On retrouve aussi [4] sur Youtube.

2.1 Le paradoxe de Banach-Tarski

Pour répondre à la question "Qu'est ce que mesurer?" on voudrait définir une mesure \mathcal{M} raisonnable sur \mathbb{R}^n , qui va des parties de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}_+ et qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathcal{M}(\emptyset) = 0$
- $\mathcal{M}([0, 1]^n) = 1$
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de parties de \mathbb{R}^n deux à deux disjointes :

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(A_n)$$

- \mathcal{M} est invariante par isométrie.

Proposition 2.1. *Une telle mesure \mathcal{M} n'existe pas.*

Ceci est dû au paradoxe de Banach-Tarski, parfois aussi appelé paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski.

Proposition 2.2 (Paradoxe de Banach-Tarski). *Considérons une boule de rayon 1. Alors on peut partitionner cette boule de sorte qu'en réarrangeant les morceaux (en leur faisant subir une transformation isométrique), on obtient une boule de rayon 2.*

Pour plus d'informations sur le paradoxe de Banach-Tarski, le lecteur peut consulter le livre [5] ou sur Youtube [6].

2.2 La tribu Borélienne

Ce paradoxe nous oblige à considérer une mesure non pas sur \mathbb{R}^n tout entier, mais sur ce que l'on va appeler une **tribu** de \mathbb{R}^n .

Définition 2.3 (Tribu). *Soit T une famille non vide de parties de \mathbb{R}^n . On dit que T est une tribu si elle est stable par union dénombrable et par complémentaire.*

Remarque 2.4. \mathbb{R}^n muni d'une tribu T est un *espace mesurable*, et si l'on introduit une mesure \mathcal{M} il s'agit d'un *espace mesuré*.

Définition 2.5 (Tribu engendrée). *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. On appelle tribu engendrée par X la plus petite tribu contenant X*

Définition 2.6 (Tribu Borélienne). *La tribu Borélienne est la tribu engendrée par tous les ouverts de \mathbb{R}^n .*

Remarque 2.7. Un élément de la tribu Borélienne est appelé un *borélien*, et une mesure est dite *borélienne* lorsqu'elle est positive et définie sur la tribu Borélienne.

Proposition 2.8 (Existence et unicité de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}). *Il existe une unique mesure borélienne λ sur \mathbb{R} telle que $\lambda([a, b]) = b - a$ pour tout segment $[a, b]$.*

Définition 2.9 (Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}). *λ est appelée la mesure de Lebesgue.*

Définition 2.10 (Tribu Produit). *Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) des espaces mesurables. On pose $E = E_1 \times E_2$. On appelle tribu produit sur E la tribu engendrée par $T_1 \times T_2$. Cette tribu est notée $T_1 \otimes T_2$.*

Proposition 2.11 (Mesure produit). *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés. Posons $E = E_1 \times E_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$. Alors il existe une unique mesure m sur T vérifiant*

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2), \forall (A_1, A_2) \in T_1 \times T_2, m_i(T_i) < \infty, i = 1, 2$$

On note $m = m_1 \otimes m_2$

Définition 2.12 (Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n). *On définit la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n comme la mesure produit des mesures de Lebesgue sur \mathbb{R} : $\lambda \otimes \lambda \otimes \dots \otimes \lambda$ avec n facteurs.*

Proposition 2.13 (Mesure d'une intersection décroissante). *Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion) d'éléments de la tribu Borélienne, et si $\exists p \in \mathbb{N}, \lambda(A_p) < +\infty$ alors*

$$\lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$$

Remarque 2.14. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, $\lambda(E)$ sera notée *Longueur*(E). Pour un espace $E \subset \mathbb{R}^2$, $\lambda(E)$ sera notée *Aire*(E).

3 Dimension de Minkowski-Bouligand

3.1 Définition de cette dimension

Définition 3.1 (Épaississement de Minkowski). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, soit $\epsilon > 0$, soit $\mathcal{B}_\epsilon(x)$ la boule ouverte de rayon ϵ centrée en x . On dit que $\mathcal{E}_E(\epsilon) = \bigcup_{x \in E} \mathcal{B}_\epsilon(x)$ est l' ϵ -épaississement de Minkowski de E .

Remarque 3.2. On notera $\lambda(\mathcal{E}_E(\epsilon))$ sa mesure, qui existe puisque l'épaississement de Minkowski de E est une réunion d'ouverts donc est un ouvert, et appartient ainsi à la tribu Borélienne de \mathbb{R}^n .

Définition 3.3 (Dimension supérieure de Minkowski-Bouligand). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, soit $\epsilon > 0$. On dit que

$$\dim - \sup_{MB}(E) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left(n - \frac{\ln(\lambda(\mathcal{E}_E(\epsilon)))}{\ln(\epsilon)} \right)$$

est la dimension supérieure de Minkowski Bouligand de E .

Définition 3.4 (Dimension de Minkowski-Bouligand). On dit que

$$\dim_{MB}(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(n - \frac{\ln(\lambda(\mathcal{E}_E(\epsilon)))}{\ln(\epsilon)} \right)$$

est la dimension de Minkowski Bouligand de E , dans le cas où cette limite existe.

3.2 Exemples

Exemple 3.5. Considérons $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

La longueur de son épaississement de Minkowski vaut $\text{Longueur}(\mathcal{E}_E(\epsilon)) = 1 + 2\epsilon$

et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(\text{Longueur}(\mathcal{E}_E(\epsilon))) = 0$. La dimension de Minkowski-Bouligand de $E \subset \mathbb{R}$ vaut donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\ln(\text{Longueur}(\mathcal{E}_E(\epsilon)))}{\ln(\epsilon)} \right) = 1.$$

Exemple 3.6. Considérons $E = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

L'aire de son épaississement vaut $\text{Aire}(\mathcal{E}_E(\epsilon)) = 1 + 4\epsilon + \pi\epsilon^2$ (l'aire du carré de côté 1, 4 rectangles de longueur 1 et de largeur ϵ et 4 quarts de cercle de rayon ϵ). On a de même,

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(\text{Aire}(\mathcal{E}_E(\epsilon))) = 0$. Donc sa dimension de Minkowski-Bouligand vaut

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\ln(\text{Aire}(\mathcal{E}_E(\epsilon)))}{\ln(\epsilon)} \right) = 2.$$

