

TIPE

2026

Autour de la conjecture de Mahler

Éléonore CHARTON

mail : eleonore.charton@etu.univ-lyon1.fr

Sous la direction de Nicolas VICHÉRY



Université Claude Bernard Lyon 1



Introduction

Ce TIPE est rédigé pour quiconque s'intéresse à la **conjecture de Mahler** d'un point de vue géométrique, ou tout simplement à la géométrie convexe.

Ainsi, pour parler de cette conjecture, nous aurons besoin de définir ce qu'est :

- Un corps convexe $K \subset \mathbb{R}^d$ (compact, convexe, d'intérieur non vide) ;
- Un ellipsoïde (généralisation de l'ellipse aux dimensions $d \geq 2$) ;
- Le polaire d'une partie K , noté K° et défini par :

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in K, \langle y, x \rangle \leq 1\};$$

- Le produit de Mahler $\mathcal{M}(K) = \text{vol}(K) \cdot \text{vol}(K^\circ)$, qui est invariant par toute transformation linéaire de K .

Les travaux de *Santaló* et *Blaschke* [San49; Bla17] nous disent que le produit de *Mahler* est maximal pour les ellipsoïdes, ou pour les boules à une transformation linéaire près.

En 1939, Mahler énonce sa conjecture [Mah39] de la manière suivante : pour tout corps K symétrique par rapport à l'origine,

$$\mathcal{M}(K) \geq \frac{4^d}{d!}$$

avec égalité si et seulement si K est un hypercube ou son polaire, l'octaèdre. Il démontre lui-même ce résultat pour $d = 2$.

Aujourd'hui, le cas $d = 3$ a également été démontré par *Iriyeh* et *Shibata* [IS20] en 2020. Toutefois, le cas $d \geq 4$ reste ouvert, bien que [BM85] en donne une bonne approximation.

En 1981, Saint-Raymond montre que la conjecture de Mahler s'applique aux corps convexes inconditionnels (c'est-à-dire invariants par symétrie orthogonale par rapport aux axes de coordonnées) en toute dimension [CRS81].

Nous définirons donc toutes ces notions dans les chapitres allant de 1 à 4 puis nous attaquerons à la conjecture de *Mahler* dans le dernier chapitre. Nous finirons ce dernier par la présentation d'un résultat portant sur les corps convexes de $\mathbb{C}^d$ invariants par l'action du tore. Nous n'avons pas réussi à trouver dans la littérature de résultat équivalent.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord **Nicolas VICHÉRY**, mon encadrant, pour sa patience, ses nombreuses relectures ainsi que ses précieuses réflexions qui m'ont grandement aidée pour mener à bien ce TIPE.

Je voudrais remercier aussi **Guillaume AUBRUN** et **Laurent BETERMIN**, qui ont su répondre à mes questions concernant le déroulement de l'UE et m'ont mise en contact avec mon encadrant.

Table des matières

5

CHAPITRE 1 Pré-requis

1.1	Espaces topologiques	5
1.1.1	Définition d'une topologie	5
1.1.2	Ouverts, fermés	6
1.1.3	Voisinages, intérieur, adhérence	6
1.1.4	Compacité	7
1.2	Espaces métriques	9
1.2.1	Définition	9
1.2.2	Topologie des espaces métriques	10
1.2.3	Voisinages, intérieur, adhérence	12
1.2.4	Compacité	13
1.2.5	Espaces complets	13
1.3	Espaces vectoriels normés	15
1.3.1	Définition	15
1.3.2	Espace pré-hilbertien	15
1.3.3	Espace euclidien	15
1.3.4	Topologie des espaces vectoriels normés	16
1.3.5	Compacité	17
1.4	Algèbre	17
1.4.1	Matrices symétriques, orthogonales	17
1.4.2	Formes quadratiques	19

22

CHAPITRE 2 Introduction aux notions de convexité

2.1	Notion de convexe	22
2.1.1	Ensemble convexe	22
2.1.2	Enveloppe convexe	25
2.1.3	Théorèmes classiques	26
2.2	Jauge d'un convexe	29
2.3	Projection, séparation	30
2.3.1	Quelques pré-requis sur les sous-espaces affines	30
2.3.2	Théorèmes de séparation et d'appui	30
2.3.3	Projection sur un convexe fermé	31
2.4	Polyèdres et polytopes, des exemples de convexes	33
2.4.1	Polyèdres	33

36

CHAPITRE 3
Ellipsoïdes et corps convexes

- 3.1 Ellipsoïdes 36
- 3.1.1 Définition 36
- 3.1.2 Corps convexes 37

44 CHAPITRE 4
Dual, polaire

- 4.1 Cône 44
- 4.1.1 Cône dans un espace vectoriel 44
- 4.1.2 Cône dual 46
- 4.1.3 Polaire du cône 47
- 4.2 Généralisation de la notion de polarité à d'autres ensembles dans un espace euclidien 47
- 4.2.1 Définition 48
- 4.2.2 Exemples 48
- 4.2.3 Propriétés 49

53 CHAPITRE 5
Conjecture de *Mahler*

- 5.1 Produit de *Mahler* 53
- 5.1.1 Définition 53
- 5.1.2 Propriétés 53
- 5.2 Conjecture de *Mahler* 54
- 5.2.1 Énoncé 54
- 5.2.2 Justification de la recherche d'un minimum 54
- 5.2.3 Preuve de la conjecture dans le cas $d = 2$ 55
- 5.3 Corps convexes $\mathbb{R}$ -inconditionnels 57
- 5.3.1 Corps convexes $\mathbb{C}$ -inconditionnels 60

Chapitre 1

Pré-requis

Pour parler de la *Conjecture de Mahler* nous allons avoir besoin de parler de boules, de « corps convexes », i.e. d'ensembles convexes et compacts d'intérieur non vide, qui sont de plus symétriques. Dans ce chapitre nous nous attèlerons à définir les notions de boules, de compacité. Et nous nous intéresserons plus particulièrement à ces notions dans des espaces euclidiens. Pour suivre la logique de progression de ce chapitre il faut avoir en tête que

$$\text{Espace vectoriel normé} \subset \text{Espaces Métriques} \subset \text{Espaces Topologiques}.$$

Nous commencerons donc par les espaces topologiques.

Toutes les preuves qui suivent ne seront pas toutes démontrées. Pour plus de détails on peut se référer aux notes de cours [Mir23 ; Ngo19]. Sinon se référer à [Ska04] pour une version papier. Pour la partie algèbre on pourra regarder par exemple, [Gou21] ou tout ouvrage de $L2$.

1.1 Espaces topologiques

1.1.1 Définition d'une topologie

Définition 1.1.1: Topologie

Soit X un ensemble. On appelle topologie sur X toute famille $\mathcal{T}$ de parties de X vérifiant :

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$,
- (ii) Pour tous $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, on a $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$,
- (iii) Pour toute famille quelconque $(U_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{T}$, on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Voici quelques exemples de topologies :

Exemple 1.1.2 (Topologie dite « grossière »)

X un ensemble quelconque et $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Exemple 1.1.3 (Topologie dite « discrète »)

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ est une topologie où toute partie est ouverte et fermée

Exemple 1.1.4

$X = \mathbb{R}$ avec $\mathcal{T}$ qui est la famille des réunions d'intervalles ouverts de X .

Définition 1.1.5: Espace topologique

Soit X un ensemble. On appelle espace topologique le couple $(X, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est une topologie sur X .

1.1.2 Ouverts, fermés

Définition 1.1.6: Ouvert

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés ouverts.

Définition 1.1.7: Fermé

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que $F \subset X$ est un fermé si ${}^cX = X \setminus F$ est un ouvert i.e. ${}^cX \in \mathcal{T}$.

Proposition 1.1.8

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors :

1. Une réunion finie de fermés est un fermé.
2. Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

PREUVE.

1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de fermés. Alors les $U_i = {}^cF_i$ sont ouverts. Ainsi

$${}^c\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) = \bigcap_{i \in I} {}^cF_i = \bigcap_{i \in I} U_i$$

est un ouvert par (ii) dans la définition 1.1.1.

2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fermés. Alors les $U_i = {}^cF_i$ sont ouverts. Ainsi

$${}^c\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} {}^cF_i = \bigcup_{i \in I} U_i$$

est un ouvert par (iii) dans la définition 1.1.1.

On aurait aussi pu remarquer qu'un fermé $F \subset X$ peut s'écrire $X \setminus {}^cF$ et comme X est fermé, par (i) dans la définition 1.1.1, alors l'intersection est fermée. $\square$

Remarque :

On aurait pu aussi définir la notion d'espace topologique par les fermés.

1.1.3 Voisinages, intérieur, adhérence

Voisinages

Définition 1.1.9

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit que $V \subset X$ est un voisinage de x s'il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subset V$.

Intérieur et adhérence

Définition 1.1.10: Adhérence

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. On appelle

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F$$

l'adhérence de A . C'est le plus petit fermé au sens de l'inclusion qui contient A .

Définition 1.1.11: Intérieur

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. On appelle

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ ouvert}}} U$$

l'intérieur de A . C'est le plus grand ouvert au sens de l'inclusion qui est contenu dans A .

Remarque :

On notera dans les chapitres suivants $\text{int } A$ l'intérieur de A pour éviter toute confusion avec A° .

Définition 1.1.12: Frontière

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. On appelle $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ la frontière de A .

Propriétés

Proposition 1.1.13

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A, B des parties de X . Alors :

1. Si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. A ouvert $\Leftrightarrow \overset{\circ}{A} = A$.
3. A fermé $\Leftrightarrow \overline{A} = A$.
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
6. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$

1.1.4 Compacité

Définition

Définition 1.1.14: Compact

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors X est compact si :

1. X est séparé i.e. $\forall x \neq y \in X, \exists U, V \in \mathcal{T}, U \cap V = \emptyset$ et $x \in U$ et $y \in V$,
2. $\forall (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I, \left(X \subset \bigcup_{i \in I} U_i \implies \exists J \subset I, \text{Card}(J) < \infty, \text{ tel que } X \subset \bigcup_{j \in J} U_j \right)$.

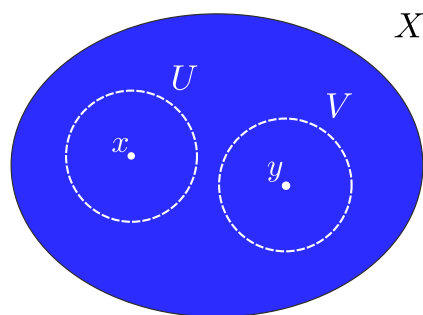


FIGURE 1.1 – Espace séparé

Remarque :

Dans la littérature anglo-saxonne, on appelle compact ce qui est pour nous un quasi-compact (i.e. ne vérifiant pas la condition de séparation).

Définition 1.1.15

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors $K \subset X$ est un compact si

$$\forall (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I, \left(K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \implies \exists J \subset I, \text{Card}(J) < \infty, \text{ tel que } K \subset \bigcup_{j \in J} U_j \right).$$

Une partie K de X est compacte si tout recouvrement ouvert de K admet un sous recouvrement fini.

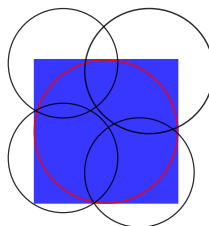


FIGURE 1.2 – Recouvrement fini d'un carré

Exemple 1.1.16

L'ensemble vide est compact.

Exemple 1.1.17

Prenons l'exemple de X un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Alors c'est un quasi-compact si X a plus d'un point et un compact sinon.

Exemple 1.1.18

Tout ensemble fini muni d'une topologie est compact.

Exemple 1.1.19

$\mathbb{R}$ n'est pas compact car le recouvrement

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n-1, n+1[$$

n'admet pas de recouvrement fini car cette union est incluse dans un intervalle $]a, b[$, avec a, b des réels. Par contre, $\overline{\mathbb{R}}$ la droite achevée, est compacte.

Propriétés

Théorème 1.1.20 Image d'un compact

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue entre espaces topologiques. Si $A \subset X$ compacte alors $f(A)$ est compacte.

Théorème 1.1.21 Théorème des bornes atteintes

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un espace topologique X compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 1.1.22 Théorème de Tychonoff

Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{O})$ des espaces topologiques compacts alors $X \times Y$ est compact pour la topologie produit.

Proposition 1.1.23

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On a :

1. La réunion d'une famille **finie** de parties compactes est toujours compacte.
2. Si X est séparé alors, l'intersection d'une famille **quelconque** de compacts est toujours compacte.

1.2 Espaces métriques

1.2.1 Définition

Définition 1.2.1: Distance

Soit X un ensemble non vide. On appelle distance une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ qui vérifie les propriétés de :

- (i) **Séparation** : $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (ii) **Symétrie** : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$,
- (iii) **Inégalité triangulaire** : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in X$.

Exemple 1.2.2

Pour $X = \mathbb{R}^d$. La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ qui est

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2},$$

pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Exemple 1.2.3

Pour $X = \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x - y|$ est une distance.

Exemple 1.2.4

Pour $X = \mathbb{C}$ qui peut être identifié à $\mathbb{R}^2$, $(z, w) \mapsto |z - w|$.

Définition 1.2.5: Espace métrique

Un espace métrique est un couple (X, d) où d est une distance.

1.2.2 Topologie des espaces métriques**Boules****Définition 1.2.6**

Soit (X, d) un espace métrique. Alors, pour $a \in X$ et $r > 0$, on définit

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

comme la boule ouverte de centre a et rayon r et

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$$

la boule fermée de centre a et rayon r .

Exemple 1.2.7

Sur $X = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, (cf l'exemple 1.2.3), l'intervalle ouvert $]0, 1[$ est une boule ouverte et le segment $[0, 1]$ une boule fermée.

Exemple 1.2.8

Sur $X = \mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle (cf exemple 1.2.4) alors le disque unité est une boule fermée.

Exemple 1.2.9

Sur $X = \mathbb{R}^3$ muni de la distance usuelle (cf exemple 1.2.2) alors la boule unité est une boule fermée.

Théorème 1.2.10

Un espace métrique est un cas particulier d'espace topologique. En effet, soit (X, d) un espace métrique alors

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U\}$$

est une topologie sur X . On dit que les U sont les ouverts de X .

PREUVE. Soit (X, d) un espace métrique.

1. $\emptyset$ et X sont des éléments de $\mathcal{T}$. En effet, prenons $x \in X$. Alors la boule unité ouverte de centre x est bien comprise dans X . l'ensemble vide étant par définition l'ensemble qui ne contient aucun élément alors la proposition est nécessairement vraie.
2. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de $\mathcal{T}_d$. Soit $x \in \cup_{i \in I} U_i$, alors il existe $j \in I$ tel que $x \in U_j$. Donc il existe $r > 0$, $B(x, r) \subset U_j$. Or pour tout $i \in I$, $U_i \subset \cup_{i \in I} U_i$ donc il existe $r > 0$, $B(x, r) \subset \cup_{i \in I} U_i$.
3. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille finie de $\mathcal{T}_d$. Soit x un élément de l'intersection des éléments de cette famille. Alors pour tout $i \in I$, il existe $r_i > 0$, $B(x, r_i) \subset U_i$. Comme I est fini, $\min_{i \in I} (r_i)$ existe et on le note r . Ainsi $B(x, r) \subset \cap_{i \in I} U_i$.

□

Corollaire 1.2.11

Soit X un espace métrique alors X et $\emptyset$ sont ouvert et fermés.

Remarque :

Dans un espace métrique ce ne sont pas forcément les seuls à vérifier cette propriété. Prenons $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ muni de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in [0, 1]$ alors la boule ouverte centrée en x de rayon $\frac{1}{2}$ est incluse dans $[0, 1]$ car la distance entre x et un point de $[2, 3]$ est d'au moins 1. Alors par le même raisonnement $[0, 1]$ est un fermé car son complémentaire est ouvert. Dans ce cas, on dit que X n'est pas **connexe**.

Convergence de suites dans un espace métrique

Définition 1.2.12

Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X muni d'une distance d converge vers $l \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, l) < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.13 Unicité de la limite

Dans un espace métrique (X, d) la limite d'une suite d'éléments de X , si elle existe, est unique.

Définition 1.2.14

Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X est bornée si

$$\exists x \in X, \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B(x, M).$$

Adhérence d'une suite

Définition 1.2.15

Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X . On appelle **valeur d'adhérence** de la suite tout point $\ell \in X$ tel que :

$$\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_k : k \geq n\}}.$$

On note $Adh(u_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$.