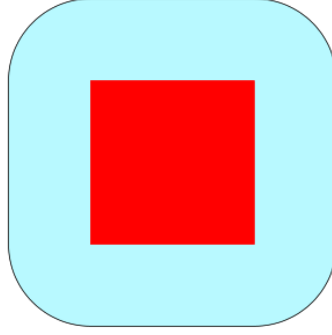


FIGURE 1 : En rouge, l'ensemble E et en bleu son épaississement de Minkowski

Exemple 3.7. Considérons $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

L'aire de son épaississement vaut $Aire(\mathcal{E}_E(\epsilon)) = 2\epsilon + \pi\epsilon^2$ (l'aire du rectangle de longueur 1 et de largeur 4ϵ , et de deux demi-cercles de rayon ϵ). On a donc sa dimension de Minkowski-Bouligand qui vaut

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\ln(Aire(\mathcal{E}_E(\epsilon)))}{\ln(\epsilon)} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\ln(2\epsilon + \pi\epsilon^2)}{\ln(\epsilon)} \right) = 2 - 1 = 1$$

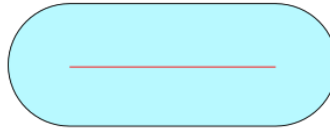


FIGURE 2 : En rouge, l'ensemble E et en bleu son épaississement de Minkowski

3.3 Définition équivalente de la dimension de Minkowski-Bouligand

Définition 3.8. *[Des ensembles de points de E] Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borné, soit $\epsilon > 0$. On note $P_E(\epsilon) = \{P \subset E, \forall (p_1, p_2) \in P, \|p_1 - p_2\| \geq 2\epsilon\}$. Il s'agit de l'ensemble des ensembles de points de E dont les distances 2 à 2 sont supérieures à 2ϵ .*

Remarque 3.9. Si l'on considère $P \in P_E(\epsilon)$, et deux points p_1 et p_2 de P , alors les boules $\mathcal{B}_\epsilon(p_1)$ et $\mathcal{B}_\epsilon(p_2)$ sont disjointes.

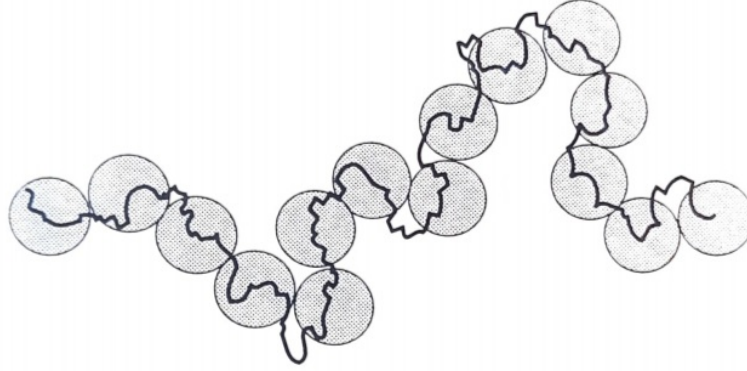


FIGURE 3 : Un ensemble et des boules disjointes centrées sur des point de cet ensemble, de sorte qu'on ne puisse pas en ajouter plus

Proposition 3.10 (Un maximum). *Le suprénum des cardinaux des éléments de $P_E(\epsilon)$ existe et est atteint. On note donc $M(\epsilon) = \max\{ \text{card}(P) \text{ avec } P \in P_E(\epsilon) \}$*

Démonstration. Comme E est borné, il existe $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $E \subset \mathcal{B}_r(x)$. Soit $P \in P_E(\epsilon)$, soit $p \in P$. Comme $p \in E$ et $E \subset \mathcal{B}_r(x)$, on a $\mathcal{B}_\epsilon(p) \subset \mathcal{E}_E(\epsilon) \subset \mathcal{E}_{\mathcal{B}_r(x)}(\epsilon)$. Mais alors la remarque 3.9 implique

$$\text{card}(P) \leq \frac{\lambda(\mathcal{E}_{\mathcal{B}_r(x)}(\epsilon))}{\lambda(\mathcal{B}_\epsilon(x))}$$

□

Proposition 3.11. [Dimension par boules disjointes]

$$\dim_{MB}(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(M(\epsilon))}{|\ln(\epsilon)|}$$

Démonstration. Considérons un ensemble $F \in P_E(\epsilon)$ tel que $\text{card}(F) = M(\epsilon)$. Les boules de $\mathcal{E}_F(\epsilon)$ sont disjointes, et incluses dans l'épaississement de Minkowski de E , puisque $F \subset E$. Ainsi

$$\lambda(\mathcal{B}_\epsilon)M(\epsilon) \leq \lambda(\mathcal{E}_E(\epsilon))$$

De plus comme $M(\epsilon)$ est un maximum, tout point de E est à une distance plus petite ou égale à ϵ de $\mathcal{E}_F(\epsilon)$, et donc tout point de $\mathcal{E}_E(\epsilon)$ est à une distance plus petite ou égale à 2ϵ de $\mathcal{E}_F(\epsilon)$, donc en multipliant par 2 le rayon des boules de $\mathcal{E}_F(\epsilon)$, on recouvre $\mathcal{E}_E(\epsilon)$, et donc :

$$\lambda(\mathcal{E}_E(\epsilon)) \leq \lambda(\mathcal{B}_{2\epsilon})M(\epsilon) \tag{3.1}$$

Par le théorème des gendarmes, et en remarquant que $\lambda(\mathcal{B}_\epsilon) =_{\epsilon \rightarrow 0} O(\epsilon^n)$ on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(M(\epsilon))}{|\ln(\epsilon)|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(n - \frac{\ln(\lambda(\mathcal{E}_E(\epsilon)))}{\ln(\epsilon)} \right)$$

□

4 Dimension de l'ensemble de Cantor

Le but de cette section est de définir un ensemble dont la dimension de Minkowski-Bouligand n'est pas entière.

4.1 Construction de l'ensemble de Cantor

Prenons le segment $[0, 1]$. Enlevons, au centre, l'intervalle ouvert de longueur $1/3$ (le tiers central). Il reste deux segments auxquels on enlève à nouveau un intervalle, toujours centré, avec ce même rapport $1/3$. En réitérant ce processus indéfiniment, on obtient à la limite l'**ensemble de Cantor**, noté C .