Proposition 1.2.16 Caractérisation métrique

Un point $\ell \in X$ est une valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \quad d(\ell, x_n) < \varepsilon$$

Proposition 1.2.17

Soit (X, d) un espace métrique. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de X et $x \in X$, alors :

$$x \in Adh(u_n) \Leftrightarrow \exists \varphi \text{ une extraction, } \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{\varphi(k)} = x$$

Exemple 1.2.18

$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet comme valeur d'adhérence 1 et -1 .

Exemple 1.2.19

$(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet comme valeur d'adhérence $[-1, 1]$.

Proposition 1.2.20

Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X . Si $x_n \rightarrow x$ alors x est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.

Bornés

Le caractère métrique d'un espace nous permet d'introduire la notion de bornitude.

Définition 1.2.21

Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X alors on dit que A est bornée si :

$$\exists M > 0, \exists a \in A, \forall x \in A, d(x, a) \leq M.$$

Proposition 1.2.22

Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X alors on dit que A est bornée si :

$$\exists x \in X, \exists M > 0, A \subset B(x, M).$$

1.2.3 Voisinages, intérieur, adhérence

Comme un espace métrique est un cas particulier d'espace topologique toutes les définitions et propriétés données en 1.1.3 restent valables.

1.2.4 Compacité

Théorème 1.2.23

Tout espace métrique est séparé.

Théorème 1.2.24

Soit (X, d) un espace métrique. Alors

$$K \subset X \text{ compact} \iff \left(\forall (k_n) \in K^{\mathbb{N}}, \text{Adh}(k_n) \neq \emptyset \right).$$

Exemple 1.2.25

$[0, 1]$ muni de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ est compact.

Exemple 1.2.26

$]0, 1[$ muni de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

1.2.5 Espaces complets

Suites de Cauchy

Définition 1.2.27

Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X est **de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.28

Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Proposition 1.2.29

Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X . Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a au plus une valeur d'adhérence.

Proposition 1.2.30

Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui est de Cauchy. Alors $(x_n)_n$ est convergente si et seulement si $(x_n)_n$ admet une unique valeur d'adhérence.

Exemple 1.2.31

On peut être de Cauchy et non convergente. Dans $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle dans $\mathbb{R}$, la suite

$$(S_n)_{n \geq 1} := \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right)_{n \geq 1}$$

est de Cauchy et elle converge vers e dans $\mathbb{R}$ mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 1.2.32

On peut construire d'autres contre-exemples dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ à l'aide de suites récurrentes. (Cela ressemble fortement à l'idée de la méthode de *Héron*). Ainsi la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy et converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On verra ensuite que cela vient du fait que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet contrairement à $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2.33

Dans (X, d) un espace métrique, toute suite de Cauchy est bornée.

Complétude

Définition 1.2.34

Un espace métrique (X, d) est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de X converge.

Propriétés

Théorème 1.2.35

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Définition 1.2.36

L'application $d_1 : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}_+$ entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) définie par

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

est une distance (produit) sur $X \times Y$. On peut généraliser cela à N espaces métriques.

Remarque :

Le produit cartésien fini d'espaces métriques est un espace métrique pour une distance produit (il en existe une infinité). Cela n'est généralement pas vrai pour un produit cartésien infini.

Proposition 1.2.37

Soit $((X_i, d_i))_{i \in I}$ une famille finie d'espaces métriques complets alors le produit cartésien $X = \prod_{i \in I} X_i$ muni d'une distance produit est complet.

Corollaire 1.2.38

$\mathbb{R}^d$ muni d'une distance produit est complet.

Théorème 1.2.39

Tout espace métrique compact est complet

1.3 Espaces vectoriels normés

1.3.1 Définition

Définition 1.3.1

Soit E un espace vectoriel. On appelle norme une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\|$ qui vérifie :

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,
- (ii) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
- (iii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Définition 1.3.2

On peut définir un espace vectoriel normé comme le couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme.

Proposition 1.3.3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance. Ainsi (E, d) , où d est la distance associée à $\|\cdot\|$, est un espace (vectoriel) métrique.

1.3.2 Espace pré-hilbertien

Définition 1.3.4

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E si c'est une **forme bilinéaire symétrique définie positive**.

Définition 1.3.5

Un espace pré-hilbertien est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Proposition 1.3.6

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien. Alors l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme. Ainsi $(E, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est un espace vectoriel normé.

Théorème 1.3.7 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace pré-hilbertien. Alors pour tout $(u, v) \in E^2$,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

1.3.3 Espace euclidien

Définition 1.3.8

Un espace euclidien est un espace pré-hilbertien où E est de dimension finie.

Exemple 1.3.9

$\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Proposition 1.3.10

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

1.3.4 Topologie des espaces vectoriels normés

Définitions

Remarque :

Dans un espace vectoriel normé, la distance étant définie par $d(x, y) = \|x - y\|$, la boule ouverte de centre a et de rayon r se note : $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$.

Propriétés

Proposition 1.3.11

Soit E un espace vectoriel normé. Alors **seuls** E et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés. Ainsi tout espace vectoriel normé est connexe.

Proposition 1.3.12

Soit E un espace vectoriel normé. Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F .

Remarque :

La définition de la convergence d'une suite pour un EVN est la même que pour un espace métrique à la différence près qu'on remplace la distance par la norme associée.

Définition 1.3.13

Soit $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces normés. On appelle norme produit sur l'espace produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ l'une des normes suivantes (en posant $x = (x_1, \dots, x_n)$) :

- $N_1(x) = \|x_1\|_1 + \dots + \|x_n\|_n$;
- $N_2(x) = \sqrt{\|x_1\|_1^2 + \dots + \|x_n\|_n^2}$;
- $N_\infty(x) = \max_{i=1, \dots, n} \|x_i\|_i$.

Proposition 1.3.14

Soit E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times E_2$ que l'on munit d'une norme produit.

- Si O_1 est un ouvert de E_1 et O_2 est un ouvert de E_2 , alors $O_1 \times O_2$ est un ouvert de E .
- Si F_1 est un fermé de E_1 et F_2 est un fermé de E_2 , alors $F_1 \times F_2$ est un fermé de E .

Remarque :

On l'avait déjà vu.

1.3.5 Compacité

Théorème 1.3.15 Borel-Lebesgue

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un vectoriel de dimension finie. Alors

$$K \subset E \text{ compact} \iff (K \text{ fermé et borné}).$$

Remarque :

En général c'est faux en dimension infinie. Le *lemme de Riesz* nous dit justement que un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement si ses boules fermées sont compactes. Ainsi, on considère l'espace des suites telles que la série des carrés des valeurs absolues converge. La norme associée est :

$$\|u_n\| = \sqrt{\sum_{n \geq 0}^{\infty} |u_n|^2}$$

Alors la boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$ est fermé et bornée mais non compacte. Idem si on prend l'espace des suites telles que la série des valeurs absolues converge de norme associée :

$$\|u_n\| = \sum_{n \geq 0}^{\infty} |u_n|$$

Exemple 1.3.16

Le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ est compact.

Exemple 1.3.17

Le boule fermée (ou sphère fermée) unité dans $\mathbb{R}^n$ est compacte.

1.4 Algèbre

1.4.1 Matrices symétriques, orthogonales

Définition 1.4.1

Une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t X A X \geq 0.$$

Une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t X A X > 0.$$

Proposition 1.4.2

Une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives. Idem pour strictement positive.

Définition 1.4.3

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles i.e. les matrices égales à leur transposée. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales i.e. l'ensemble des matrices M vérifiant ${}^tMM = I_n$.

Proposition 1.4.4

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
2. ${}^tM \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
3. Les colonnes de M forment une base orthonormée pour le produit scalaire canonique.
4. Pour toutes matrices colonnes $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$.
5. Pour toute matrice colonne $X \in \mathbb{R}^n$, $\|MX\| = \|X\|$. Idem pour les lignes

Proposition 1.4.5

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormée si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans la base canonique est orthogonale.

Proposition 1.4.6

$(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Théorème 1.4.7 Théorème spectral pour les matrices symétriques réelles

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tPDP$ avec D diagonale.

PREUVE. Montrons tout d'abord que les matrices symétriques ont des valeurs propres réelles.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A (existe toujours par *d'Alembert-Gauss*). Soit $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé alors $AX = \lambda X$. De plus, $\overline{AX} = A\overline{X} = \overline{\lambda} \overline{X}$ car A est à coefficients réels.

D'où ${}^t(AX)\overline{X}$ est égal à $\lambda {}^tX\overline{X}$ d'une part et $\overline{\lambda} {}^tX\overline{X}$ d'autre part. On obtient donc

$$\lambda {}^tX\overline{X} = \overline{\lambda} {}^tX\overline{X}.$$

Comme $X \neq 0$ on a ${}^tXX = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ strictement positif. On en déduit que $\lambda = \overline{\lambda}$ i.e. λ réel. Ainsi on a montré que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Comme les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique χ_A alors celui-ci s'écrit $\prod_{\lambda \in \text{Spec}(A) \subset \mathbb{R}} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ i.e. χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. Ainsi, A est trigonalisable.

Notons T la matrice triangulaire supérieure telle que $T = P^{-1}AP$ avec $P = P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}}$ où $\mathcal{B}$ est la base des colonnes de P .

On applique l'algorithme de *Gram-Schmidt* sur la base $\mathcal{B}$. On obtient une nouvelle base $\mathcal{B}'$ orthonormée. La matrice de passage précédente s'écrit

$$P = P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} =: QR$$

qui est le produit d'une matrice triangulaire supérieure R (par construction de l'algorithme de *Gram-Schmidt*) et d'une matrice orthogonale Q (car ses colonnes forment une base orthonormale). On sait que $A = PTP^{-1}$. En remplaçant P par QR on a

$$A = (QR)T(QR)^{-1} = QRT R^{-1}Q^{-1}.$$

Posons $A' = Q^{-1}AQ$ et donc aussi $A' = RTR^{-1}$. Finalement A' est triangulaire supérieure par produit de matrices triangulaires supérieures mais aussi symétrique car

$${}^tA' = {}^t(Q^{-1}AQ) = {}^t({}^tQAQ) = {}^tQ{}^tAQ = {}^tQAQ = A'.$$

On a bien A' diagonale. Ceci montre que A est diagonalisable dans une base orthonormée formée par les colonnes de Q . □

Théorème 1.4.8 Pseudo-réduction simultanée

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^tPAP = I_n \quad \text{et} \quad {}^tPBP = D$$

avec D une matrice diagonale réelle.

PREUVE. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour ce produit scalaire. On note

$$Q = (C_1 | C_2 | \cdots | C_n)$$

la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de cette base. C'est une matrice de passage donc $Q \in GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi ${}^tQAQ = I_n$. On remarque que tQBQ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En effet,

$${}^t({}^tQBQ) = {}^tQ{}^tBQ = {}^tQBQ.$$

D'après le Théorème 1.4.7, il existe $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que

$${}^tR({}^tQBQ)R = D \quad \text{i.e.} \quad {}^t(QR)B(QR) = D$$

avec D diagonale. Posons $P = QR$ bien inversible car Q, R le sont.

Et de plus,

$${}^tPAP = {}^t(QR)A(QR) = {}^tR({}^tQAQ)R = {}^tRR = I_n$$

car R est orthogonale. Ce qui conclut la preuve. □

1.4.2 Formes quadratiques

Définition 1.4.9

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Une application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique si :

1. Pour tout $\lambda \in K$ et tout $x \in V$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.
2. L'application $B : V \times V \rightarrow K$ définie par :

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

est une forme bilinéaire symétrique.

Exemple 1.4.10

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^d x_i^2$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 1.4.11

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy + zy + xyz$$

n'est pas une forme quadratique.

Proposition 1.4.12

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on peut définir q de manière unique par une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in E, \quad q(x) := {}^t X A X \quad \text{avec } X = [x]_{B_{can}}.$$

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on peut réécrire $q(x) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$.

Définition 1.4.13

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit que un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ est symétrique si

$$\forall (x, y) \in E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

Proposition 1.4.14

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à l'endomorphisme symétrique f . Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de f . Si $x \in \mathbb{R}^n$ a pour coordonnées $(x'_1, \dots, x'_n)$ dans $\mathcal{B}$ alors

$$q(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k'^2$$

PREUVE. On pose $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note A la matrice associée à f dans la base canonique et D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, D est diagonale et il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P D {}^t P$. Ainsi

$$q(x) = {}^t X (P D {}^t P) X = {}^t X P D {}^t P X.$$

On note $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ la matrice de x dans $\mathcal{B}$. Donc $X' = P^{-1} X = {}^t P X$ et ${}^t X' = {}^t ({}^t P X) = {}^t X P$

Finalement

$$q(x) = {}^t X' D X' = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k'^2.$$

□

Corollaire 1.4.15

Soit q_A la forme quadratique associée à la matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A . Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1 \|x\|_2^2 \leq q_A(x) \leq \lambda_n \|x\|_2^2.$$

PREUVE. On reprend les notations précédentes. Comme P est orthogonale elle conserve la norme. En effet,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = \|X\|^2 &= {}^t X A X = {}^t X (P D {}^t P) X = {}^t (P X') (P D {}^t P) (P X') = {}^t X' {}^t P (P D {}^t P) (P X') \\ &= {}^t X' D X' \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k'^2 \end{aligned}$$

Comme

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$$

alors on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_1 (x_i')^2 \leq \lambda_i (x_i')^2 \leq \lambda_n (x_i')^2.$$

Ainsi

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n (x_i')^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i')^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n (x_i')^2.$$

i.e.

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq q_A(x) \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

□

Théorème 1.4.16

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note q la forme quadratique associée à A . Alors :

1. $\text{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow q_A$ est positive.
2. $\text{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow q_A$ est strictement positive.

Chapitre 2

Introduction aux notions de convexité

Dans ce chapitre, nous verrons donc ce qu'est un ensemble convexe. Nous démontrerons des théorèmes classiques de convexité, comme le [Théorème 2.1.13](#), nous parlerons de « séparation » et « d'hyperplan d'appui ». Puis nous terminerons en donnant quelques exemples de convexes, et notamment, un cas particulier de « polytope » qui correspondra au minimiseur potentiel du produit de *Mahler*.

On pourra se référer à [\[Bar02; Tex19\]](#) pour un cours complet de convexité. (Ces documents m'ont servis à l'élaboration des preuves de cette partie).

2.1 Notion de convexe

On considère maintenant l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^d$ de produit scalaire associé

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$$

pour $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ des points de $\mathbb{R}^d$. On définit la norme

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$$

et la distance entre 2 points x et y comme :

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{pour } x, y \in \mathbb{R}^d$$

2.1.1 Ensemble convexe

Définitions

Définition 2.1.1: Combinaison convexe

Soit $\{x_1, \dots, x_m\}$ des points de E . Une combinaison convexe de $\{x_1, \dots, x_m\}$ est un point x de E tel que :

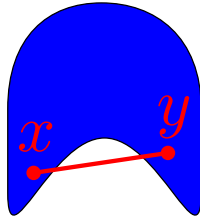
$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{pour tout } i$$

On définit un segment entre 2 points x et y de cette façon : $[x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha)y \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

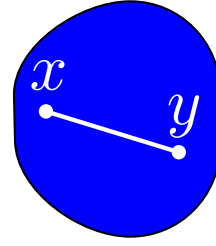
Définition 2.1.2: Ensemble convexe

Soit $A \subset E$. On dit que A est convexe si :

$$\forall x, y \in A, [x, y] \subset A$$



(a) Non convexe



(b) Convexe

FIGURE 2.1 – Exemples

Propriétés

Lemme 2.1.3

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $(E_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels alors $V = \prod_{i \in I} E_i$ est un espace vectoriel.

PREUVE. Par construction, on munit $V = \prod_{i \in I} E_i$ des opérations définies composante par composante : $(x + y)_i := x_i + y_i$ et $(\lambda \cdot x)_i := \lambda \cdot x_i$. Ainsi on a :

1. $0_V := (0_i)_i$ est l'élément neutre pour $+$.
2. Pour $x = (x_i)_i$ on définit $-x := (-x_i)_i$ ainsi tout élément de V admet un opposé
3. La distributivité à gauche et à droite, l'associativité mixte, l'élément neutre à gauche découlent directement de leur validité dans chaque E_i pour tout i .

Ainsi V est un espace vectoriel car elle vérifie ces propriétés composante par composante. $\square$

Remarque :

On a toujours $\bigoplus_{i \in I} E_i \subset \prod_{i \in I} E_i$ mais l'inclusion réciproque n'est vérifiée que si I est fini. En effet, $\prod_{i \in I} E_i$ est l'ensemble de toutes les familles $(x_i)_{i \in I}$ où les x_i sont quelconques et $\bigoplus_{i \in I} E_i$ est l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in I}$ à support fini V .