FIGURE 4 : Visualisation des 6 premières étapes de la construction de C les unes en dessous des autres

Définition 4.1 (Ensemble de Cantor). On dit que

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left[\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right]$$

est l'ensemble de Cantor.

Remarque 4.2. On notera C_n la $n^{\text{ième}}$ étape de construction de l'ensemble de Cantor, c'est à dire

$$C_n = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{k=0}^{3^i-1} \left[\frac{3k+1}{3^{i+1}}, \frac{3k+2}{3^{i+1}} \right]$$

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}, C \subset C_n \subset [0, 1]$.

Remarque 4.3. Comme on enlève le tiers central de chaque intervalle fermé de C_n à l'étape $n+1$, on a $\text{Longueur}(C_{n+1}) = \frac{2}{3} \text{Longueur}(C_n)$, et donc d'après la proposition 2.13, $\text{Longueur}(C) = 0$.

4.2 L'ensemble de Cantor est non vide

On note x_n un nombre écrit en base 2 avec au plus n chiffres, et X_n l'ensemble des x_n . C_n contient 2^n intervalles fermés disjoints de la forme $[a_k, b_k], k \in \{1, \dots, 2^n\} = \text{card}(X_n)$. On crée une bijection γ entre X_n et les a_k , croissante. Cela permet de numérotter les intervalles fermés de C_n avec des nombres en base 2 à n chiffres.

Définition 4.4 (Les fermés de l'ensemble de Cantor). On appelle F_{x_n} le fermé $[a, b]$ de C_n dont a est l'image de x_n par la bijection γ .

Exemple 4.5. Si l'on considère C_2 , on a $F_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $F_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$, $F_{10} = [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$ et $F_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$.

Proposition 4.6 (Théorème des fermés emboîtés). Dans \mathbb{R}^n , et plus généralement dans tout espace métrique complet, une suite décroissante (pour l'inclusion) de compacts non vides dont le diamètre tend vers 0 a pour intersection un singleton.

Démonstration. Le lecteur pourra trouver une preuve de ce théorème ici [7]. □

Proposition 4.7 (L'ensemble de Cantor est non vide). L'ensemble de Cantor contient un singleton pour chaque suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec x_n un nombre quelconque en base 2 à n chiffres.

Démonstration. En considérant $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres en base 2, dont le $n^{\text{ième}}$ terme a n chiffres, on crée $(F_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides dont le diamètre tend vers 0 et donc d'après le théorème des fermés emboîtés l'ensemble de Cantor est non vide, il contient un singleton pour chaque suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Remarque 4.8. Considérons l'application qui à $(F_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ associe son intersection, à savoir un singleton de C . Celle-ci est bijective, et donc l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable, et est bijectif à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

4.3 Calcul de la dimension de Minkowski-Bouligand de l'ensemble de Cantor

Proposition 4.9 (Dimension de l'ensemble de Cantor).

$$\dim_{MB}(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

Démonstration. Cette preuve s'appuie sur la section 3.3, et plus particulièrement sur la proposition 3.11. On rappelle $M(\epsilon) = \max\{\text{card}(P) \text{ avec } P \in P_C(\epsilon)\}$ avec $P_C(\epsilon) = \{P \subset C, \forall (p_1, p_2) \in P, \|p_1 - p_2\| \geq 2\epsilon\}$.

Soit $\epsilon \in]0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{-(n+1)} < \epsilon \leq 3^{-n}$. Alors on va montrer que $2^n \leq M(\epsilon) \leq 2^{n+1}$. En effet, $M(\epsilon) \geq 2^n$ puisqu'en prenant le point de C à l'extrémité gauche de chacun des segments de C_n , on obtient bien un ensemble $P \in P_C(\epsilon)$, puisque $\epsilon \leq 3^{-n}$.

D'autre part, $M(\epsilon) \leq 2^{n+1}$. En effet supposons que cela ne soit pas le cas. Alors $\exists P \in P_C(\epsilon)$, $\text{card}(P) > 2^{n+1}$. Comme $C \subset C_n$, les points de P sont dans C_n . Comme il y a plus de 2^{n+1} points dans P pour seulement 2^n segments dans C^n , il y a au moins un segment F_{x_n} de C_n contenant au moins 3 points de P , et donc $\lambda(F_{x_n}) > 4\epsilon$. Mais comme on a $\lambda(F_{x_n}) = 3^{-n}$, et $\epsilon > 3^{-(n+1)}$, on a $3^{-n} > 4(3^{-(n+1)})$. Absurde.

Ainsi, par le théorème des gendarmes, on a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} M(\epsilon) = \ln(2)$ et donc

$$\dim_{MB}(C) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(M(\epsilon))}{|\ln(\epsilon)|} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

□

5 Dimension de Minkowski-Bouligand pour des courbes simples

Soit \mathcal{C} une courbe simple bornée.

5.1 Symétrisation de Steiner

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ la droite de normale \vec{n} passant par l'origine. Soit $d \in D$. On pose $L_d = \{d + x\vec{n}, x \in \mathbb{R}\}$. Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ compact.

Définition 5.1 (Symétrisation de Steiner). On dit que

$$St_D(E) = \{d + x\vec{n}, (d \in D, \exists y \in \mathbb{R}, d + y\vec{n} \in E), |x| \leq \frac{1}{2} \text{Longueur}(E \cap L_d)\}$$

est le symétrisé de Steiner de E par rapport à D .