Contre-exemple :

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R}[X] \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$$

Proposition 2.1.4

Soit $(C_i)_{i \in I} \subset E$ une famille quelconque de convexes. Alors le produit cartésien

$$\prod_{i \in I} C_i$$

est un convexe.

PREUVE. Soient $\alpha \in [0, 1]$ et $x, y \in \prod_{i \in I} C_i$. Alors, on considère le point $\alpha x + (1 - \alpha)y$ et par convexité des C_i on a pour tout $i \in I$,

$$\alpha x_i + (1 - \alpha)y_i \in C_i.$$

Comme ceci est vrai pour chaque coordonnée, on a $\prod_{i \in I} C_i$ convexe. $\square$

Lemme 2.1.5

Soient V, W des espaces vectoriels et $f : V \rightarrow W$ une application linéaire. Si $A \subset W$ (resp. $B \subset V$) est un convexe alors $f^{-1}(A)$ (resp. $f(B)$) est un convexe.

PREUVE. Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(A)$. Alors $f(x_1), f(x_2) \in A$. Pour $\alpha \in [0, 1]$, on a par linéarité : $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$. Comme A est convexe, ce dernier terme est dans A , donc $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in f^{-1}(A)$.

Soient $\alpha \in [0, 1]$ et $x, y \in B$. Alors $f(x), f(y) \in f(B)$. Ainsi $\alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) = f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \in f(B)$ car $\alpha x + (1 - \alpha)y \in B$ par convexité de B . $\square$

Proposition 2.1.6

Soit $(C_i)_{i \in I} \subset E$ une famille quelconque de convexes. Alors l'intersection

$$\bigcap_{i \in I} C_i$$

est un convexe.

PREUVE. Soit E l'espace vectoriel contenant les C_i .

Considérons l'application $f : E \rightarrow \prod_{i \in I} E$, $x \mapsto (x, x, \dots, x)$. Alors $\prod_{i \in I} C_i \subset \prod_{i \in I} E$. Et on a

$$f^{-1}\left(\prod_{i \in I} C_i\right) = \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Et comme l'image réciproque d'un convexe est convexe (par le [Lemme 2.1.5](#)), cette intersection est convexe. $\square$

Définition 2.1.7

Soit V un espace vectoriel. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors pour tous $A, B \subset V$ des convexes on définit la somme

$$A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$$

et l'homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{R}$ de A

$$\alpha A := \{\alpha x \mid x \in A\}.$$

Corollaire 2.1.8

Soit $A \subset E$ un convexe. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors αA est un convexe.

PREUVE. Soit $A \subset E$ un convexe. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : E \rightarrow E$, $a \mapsto \alpha a$. Alors on a $f(A) = \alpha A$ qui est bien convexe par le [Lemme 2.1.5](#). $\square$

Corollaire 2.1.9 Somme de convexes

Soient $A, B \subset E$ des convexes. Alors $A + B$ est un convexe.

PREUVE. Soient $A, B \subset E$ des convexes. Considérons l'application linéaire $f : E \times E \rightarrow E$, $(a, b) \mapsto a + b$. Alors l'image de $A \times B$ par f est $A + B$. Par le [Lemme 2.1.5](#), comme $A \times B$ convexe, on a bien $A + B$ convexe. $\square$

2.1.2 Enveloppe convexe

Définition 2.1.10

L'enveloppe convexe de $A \subset E$, notée $\text{Conv}(A)$, est l'ensemble des combinaisons convexes de points de A . Ce qui se réécrit

$$\text{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i : x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \right\} =: P.$$

On peut aussi définir l'enveloppe convexe comme le plus petit des convexes contenant A .

$$\text{Conv}(A) = \bigcap_{\substack{A \subset C \\ C \text{ convexe}}} C.$$

PREUVE. Montrons l'équivalence entre les 2 définitions de $\text{Conv } A$.

$\subseteq$ On a $A \subset P$ car, pour $x \in A$, on a $1 \cdot x \in P$. De plus, P est convexe. En effet, soient $\lambda \in [0, 1]$ et $x, y \in P$ tels que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i & \text{avec} & \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \\ y &= \sum_{i=1}^q \beta_i y_i & \text{avec} & \sum_{i=1}^q \beta_i = 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \sum_{i=1}^p \lambda \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^q (1 - \lambda) \beta_i y_i$$

avec la somme des coefficients $\sum_{i=1}^p \lambda \alpha_i + \sum_{i=1}^q (1 - \lambda) \beta_i = \lambda + 1 - \lambda = 1$. C'est bien une combinaison convexe de points de P donc $\lambda x + (1 - \lambda)y \in P$. D'où P convexe.

Reste à montrer que P est contenu dans tout convexe contenant A . Soit C un convexe contenant A . Soit

$$x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \in P.$$

Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in A \subset C$ on a alors $x_i \in C$ pour tout i . Or d'après le [Lemme 2.1.11](#), un convexe contient toutes ses combinaisons convexes donc en particulier x appartient à C . D'où $x \in C$ et donc $P \subset C$.

Ainsi on a montré que

$$P \subset \bigcap_{\substack{A \subset C \\ C \text{ convexe}}} C.$$

$\supseteq$ Comme P est une convexe contenant A cette inclusion est évidente.

D'où l'égalité. □

Lemme 2.1.11

Soit C une partie convexe de E . Alors

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_p) \in C^p, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}_+^p, \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \implies \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \in C.$$

Ce qui signifie qu'un convexe contient toute combinaison convexe de ses points.

PREUVE. Raisonnons par récurrence sur p .

→ *Initialisation* : Pour $p = 1$ c'est évident. Pour $p = 2$ c'est la définition de convexité.

→ *Hérédité* : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vérifiée. Soient $x_1, \dots, x_{p+1} \in C$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1} \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i = 1$. Si $\alpha_{p+1} = 1$ alors $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ donc

$$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i = \alpha_{p+1} x_{p+1} = x_{p+1} \in C.$$

Si $\alpha_{p+1} \neq 1$ alors

$$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i = (1 - \alpha_{p+1}) \sum_{i=1}^p \underbrace{\frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{p+1}}}_{=: \lambda_i} x_i + \alpha_{p+1} x_{p+1}.$$

On a

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i}{1 - \alpha_{p+1}} = \frac{1 - \alpha_{p+1}}{1 - \alpha_{p+1}} = 1.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et on a $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C$. Par convexité comme $\alpha_{p+1} \in [0, 1]$ et $x_{p+1} \in C$ on a $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i \in C$. Ce qui conclut la récurrence. $\square$

Proposition 2.1.12

Soient $A, B \subset E$ alors on a :

1. $\text{Conv}(\text{Conv}(A)) = \text{Conv}(A)$,
2. Si $A \subset B$ alors $\text{Conv}(A) \subset \text{Conv}(B)$,
3. $\text{Conv}(A \cap B) \subset \text{Conv}(A) \cap \text{Conv}(B)$ et $\text{Conv}(A) \cup \text{Conv}(B) \subset \text{Conv}(A \cup B)$

PREUVE. Soient $A, B \subset E$.

1. $\text{Conv}(\text{Conv}(A))$ est le plus petit convexe contenant $\text{Conv}(A)$. Or, $\text{Conv}(A)$ est convexe et c'est le plus petit qui le contient donc $\text{Conv}(\text{Conv}(A)) = \text{Conv}(A)$.
2. Supposons que $A \subset B$. Alors comme $A \subset \text{Conv}(A)$ et $B \subset \text{Conv}(B)$, on a $A \subset \text{Conv}(B)$. Sachant que $\text{Conv}(B)$ est convexe on en déduit que $\text{Conv}(A) \subset \text{Conv}(B)$.
3. Comme $A \cap B \subset A$, alors $\text{Conv}(A \cap B) \subset \text{Conv}(A)$. De même, comme $A \cap B \subset B$, alors $\text{Conv}(A \cap B) \subset \text{Conv}(B)$. Donc :

$$\text{Conv}(A \cap B) \subset \text{Conv}(A) \cap \text{Conv}(B)$$

Pour l'union, considérer le fait que $A, B \subset A \cup B$

$\square$

2.1.3 Théorèmes classiques

Théorème 2.1.13 Carathéodory

Soit $A \subset E$ un ensemble. Alors tout point $x \in \text{Conv}(A)$ peut se représenter sous la forme d'une combinaison convexe de $d + 1$ points de A tel que

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i x_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i \geq 0 \text{ pour tout } i, \quad \text{avec les } x_i \text{ des points de } A.$$

PREUVE. Soit x un élément de $\text{Conv}(A)$. Alors il peut s'écrire :

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad x_i \in A \quad \text{et} \quad \alpha_i \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Si $m \leq d+1$ alors il suffit de rajouter des $0x_1$ pour avoir une somme de $d+1$ termes.

Supposons que $m > d+1$. Alors $m-1 > d = \dim(E)$. Ainsi la famille $(x_i - x_1)_{2 \leq i \leq m}$ est liée i.e. il existe des λ_i non nuls tels que :

$$\sum_{i=2}^m \lambda_i (x_i - x_1) = 0.$$

En posant $\lambda_1 := -\sum_{i=2}^m \lambda_i$ on trouve que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0$$

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i - t \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^m (\alpha_i - t \lambda_i) x_i.$$

On cherche un t qui annule un terme de cette somme et laisse tous les autres coefficients positifs. Comme les λ_i sont non tous nuls de somme nulle alors il existe $\lambda_j > 0$. Il suffit alors de prendre

$$t = \min \left\{ \frac{\alpha_i}{\lambda_i}, i = 1, \dots, m : \lambda_i > 0 \right\}.$$

On pose $\tilde{\alpha}_i := \alpha_i - t \lambda_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

On ne considère que les $\lambda_i > 0$ car si $\lambda_i \leq 0$, alors $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - t \lambda_i$ reste positif pour tout $t \geq 0$ (puisque l'on ajoute un terme positif à α_i). En revanche, si $\lambda_i > 0$, le coefficient $\tilde{\alpha}_i$ diminue quand t augmente. En choisissant t comme le plus petit de ces rapports, on s'assure qu'aucun coefficient ne devienne négatif avant que l'un d'eux ne s'annule. Ainsi, l'un de ces coefficients est donc nul et on a bien

$$\sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i - t \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 + 0 = 1.$$

Et de même

$$\sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i x_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i - t \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = x.$$

C'est une somme de $m-1$ termes. On répète l'opération tant qu'il existe x_k tel que $(x_i - x_k)_{k \leq i \leq m}$ est liée. On se retrouve donc à la fin avec une combinaison convexe de $d+1$ points de A . $\square$

Corollaire 2.1.14

Soit $K \subset E$ un compact alors $\text{Conv}(K)$ est un compact.

PREUVE. D'après le [Théorème 2.1.13](#), tout élément x de $\text{Conv}(K)$ peut s'écrire sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i, \quad \text{où } x_i \in K \text{ et } (\lambda_i)_i \in \Delta.$$

On définit $\Delta = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}) \in \mathbb{R}_+^{d+1} : \sum \lambda_i = 1\}$ qui est le simplexe de $\mathbb{R}^{d+1}$. Considérons l'application suivante :

$$f : \Delta \times K^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}, x_1, \dots, x_{d+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i$$

L'ensemble Δ est fermé et borné, donc compact. Puisque K est compact, K^{d+1} est également compact. Par conséquent, l'espace de départ $\Delta \times K^{d+1}$ est un compact.

L'application f est continue car elle est composée de sommes et de produits de fonctions continues. Et comme l'image d'un compact par une application continue est un compact, et que $f(\Delta \times K^{d+1}) = \text{Conv}(K)$, on en déduit que $\text{Conv}(K)$ est compact. $\square$

Théorème 2.1.15 Radon

Soit $S \subset E$ un ensemble contenant au moins $d + 2$ points de E . Alors, il existe une partition de S en deux ensembles disjoints R et B tels que $\text{Conv}(R) \cap \text{Conv}(B) \neq \emptyset$.

PREUVE. Considérons le système d'équations :

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i = 0.$$

Ce système linéaire homogène admet une solution non triviale $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d+2}$ car il y a $d+2$ d'inconnues, qui sont les α_i , ce qui est supérieur à $d+1$, le nombre d'équations, donc ce système admet une infinité de solutions. Ainsi, il admet en particulier une solution non nulle.

Définissons les ensembles d'indices : $I_+ = \{i \mid \alpha_i > 0\}$ et $I_- = \{i \mid \alpha_i < 0\}$. Puisque $\sum \alpha_i = 0$ et que les α_i ne sont pas tous nuls, I_+ et I_- sont non vides. Posons :

$$M = \sum_{i \in I_+} \alpha_i = \sum_{j \in I_-} (-\alpha_j).$$

Le point défini par

$$x = \sum_{i \in I_+} \frac{\alpha_i}{M} x_i = \sum_{j \in I_-} \frac{-\alpha_j}{M} x_j$$

est une combinaison convexe de points de $R = \{x_i : i \in I_+\}$ et également une combinaison convexe de points de $B = \{x_j : j \in I_-\}$. Ainsi $x \in \text{Conv}(R) \cap \text{Conv}(B)$. $\square$

Théorème 2.1.16 Helly

Soit $\{C_1, \dots, C_m\}$ une famille finie de convexes de $\mathbb{R}^d$ avec $m \geq d + 1$. Supposons que pour tout choix de $d + 1$ convexes parmi cette famille leur intersection $C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{d+1}}$ soit non vide, alors $\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$ i.e. il existe un point qui appartient à tous les C_i .

PREUVE. On procède par récurrence sur m .

Initialisation : Pour $m = d + 1$. Par hypothèse, l'intersection de toute sous-famille de $d + 1$ ensembles est non vide. Ainsi, la famille $\{C_1, \dots, C_{d+1}\}$ vérifie cette hypothèse et on a directement $\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$, ce qui initialise la récurrence.

Hérédité : Soit $m \geq d + 1$. Supposons la propriété vraie pour toute famille de m ensembles. Montrons qu'elle est alors vraie pour une famille de $m + 1$ ensembles $\{C_1, \dots, C_{m+1}\}$ de $\mathbb{R}^d$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, m + 1\}$, on considère la famille de m ensembles obtenue en excluant C_i . Puisque $m \geq d + 1$, cette famille vérifie l'HR (toute sous-famille de $d + 1$ éléments possède une intersection non vide). Il existe donc, pour chaque i , un point x_i tel que :

$$x_i \in \bigcap_{j \neq i} C_j.$$

On considère alors l'ensemble de points $S = \{x_1, \dots, x_{m+1}\}$. Comme $m+1 \geq d+2$, on peut appliquer le [Théorème 2.1.15](#) à S . Il existe donc une partition de $\{1, \dots, m+1\}$ en deux ensembles d'indices disjoints I et J tels que :

$$\text{Conv}(\{x_i\}_{i \in I}) \cap \text{Conv}(\{x_j\}_{j \in J}) \neq \emptyset.$$

Soit p un point appartenant à cette intersection. Montrons que p appartient à C_k pour tout $k \in \{1, \dots, m+1\}$:

- Si $k \in I$, alors pour tout $j \in J$, on a $j \neq k$. Par construction, x_j appartient à tous les ensembles sauf C_j , donc en particulier $x_j \in C_k$. Par convexité de C_k , on en déduit que $\text{Conv}(\{x_j\}_{j \in J}) \subset C_k$. Comme $p \in \text{Conv}(\{x_j\}_{j \in J})$, alors $p \in C_k$.
- Si $k \in J$, par un raisonnement symétrique, pour tout $i \in I$, on a $i \neq k$, donc $x_i \in C_k$. Par convexité, $\text{Conv}(\{x_i\}_{i \in I}) \subset C_k$. Ainsi $p \in C_k$.

Le point p appartient donc à l'intersection de tous les ensembles C_i . La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : La propriété étant vraie au rang $d+1$ et héréditaire, elle est donc vraie. $\square$

2.2 Jauge d'un convexe

Définition 2.2.1: Jauge d'un convexe

Soient E un espace vectoriel normé et C un convexe tel que 0_E est dans l'intérieur de C . Alors on appelle jauge d'un convexe l'application $j_C(x) : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in E$ telle que :

$$j_C(x) = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^* \mid \frac{x}{\alpha} \in C \right\}$$

avec pour convention $\inf \emptyset = +\infty$.