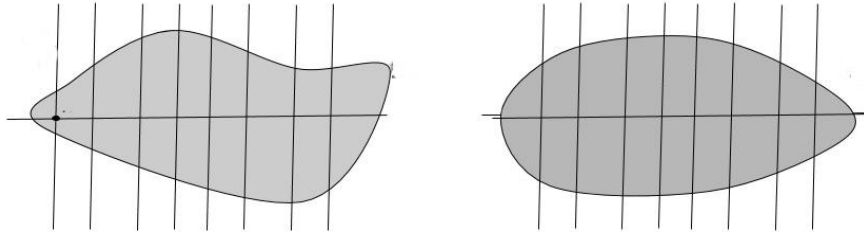


FIGURE 5 : A gauche un ensemble et à droite son symétrisé de Steiner par rapport à l'axe des abscisses

Proposition 5.2 (Conservation de la mesure). $Aire(E) = Aire(St_D(E))$

Démonstration. On trouvera une preuve de ce résultat dans cet ouvrage [8]. □

Définition 5.3 (Les lignes horizontales). Soit $p = (x, y) \in \mathcal{C}$, soit $\epsilon > 0$. On note

$$H_p(\epsilon) = \{(t, y), t \in]x - \epsilon, x + \epsilon[\}$$

$$\text{et } H_{\mathcal{C}}(\epsilon) = \bigcup_{p \in \mathcal{C}} H_p(\epsilon)$$

Posons $\gamma(t)$ une paramétrisation de \mathcal{C} . Soient $p = (x, y)$ et $p' = (x', y')$ deux points de \mathcal{C} , tel que $y' > y$, et soient (t, t') tels que $\gamma(t) = p$ et $\gamma(t') = p'$. Soit (p, p') l'arc de \mathcal{C} allant de p à p' étant la réduction de γ à $[t, t']$. On notera $H_{(p, p')}(\epsilon) = \bigcup_{x \in (p, p')} H_x(\epsilon)$

Proposition 5.4. $[Aire \text{ de } H_{(p, p')}(\epsilon)] \text{ Aire}(H_{(p, p')}(\epsilon)) \geq 2\epsilon(y' - y)$

Démonstration. Posons D d'équation $y = 0$ et $St_D(H_{(p, p')}(\epsilon))$ le symétrisé de Steiner de $H_{(p, p')}(\epsilon)$ par rapport à D .

L'arc (p, p') étant continu, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour chaque $z \in [y, y']$ il y a au moins un point de \mathcal{C} ayant comme ordonnée z .

Ainsi, $\forall c \in H_{(p, p')}(\epsilon)$, $\text{Longueur}(L_c \cap H_{(p, p')}(\epsilon)) \geq 2\epsilon$. Donc l'aire de $St_D(H_{(p, p')}(\epsilon))$ est plus grande

que l'aire du rectangle $[-\epsilon, \epsilon] \times [y, y']$ celui ci étant inclus dans $St_D(H_{(p,p')})$, et on obtient bien le résultat attendu. \square

Remarque 5.5. Si l'on avait pris D d'équation $x = 0$, on aurait obtenu le même résultat pour l'aire de $V_{(p,p')}(\epsilon) = \bigcup_{c \in (p,p')} V_c(\epsilon)$ où

$$V_c(\epsilon) = \{(x, t), t \in]y - \epsilon, y + \epsilon[\}$$

5.2 Dimension par croix

Définition 5.6 (Les croix). Soit $p = (x, y) \in \mathcal{C}$, soit $\epsilon > 0$. On note

$$K_p(\epsilon) = \{(t, y), t \in]x - \epsilon, x + \epsilon[\} \cup \{(x, t), t \in]y - \epsilon, y + \epsilon[\}$$

et $K_{\mathcal{C}}(\epsilon) = \bigcup_{p \in \mathcal{C}} K_p(\epsilon)$

Remarque 5.7. $K_{\mathcal{C}}(\epsilon) = H_{\mathcal{C}}(\epsilon) \cup V_{\mathcal{C}}(\epsilon)$

Définition 5.8 (Courbe de Jordan). Une courbe de Jordan est une courbe fermée du plan sans points doubles.

Proposition 5.9 (Théorème de Jordan). Toute courbe de Jordan sépare le plan en deux composantes connexes disjointes dont elle est la frontière commune, une seule d'entre elles est bornée.

Proposition 5.10 (Dimension par croix).

$$\dim_{MB}(\mathcal{C}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2 - \frac{\ln(\text{Aire}(K_{\mathcal{C}}(\epsilon)))}{|\ln(\epsilon)|}$$

Démonstration. Les croix étant incluses dans l'épaississement de Minkowski, $\text{Aire}(K_{\mathcal{C}}(\epsilon)) \leq \text{Aire}(\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(\epsilon))$. Trouvons une inégalité dans l'autre sens. Soit p un point de \mathcal{C} . Pour démontrer ce résultat, construisons un carré J dont les cotés sont de longueur 2ϵ , pris parallèles aux branches de la croix $K_p(\epsilon)$, centré sur p . Prenons ϵ suffisamment petit de sorte qu'il y ait un point de la courbe en dehors de J (ceci est toujours possible en prenant ϵ plus petit que le diamètre de \mathcal{C}).

J est une courbe de Jordan, qui sépare donc le plan en deux composantes connexes, il y a donc un point de la courbe \mathcal{C} sur J . en notant $\gamma(t)$ une paramétrisation de \mathcal{C} , $\{t \in \mathbb{R}, \gamma(t) \in \mathcal{C} \cap J\}$ est un fermé borné non vide en tant qu'intersection non vide de fermés bornés. Il s'agit donc d'un compact qui est borné et atteint ses bornes, en particulier son minimum. Il existe donc un point p' de \mathcal{C} tel que l'arc (p, p') de \mathcal{C} soit entièrement compris dans le carré plein dont la frontière est J , notons le J_{plein} .

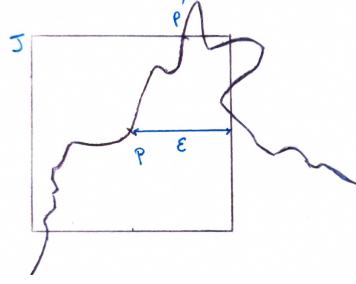


FIGURE 6 : Un carré J et un arc (p, p') complètement inclus dans le carré plein J_{plein}

Supposons que p' soit situé sur un des segments horizontaux de J . On applique la proposition 5.4 pour obtenir

$$Aire(K_{(p,p')}(\epsilon)) \geq Aire(H_{(p,p')}(\epsilon)) \geq 2\epsilon^2$$

Comme l'arc (p, p') est entièrement compris dans J_{plein} , chaque segment horizontal associé à un point de (p, p') est au moins à moitié inclus dans J_{plein} . On a

$$Aire(K_{(p,p')}(\epsilon) \cap J_{plein}) \geq \epsilon^2$$

Si p' est sur un des segments verticaux de J , on applique la remarque 5.5 pour obtenir la même chose.