On pose :

$$J(x) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^* \mid \frac{x}{\alpha} \in C \right\}.$$

Comme 0_E est dans l'intérieur de C , il existe $R > 0$ tel que $\overline{B}(0_E, R) \subset C$. On a donc pour $x \in E$, $\frac{\|x\|}{R} \in J(x)$ et par exemple π est élément de $J(0_E)$. Ainsi, on a $J(x)$ non vide et minoré par 0 donc par le théorème de la borne inférieure j_C est bien définie.

Proposition 2.2.2

Soit K un corps convexe symétrique de E . La jauge j_K possède les propriétés suivantes pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Séparation** : $j_K(x) \geq 0$ et $j_K(x) = 0 \iff x = 0_E$.
2. **Homogénéité** : $j_K(\lambda x) = |\lambda| j_K(x)$ (découle de la symétrie de K).
3. **Inégalité triangulaire** : $j_K(x + y) \leq j_K(x) + j_K(y)$ (découle de la convexité de K).
4. **Norme** : Les trois propriétés précédentes impliquent que j_K définit une norme sur E .
5. **Caractérisation géométrique** : Le corps K correspond à la boule unité fermée de cette norme : $K = \{x \in E \mid j_K(x) \leq 1\}$. Son intérieur est donné par $\text{int } K = \{x \in E \mid j_K(x) < 1\}$.

2.3 Projection, séparation

2.3.1 Quelques pré-requis sur les sous-espaces affines

Définition 2.3.1: Hyperplan affine

Soit V un espace vectoriel, $f \in V^* \setminus \{0\}$ une forme linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$. Un **hyperplan affine** est un ensemble de la forme :

$$H = \{v \in V \mid f(v) = \alpha\}.$$

En particulier dans $\mathbb{R}^n$, tout hyperplan peut s'écrire : $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \beta\}$ avec $a \neq 0$.

Définition 2.3.2: Demi-espaces

Un hyperplan H sépare l'espace en deux **demi-espaces ouverts** H_+ et H_- . On définit les **demi-espaces fermés** correspondants par :

$$\overline{H_+} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq \alpha\} \quad \text{et} \quad \overline{H_-} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

Ces ensembles sont des convexes fermés de $\mathbb{R}^d$.

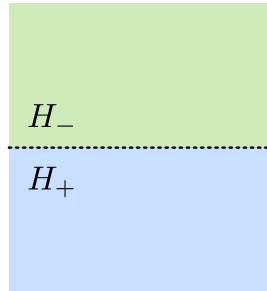


FIGURE 2.2 – Demi-espaces ouverts

2.3.2 Théorèmes de séparation et d'appui

Théorème 2.3.3 Hyperplan d'appui

Soit $K \subset E$ un convexe d'intérieur non vide et soit $u \in \partial K$. Alors il existe un hyperplan affine H passant par u (appelé **hyperplan d'appui**) tel que K soit entièrement contenu dans l'un des demi-espaces fermés définis par H :

$$K \subset \overline{H_+} \quad (\text{ou } K \subset \overline{H_-}).$$

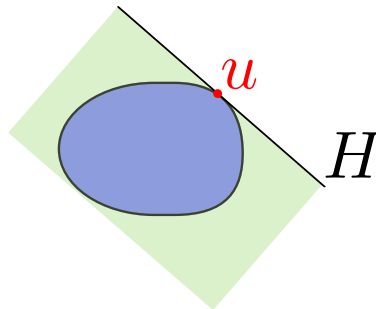


FIGURE 2.3 – Hyperplan d'appui

Théorème 2.3.4 Séparation d'ensembles

Soient $A, B \subset \mathbb{R}^d$ des convexes non vides. Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors il existe un hyperplan affine qui sépare A et B .

PREUVE. Preuve dans [Bar02]. □

Théorème 2.3.5 Séparation d'un point

Soient $K \subset E$ un convexe fermé et $u \notin K$. Alors il existe un hyperplan affine H qui sépare **strictement** u et K .

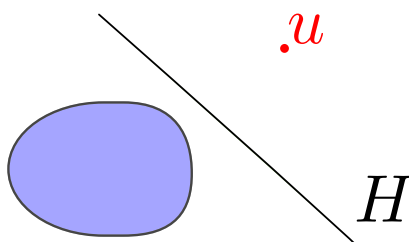


FIGURE 2.4 – H sépare strictement K et u

PREUVE. Soient $K \subset E$ un convexe fermé et $u \notin K$. Comme K est un ensemble fermé et $u \notin K$, on sait alors qu'il existe un $r > 0$ tel que $B(u, r) = \{x : \|x - u\| < r\} \cap K = \emptyset$. On note :

$$B = B(0, r/2) = \{x : \|x\| < r/2\}.$$

$K + B$ et $u + B$ sont des ensembles convexes ouverts d'intersection vide. En effet, on peut écrire

$$A + B = \bigcup_{x \in A} B(x, r/2)$$

comme une union d'ouverts, elle est donc ouverte. On trouve aussi que $u + B = B(u, r/2)$ est une boule ouverte centrée en u . On a donc $A + B$ et $u + B$ des convexes par [Corollaire 2.1.9](#).

Supposons que $(A+B) \cap (B+u) \neq \emptyset$. Soit $x \in (A+B) \cap (B+u)$, alors il existe $y \in A$ tel que on a $\|y - x\| < r/2$ mais on a aussi $\|u - x\| < r/2$. Ainsi, $\|u - y\| < r$, absurde. Donc $A+B \cap B+u = \emptyset$.

D'après le [Théorème 2.3.4](#) il existe un hyperplan H qui sépare $A + B$ et $u + B$. Puisque les ensembles $A + B$ et $u + B$ sont ouverts, H doit séparer strictement les ensembles [Bar02, voir Problème 5, III Section 1.2]. □

2.3.3 Projection sur un convexe fermé

Théorème 2.3.6 Projection sur un convexe fermé

Soit $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et on note $\|\cdot\|$ la norme canonique associée. Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et C un convexe fermé inclus dans H . Alors pour tout $x \in E$ il existe un unique $y_0 \in C$, tel que $\|x - y_0\| = d(x, C) := \inf_{y \in C} \|x - y\|$. Et dans ce cas, pour tout $z \in C$, on a $\langle x - y_0, z - y_0 \rangle \leq 0$.

PREUVE.

- (i) Existence : Soit $y_1 \in C$ (existe car non vide). Alors on cherche à minimiser $n : y \mapsto \|x - y\|$ sur le compact non vide $C \cap \overline{B}(x, \|x - y_1\|)$ par le [Théorème 1.3.15](#). Par continuité de n sur ce compact et par le [Théorème 1.1.21](#) on en déduit que n admet un minimum sur ce compact. Unicité : On va raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe $y, y' \in C$ tels que $\|x - y\| = d(x, C) = \|x - y'\|$.

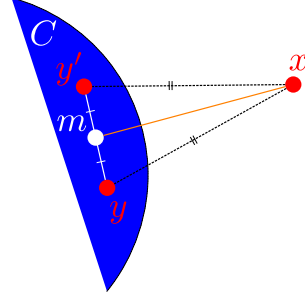


FIGURE 2.5 – Projeté de x sur C

Alors par convexité on a $m := \frac{1}{2}(y + y')$, le milieu de $[y, y']$, est dans C . On va utiliser le théorème de Pythagore généralisé pour montrer que $\|x - m\| < \|x - y\|$. Pour cela, montrons tout d'abord que $\langle x - m, m - y \rangle = 0$. On a :

$$\begin{aligned} \langle x - m, m - y \rangle &= \left\langle \frac{2x - y - y'}{2}, \frac{y' - y}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle 2x - y - y', y' - y \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle (x - y) + (x - y'), (y' - x) + (x - y) \rangle \\ &= \frac{1}{4} \|x - y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y'\|^2 - \frac{1}{4} \langle x - y, x - y' \rangle + \frac{1}{4} \langle x - y', x - y \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi par Pythagore, $\|x - y\|^2 = \|(x - m) + (m - y)\|^2 = \|x - m\|^2 + \|m - y\|^2$. Or comme $\|m - y\|^2$ et $\|x - y\|^2$ sont strictement positifs on a

$$\|x - m\|^2 < \|x - y\|^2.$$

D'où l'absurdité.