L'intersection ceci avec la boule $\mathcal{B}_\epsilon(p)$ est donc d'aire supérieure à $(\pi - 3)\epsilon^2$.

On applique la proposition 3.11 et on note donc $\mathcal{E}_{P_\mathcal{C}(\epsilon)}(\epsilon)$ les disques disjoints centrées sur des points de \mathcal{C} , de rayon ϵ . La construction précédente appliquée à toutes ces boules permet de construire $M(\epsilon)$ domaines disjoints, et donc :

$$Aire(K_\mathcal{C}(\epsilon)) \geq (\pi - 3)\epsilon^2 M(\epsilon)$$

De plus on sait en écrivant l'inégalité 3.1 en dimension 2 :

$$Aire(\mathcal{E}_\mathcal{C}(\epsilon)) \leq 9\pi\epsilon^2 M(\epsilon)$$

Ce qui nous donne bien

$$\frac{\pi - 3}{9\pi} Aire(\mathcal{E}_\mathcal{C}(\epsilon)) \leq Aire(K_\mathcal{C}(\epsilon))$$

On a donc

$$Aire(K_\mathcal{C}(\epsilon)) \leq Aire(\mathcal{E}_\mathcal{C}(\epsilon)) \leq \frac{9\pi}{\pi - 3} Aire(K_\mathcal{C}(\epsilon))$$

et donc on a bien

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2 - \frac{\ln(Aire(K_\mathcal{C}(\epsilon)))}{|\ln(\epsilon)|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2 - \frac{\ln(Aire(\mathcal{E}_\mathcal{C}(\epsilon)))}{|\ln(\epsilon)|}$$

□

6 Dimension de Minkowski-Bouligand des Graphes

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit $\tau > 0$ Soit f une fonction de $[a - \tau, b + \tau]$ dans \mathbb{R} . Soit \mathcal{G} le graphe de f .

6.1 Oscillation et Variation

On veut étudier ici non pas des graphes représentatifs de fonctions C^∞ , mais de fonctions continues mais non dérivables, nulle part. Pour cela, on va définir un "équivalent" pour la tangente.

Pour un t dans $[a - \tau, b + \tau]$ et un τ strictement positif, l'image de $[t - \tau, t + \tau]$ par f est inscrite dans un rectangle dont un des cotés mesure 2τ et l'autre mesure $\sup_{|t-t'|\leq\tau} f(t') - \inf_{|t-t'|\leq\tau} f(t')$.

Définition 6.1. [τ -oscillation] On dit que $osc_\tau(t, f) = \sup_{|t-t'|\leq\tau} f(t') - \inf_{|t-t'|\leq\tau} f(t')$ est la τ -oscillation de f en t .

La variation est l'intégrale des oscillations. Ainsi donc :

Définition 6.2. [τ -Variation] On dit que

$$Var_\tau(f) = \int_a^b osc_\tau(t, f) dt$$

est la τ -variation de f .

Remarque 6.3. Lorsqu'aucune confusion n'est possible pour τ , on appellera respectivement la τ -oscillation et la τ -variation oscillation et variation.

6.2 Variation et dimension de Minkowski-Bouligand

Notation 6.4 (Une surface particulière). On note $U_\tau = \{ (x, y), \exists x_0, f(x_0) = y, |x - x_0| \leq \tau \}$

Il s'agit de la surface balayée par le graphe \mathcal{G} lorsqu'on la translate par les vecteurs $x\vec{i}, x \in [-\tau, \tau]$, et qu'on tronque à gauche et à droite pour ne garder que les points compris entre a et b .

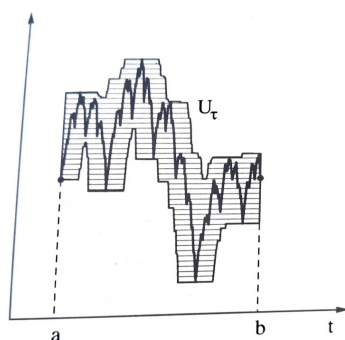


FIGURE 7 : La surface U_τ

Proposition 6.5 (Géométrie de la variation).

$$Var_{\tau}(f) = \lambda(U_{\tau})$$

Démonstration. Remarquons que comme l'on a tronqué à gauche de a et à droite de b , Pour tout point $p = (p_x, p_y)$ de U_{τ} , $\exists y \in f([a, b])$, $f(p_x) = y$. Autrement dit, U_{τ} est la réunion de segments verticaux placés à toutes les abscisses x , pour $x \in [a, b]$.

Montrons que la longueur de ces segments vaut exactement $osc_{\tau}(x, f)$.

En effet, U_{τ} est la réunion de segments horizontaux de longueur 2τ centrés sur les points $(x, f(x))$, $x \in [a, b]$. Ainsi, si l'on considère un segment vertical placé à l'abscisse x , chaque point de ce segment est à une distance horizontale plus petite ou égale à τ d'un point du graphe de f , et tous les points de f dont l'abscisse est à une distance plus petite ou égale à τ de x ont un projeté sur le segment vertical d'abscisse x , et donc la longueur de ce segment vertical vaut exactement l'oscillation.

Autrement dit, si l'on fixe un x dans $[a, b]$, on peut construire une bijection entre les points du segment vertical d'abscisse x et les points du graphe de f dont l'abscisse est à une distance plus petite ou égale à τ .

En intégrant ces segments verticaux (qui forment U_{τ}), on obtient bien la variation de f . \square

Proposition 6.6. [Dimension de Minkowski-Bouligand et Variation]

$$dim_{MB}(\mathcal{G}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} 2 - \frac{\log Var_{\tau}(f)}{\log(\tau)}$$

Démonstration. Avant toute chose, notons que f étant continue sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes. Notons m et M le minimum et maximum respectivement de f sur $[a, b]$, ainsi que $c = M - m$.

Pour cette démonstration nous utiliserons la définition de la dimension M-B par des croix. Reprenons donc pour x dans $[a, b]$ le domaine de recouvrement par croix $K_{\mathcal{G}}(\tau)$ et les croix $K_{(x, f(x))}(\tau)$ définies précédemment. Ces croix sont la réunion de lignes horizontales (notons les $H_{\mathcal{G}}(\tau)$) et de lignes verticales ($V_{\mathcal{G}}(\tau)$). On a :

$$\lambda(H_{\mathcal{G}}(\tau)) \leq \lambda(K_{\mathcal{G}}(\tau)) \leq \lambda(H_{\mathcal{G}}(\tau)) + \lambda(V_{\mathcal{G}}(\tau))$$

Pour les lignes verticales, celles-ci étant de longueurs 2τ , $\lambda(V_{\mathcal{G}}(\tau)) = 2\tau(b - a)$. Si l'on tronque à gauche de a et à droite de b , $\lambda(H_{\mathcal{G}}(\tau))$ devient égale à U_{τ} . On a :

$$Var_{\tau}(f) \leq \lambda(H_{\mathcal{G}}(\tau)) \leq Var_{\tau}(f) + 2c\tau$$

Et en rassemblant ces 2 résultats, on obtient :

$$Var_{\tau}(f) \leq \lambda(K_{\mathcal{G}}(\tau)) \leq Var_{\tau}(f) + 2(c + b - a)\tau$$

Enfin, $c\tau \leq Var_{\tau}(f)$

En effet, par application directe de la proposition 5.4, on obtient $\lambda(H_{\mathcal{G}}(\tau)) \geq 2\tau c$. En prenant $\tau \leq b - a$ chacun de ces segments ne peut être tronqué qu'à moitié, on a donc $Var_{\tau}(f) \geq \frac{\lambda(H_{\mathcal{G}}(\tau))}{2} \geq \tau c$ donc $c\tau \leq Var_{\tau}(f)$. Ainsi,

$$Var_{\tau}(f) \leq \lambda(K_{\mathcal{G}}(\tau)) \leq Var_{\tau}(f) + 2\frac{b - a}{c}\tau$$

Cela nous donne bien

$$\dim_{MB}(E) = \lim_{\tau \rightarrow 0} 2 - \frac{\log \lambda(K_{\mathcal{G}}(\tau))}{\log(\tau)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} 2 - \frac{\log \text{Var}_{\tau}(f)}{\log(\tau)}$$

□

7 Graphe de Fonctions Holderiennes

Lorsqu'une fonction n'est pas dérivable en un point, on peut mesurer son irrégularité en introduisant un exposant de Hölder :

Définition 7.1 (Exposant de Hölder, fonction holderienne). Une fonction f est dite holderienne d'exposant $H \in]0, 1]$ en t s'il existe une constante c telle que pour tout t' :

$$|f(t) - f(t')| \leq c|t - t'|^H$$

Proposition 7.2 (Définition équivalente). Une fonction est holderienne d'exposant H s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout τ :

$$\text{osc}_\tau(t, f) \leq c\tau^H$$

Démonstration. En effet, si $\text{osc}_\tau(t, f) \leq c\tau^H$ on a $|f(t) - f(t')| \leq c|t - t'|^H$, puisque l'oscillation prend en compte les extrema de f sur $[t - \tau, t + \tau]$. Réciproquement, si $|f(t) - f(t')| \leq c|t - t'|^H$ pour tout t' , on pose t_1 tel que $|t - t_1| \leq \tau$, et $f(t_1) = \sup_{|t-t'| \leq \tau} f(t')$. On pose t_2 tel que $|t - t_2| \leq \tau$, et

$f(t_2) = \inf_{|t-t'| \leq \tau} f(t')$. Ainsi :

$$\text{osc}_\tau(t, f) = f(t_1) - f(t_2) = f(t_1) - f(t) + f(t) - f(t_2) \leq 2c\tau^H$$

□

Proposition 7.3. [Résultat important sur la dimension M-B] Si le coefficient de Hölder existe et est identique pour tout t de $[a, b]$, et si de plus c ne dépend pas de t , on a :

$$\dim_{MB}(\mathcal{G}) \leq 2 - H$$

Démonstration. En intégrant sur $[a, b]$ l'oscillation, on obtient $\text{Var}_\tau(f) \leq (b-a)c\tau^H$, ce qui nous donne directement le résultat. □

8 La Fonction de Weierstrass

8.1 Définition

On va sommer des cosinus dont les fréquences tendent vers l'infini, plus vite que les amplitudes ne tendent vers 0. Cela donne des courbes qui peuvent représenter des profils rugueux par exemple.

Définition 8.1 (Fonction de Weierstrass). Soit $\omega > 1$ et $H \in]0, 1[$. On pose :

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{-nH} \cos(\omega^n t)$$

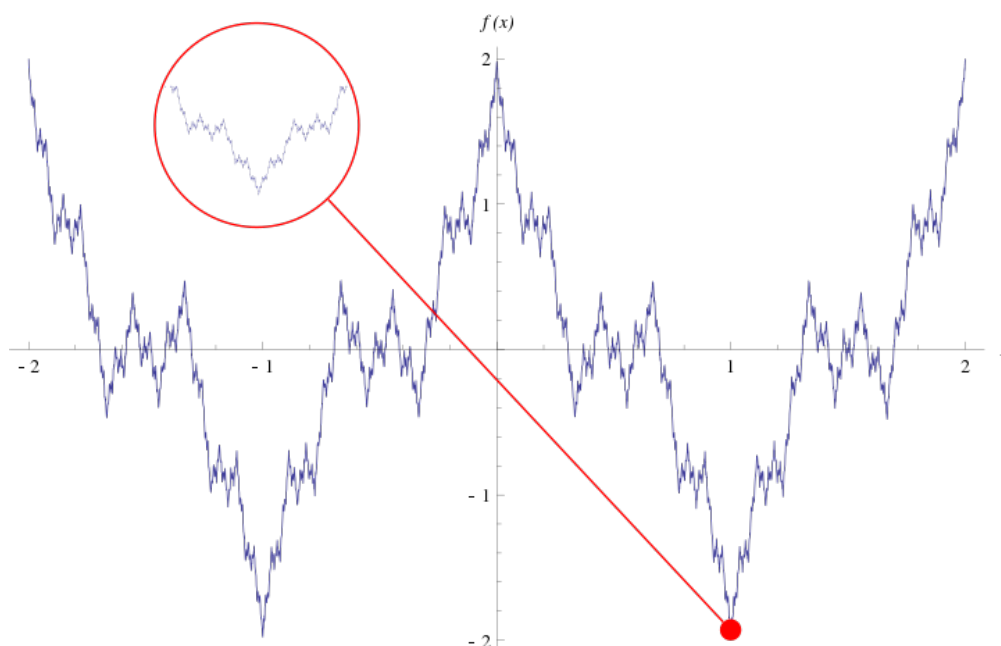


FIGURE 8 : Graphe de Fonction de Weierstrass pour $\omega = 3$ et $H = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$

Remarque 8.2. Chacun des cosinus de W a une période de $\frac{2\pi}{\omega^n}$, et donc comme n parcourt \mathbb{N} , la fonction de Weierstrass n'est pas périodique. Si l'on essaie cependant de tracer son graphe, on ne tracera qu'un nombre fini N de cosinus, et donc ce tracé approximatif sera périodique de période $\frac{2\pi X}{\omega^N}$ ou X est le plus petit nombre tel que $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \frac{2\pi X}{\omega^i} \in \mathbb{Z}$

8.2 Dimension de Minkowski-Bouligand du graphe de la fonction de Weierstrass

Proposition 8.3 (Lemme sur l'oscillation de fonction C^1). Si f est une fonction de classe C^1 , et que la valeur absolue sa dérivée est majorée par un réel M_1 , alors

$$\text{osc}_\tau(t, f) \leq 2\tau M_1$$

Démonstration. Remarquons que comme f est C^1 , elle est continue sur $[t - \tau, t + \tau]$ et atteint donc ses bornes sur ce segment. Notons le minimum et le maximum de f sur ce segment $m(t)$ et $M(t)$ respectivement, et posons a_t et b_t tel que $f(a_t) = m(t)$ et $f(b_t) = M(t)$. Ainsi, $osc_\tau(t, f) = f(b_t) - f(a_t)$. Notons que comme a_t et b_t appartiennent à $[t - \tau, t + \tau]$, $|b_t - a_t| \leq 2\tau$. D'après l'inégalité des accroissements finis, comme $|f'|$ est majorée par M_1 , $osc_\tau(t, f) = f(b_t) - f(a_t) \leq M_1|b_t - a_t| \leq 2M_1\tau$

□

Proposition 8.4 (Dimension M-B de la fonction de Weierstrass). *En notant \mathcal{G} le graphe de W , on a :*

$$dim_{MB}(\mathcal{G}) = 2 - H$$

Démonstration. • On va prouver l'inégalité

$$dim_{MB}(\mathcal{G}) \leq 2 - H$$

D'après la proposition 7.3, il suffit de montrer que W est uniformément holderienne d'exposant H . Posons $W_n(t)$ la somme partielle de W pour un n quelconque de \mathbb{N}^* . On a :

$$W_n(t) = \sum_{i=1}^n \omega^{-iH} \cos(\omega^i t)$$

qui est dérivable, avec :

$$W'_n(t) = - \sum_{i=1}^n \omega^{-iH} \omega^i \sin(\omega^i t)$$

D'où :

$$\begin{aligned} |W'_n(t)| &\leq \sum_{i=1}^n \omega^{i(1-H)} = \frac{\omega^{n(1-H)} - 1}{\omega - 1} \\ &\leq \frac{\omega^{n(1-H)}}{\omega - 1} = \frac{\omega^{(n+1)(1-H)}}{(\omega - 1)\omega^{1-H}} \end{aligned}$$

Soit $\tau \in [0, 1]$. Il existe un entier n tel que $\omega^{-(n+1)} \leq \tau \leq \omega^{-n}$. En vertu de la proposition 8.2, on a :

$$osc_\tau(t, W_n) \leq 2\tau \frac{\omega^{(n+1)(1-H)}}{(\omega - 1)\omega^{1-H}}$$

et de plus

$$2\tau \frac{\omega^{(n+1)(1-H)}}{(\omega - 1)\omega^{1-H}} = \frac{2}{(\omega - 1)\omega^{1-H}} (\tau\omega^{n+1})^{1-H} \tau^H \leq c_1 \tau^H$$

avec $c_1 = \frac{2}{\omega - 1}$, puisque comme $\tau \leq \omega^{-n}$, $\tau\omega^{n+1} \leq \omega$.

On sait de plus que $-\sum_{i=n+1}^{\infty} \omega^{-iH} \leq W - W_n \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \omega^{-iH}$ D'où il découle directement de la définition 6.1 que

$$\begin{aligned} osc_\tau(t, W - W_n) &\leq 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \omega^{-iH} = 2\omega^{-nH} \sum_{i=1}^{\infty} \omega^{-iH} \\ &= \frac{2\omega^{-nH}}{1 - \omega^{-H}} \leq c_2 \tau^H \end{aligned}$$

avec $c_2 = \frac{2}{1 - \omega^{-H}}$ Ainsi, on a donc :

$$osc_\tau(t, W) \leq osc_\tau(t, W_n) + osc_\tau(t, W - W_n) \leq (c_1 + c_2)\tau^H$$

ce qui prouve bien que W est uniformément holderienne, et d'après la proposition 7.3, on obtient l'inégalité recherchée.

- Nous allons maintenant démontrer que

$$dim_{MB}(\mathcal{G}) \geq 2 - H$$

Soit $\tau \in [0, 1]$. Il découle de la définition 6.1 que :

$$osc_\tau(t, W) \geq |W(t + \tau) - W(t - \tau)|$$

De plus :

$$\begin{aligned} W(t + \tau) - W(t - \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} \omega^{-iH} (\cos(\omega^i(t + \tau)) - \cos(\omega^i(t - \tau))) \\ &= -2 \sum_{i=1}^{\infty} \omega^{-iH} \sin(\omega^i t) \sin(\omega^i \tau) \end{aligned}$$

Il existe un entier n tel que $\omega^{-(n+1)} < \tau \leq \omega^{-n}$. De cette manière, $\omega^{-1} < \tau \omega^n \leq 1$. Notons que $\sin(\omega^{-1}) < \sin(\omega^n \tau)$ En séparant la somme en 2, on obtient :

$$W(t + \tau) - W(t - \tau) = -2\omega^{-nH} \sin(\omega^n \tau) \sin(\omega^n t) - 2 \sum_{i \neq n} \omega^{-iH} \sin(\omega^i \tau) \sin(\omega^i t)$$

$$|W(t + \tau) - W(t - \tau)| \geq 2\omega^{-nH} \sin(\omega^{-1}) |\sin(\omega^n t)| - 2 \sum_{i \neq n} \omega^{-iH} |\sin(\omega^i t)| \quad (8.1)$$

On va maintenant minorer la variation (définition 6.2) à l'aide du résultat précédent. On a

$$Var_\tau(W) \geq \int_a^b |W(t + \tau) - W(t - \tau)| dt$$

L'observation cruciale est que

$$Var_\tau(W) \geq \int_a^b |(W(t + \tau) - W(t - \tau)) \sin(\omega^n t)| dt$$

car $|\sin(\omega^n t)| < 1$, et ainsi

$$Var_\tau(W) \geq \left| \int_a^b (W(t + \tau) - W(t - \tau)) \sin(\omega^n t) dt \right|$$

et donc d'après l'équation 8.1

$$Var_\tau(W) \geq 2\omega^{-nH} \sin(\omega^{-1}) \int_a^b \sin^2(\omega^n t) dt - 2 \sum_{i \neq n} \omega^{-iH} \left| \int_a^b \sin(\omega^i t) \sin(\omega^n t) dt \right| \quad (8.2)$$

Il ne reste qu'à évaluer les intégrales :

$$\int_a^b \sin^2(\omega^n t) dt \quad (8.3)$$

$$\left| \int_a^b \sin(\omega^i t) \sin(\omega^n t) dt \right| \quad (8.4)$$

On a d'une part pour 8.3 :

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin^2(\omega^n t) dt &= \int_a^b \frac{1 - \cos(2\omega^n t)}{2} dt = \frac{b-a}{2} - \frac{\sin(2\omega^n b) - \sin(2\omega^n a)}{2\omega^n} \\ &\geq \frac{b-a}{2} - \omega^{-n} \end{aligned}$$

Et d'autre part pour 8.4 :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \sin(\omega^i t) \sin(\omega^n t) dt \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_a^b \cos(\omega^i t - \omega^n t) - \cos(\omega^n t + \omega^i t) dt \right| \\ &= \left| \frac{\sin((\omega^i - \omega^n)b) - \sin((\omega^i - \omega^n)a)}{2(\omega^i - \omega^n)} + \frac{\sin((\omega^i + \omega^n)a) - \sin((\omega^i + \omega^n)b)}{2(\omega^i + \omega^n)} \right| \\ &\leq \frac{1}{|\omega^i - \omega^n|} + \frac{1}{\omega^i + \omega^n} \leq \frac{2}{|\omega^i - \omega^n|} \end{aligned}$$

Or, si $i < n$, on a $\omega^{n-1} \geq \omega^i$ et donc

$$\frac{2}{|\omega^i - \omega^n|} \leq \frac{2}{\omega^n - \omega^{n-1}}$$

Et si $i > n$, on a

$$\begin{aligned} \omega + \frac{1}{\omega} &\geq 2 \\ \omega - 1 &\geq 1 - \frac{1}{\omega} \end{aligned}$$

et comme $\omega^{i-n} \geq \omega$,

$$\frac{\omega^i}{\omega^n} - 1 \geq 1 - \frac{1}{\omega}$$

On en déduit $\omega^i - \omega^n \geq \omega^n - \omega^{n-1}$ d'où dans tous les cas $\forall i \neq n$

$$\frac{2}{|\omega^i - \omega^n|} \leq \frac{2}{\omega^n - \omega^{n-1}} = \frac{\omega^{-n}}{1 - \omega^{-1}} \leq \frac{\tau}{1 - \omega^{-1}}$$

En rassemblant les résultats de 8.2, 8.3 et 8.4 on obtient :

$$\text{Var}_\tau(W) \geq 2\omega^{-nH} \sin(\omega^{-1}) \left(\frac{b-a}{2} - \omega^{-n} \right) - 4 \sum_{i \neq n} \omega^{-iH} \frac{\tau}{1 - \omega^{-1}}$$

et donc

$$\text{Var}_\tau(W) \geq 2\tau^H \sin(\omega^{-1}) \left(\frac{b-a}{2} - \tau \omega^{-1} \right) - 4\tau \sum \frac{\omega^{-iH}}{1 - \omega^{-1}} \quad (8.5)$$

Et avec cette équation 8.5, en passant au log, et en vertu de la proposition 6.6, on obtient l'inégalité

$$\dim_{MB}(\mathcal{G}) \geq 2 - H$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Remarque 8.5. Si l'on avait choisi $a = 0$, $b = 2\pi$, et ω un entier, les intégrales 8.3 et 8.4 se simplifiaient grandement, puisque

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega^n t) dt = \pi$$

et

$$\int_0^{2\pi} \sin(\omega^i t) \sin(\omega^n t) dt = 0$$

ce qui a pour vertu de simplifier la démonstration sans perdre le résultat qualitatif intéressant.

Remarque 8.6. Notons que la méthode consistant à calculer la dimension de Minkowski-Bouligand avec la variation s'appelle la méthode des variations.

Références

- [1] Claude Tricot, *Courbes et dimension fractale*, 1992, Editions Sciences et Culture, ISBN : 2-89092-137-9.
- [2] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry*, 1989, Editions John Wiley & Sons, ISBN : 0-471-92287-0.
- [3] T. Gallouët, R. Herbin, *Mesure, intégration, probabilités*, 2022, Editions Ellipses, ISBN : 9782340-075306
- [4] Gilles Bailly Maître, *Intégrale de Lebesgue*, 2018.
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLE8WtfrsTAikeH7HgZRewzjiPeczrCrXp>
- [5] Marc Guinot, *Le paradoxe de Banach-Tarski*, 1991, Editions ALEAS, ISBN : 2-908016-08-7
- [6] Jean Doyen, *Le paradoxe de Banach-Tarski*, 2013.
https://www.youtube.com/watch?v=xKmwAy_WxM8&t=6255s
- [7] Un professeur de l'ENS Rennes
https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~afalq494/docs_maths/fiches_maths/33.0.Theoreme_des_fermes_emboites.pdf
- [8] Yu. D. Burago, V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, 1980, Editions Springer-Verlag, ISBN : 3-540-13615-0.