- (ii) $\Rightarrow$ Soit $x \in C$. On pose

$$\begin{aligned} N : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|x - (tz + (1 - t)\pi_C(x))\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi comme $\pi_C(x)$ est le projeté de x sur C et $tz + (1 - t)\pi_C(x) \in C$ on a pour tout $t \in [0, 1]$, on a $N(t) \geq \|x - \pi_C(x)\|^2$. Ce qui se réécrit :

$$\|(x - \pi_C(x)) + t(z - \pi_C(x))\|^2 \geq \|x - \pi_C(x)\|^2, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Après simplification on a :

$$\|x - \pi_C(x)\|^2 + t^2 \|z - \pi_C(x)\|^2 + 2t \langle x - \pi_C(x), z - \pi_C(x) \rangle \geq \|x - \pi_C(x)\|^2.$$

Cette inégalité reste valable pour tout $t \in]0, 1[$ donc, en faisant tendre t vers 0 on obtient l'inégalité recherchée.

$\Leftarrow$ Soit y_0 qui vérifie l'inégalité de l'énoncé. Soit $y \in C$. Montrons que $\|x - y\| \geq \|x - y_0\|$. On a

$$\|x - y\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + 2 \underbrace{\langle x - y_0, y_0 - y \rangle}_{\geq 0 \text{ par hypothèse}} + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2.$$

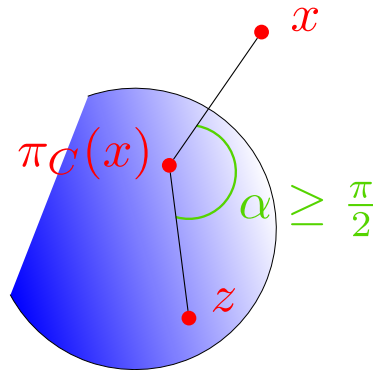


FIGURE 2.6 – Interprétation géométrique du projeté pour $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Remarque :

Ce résultat pourra même être généralisé aux espaces de *Hilbert*.

2.4 Polyèdres et polytopes, des exemples de convexes

2.4.1 Polyèdres

Définition

Définition 2.4.1: Polyèdre

Soient $c_1, \dots, c_m$ des points de E et $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ des nombres. L'ensemble

$$P = \{x \in E \mid \langle c_i, x \rangle \leq \beta_i, \forall i = 1, \dots, m\}$$

est appelé **polyèdre**.

Voici une autre définition équivalente :

Définition 2.4.2

Un **polyèdre** P est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés :

$$P = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle \leq \beta_i\}.$$

Si P est borné, on l'appelle un **polytope**.

Faces et points extrémaux

Définition 2.4.3: Face

Soit H un hyperplan d'appui d'un polyèdre P . L'ensemble $F = P \cap H$ est appelé une **face** du polyèdre. Par convention, $\emptyset$ et P sont aussi considérés comme des faces.

Définition 2.4.4: Point extrémal

Un point $a \in A$ est dit **extrémal** s'il ne peut pas être écrit comme milieu de deux points distincts de A :

$$\forall b, c \in A, \quad a = \frac{b+c}{2} \implies b = c = a.$$

On note $\text{ex}(A)$ l'ensemble de ces points (pour un polyèdre, ce sont les sommets).

Propriétés

Proposition 2.4.5

Un polyèdre $P \subset E$ est convexe.

PREUVE. Soit P un tel polyèdre. Soient x, y des éléments de P et $\alpha \in [0, 1]$. Montrons que $[x, y] \subset P$ i.e. $z := \alpha x + (1 - \alpha)y \in P$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, calculons le produit scalaire $\langle c_i, z \rangle$:

$$\langle c_i, z \rangle = \langle c_i, \alpha x + (1 - \alpha)y \rangle$$

Par bilinéarité :

$$\langle c_i, z \rangle = \alpha \langle c_i, x \rangle + (1 - \alpha) \langle c_i, y \rangle$$

Comme $x \in P$ et $y \in P$, nous savons que : $\langle c_i, x \rangle \leq \beta_i$ et $\langle c_i, y \rangle \leq \beta_i$ Ainsi :

$$\langle c_i, z \rangle \leq \alpha \beta_i + (1 - \alpha) \beta_i = \beta_i \quad .$$

On savait aussi que des demi-espaces sont convexes, donc leur intersection l'est aussi. □

Proposition 2.4.6

Le produit cartésien de 2 polyèdres est un polyèdre.

PREUVE. Idée de preuve, on résout un système d'inégalités. Se référer à [Bar02] pour une preuve complète. □

Proposition 2.4.7

Soit $P \subset E$ un polyèdre et soit $p : E \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ une projection telle que $p(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_{d-1})$. Alors l'image $p(P)$ est un polyèdre de $\mathbb{R}^{d-1}$.

Remarque :

Ce résultat est presque immédiat pour un polytope, par linéarité de l'enveloppe convexe.

PREUVE. Le résultat est admis. La preuve consiste à éliminer des variables dans un système d'inégalités linéaires. Se référer à [Bar02] pour une preuve complète. □

Proposition 2.4.8

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polyèdre et soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors l'image $T(P)$ est un polyèdre de $\mathbb{R}^m$.

PREUVE. Découle du résultat précédent. □

Proposition 2.4.9

La somme de Minkowski de 2 polyèdres dans un espace euclidien est un polyèdre.

PREUVE. Idée preuve prendre l'application telle que l'image de $P \times Q$ est $P + Q$ i.e. $(x, y) \mapsto x + y$. Se référer à [Bar02] pour une preuve complète. $\square$

Théorème 2.4.10 Krein-Milman

Soit $K \subset E$ un convexe compact, alors K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux :

$$K = \text{Conv}(\text{ex}(K)).$$

PREUVE. Une preuve est donnée dans [Bar02]. $\square$

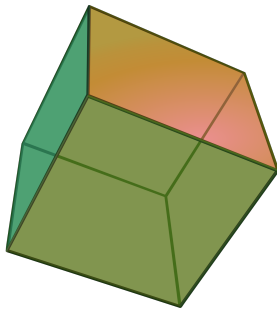
Cas particulier des polytopes

Définition 2.4.11: Polytope

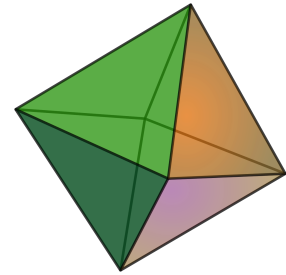
L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de E s'appelle un **polytope**.

Définition 2.4.12: Polytope de Hanner

Soit $P \subset \mathbb{R}^d$ un polytope. Alors, c'est un **polytope de Hanner** si, c'est un segment $[-a, a]$, avec $a > 0$, ou bien, pour $d \geq 2$ si un produit direct de polytopes de Hanner ou le polaire d'un polytope de Hanner



(a) Cube [Aqu24]



(b) Octaèdre [Sta21]

FIGURE 2.7 – Exemples de polytope de Hanner pour $d = 3$.

Pour $d \geq 4$, l'hypercube et l'hyperoctaèdre sont des polytopes de Hanner.

Chapitre 3

Ellipsoïdes et corps convexes

Dans ce chapitre, ce sera, entre autre, l'occasion de définir ce qu'est un « corps convexe symétrique par rapport à l'origine ».

Nous nous intéresserons aux « ellipsoïdes », ce qui correspond à une ellipse pour $d = 2$. Et plus particulièrement, nous nous attarderons sur l'ellipsoïde de *John*, i.e. l'ellipsoïde de volume maximal contenue dans un corps convexe K symétrique par rapport à l'origine. Celui-ci nous permettra d'encadrer K et par conséquent, de borner le produit de *Mahler*.

Dans [Bar02], on trouvera des preuves quelque peu différentes.

3.1 Ellipsoïdes

3.1.1 Définition

Définition 3.1.1

On peut définir un ellipsoïde centré à l'origine de $\mathbb{R}^d$ comme l'ensemble

$$\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^d : q(x) \leq 1\}$$

où q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^d$.

Remarque :

Ce qui peut se réécrire matriciellement :

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}) : {}^t X A X \leq 1\}$$

avec $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$.

Dans le cas général, les directions des demi-axes sont portées par les vecteurs propres de A . Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de la forme quadratique est $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$. Les longueurs des demi-axes sont alors données par $a_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$. Si les axes de l'ellipsoïde correspondent à ceux de $\mathbb{R}^d$, alors A est diagonale. On écrit souvent l'équation d'un tel ellipsoïde sous la forme $\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$, où les $a_i > 0$ sont les longueurs des demi-axes. Dans ce cas, $A = \text{Diag}(\frac{1}{a_1^2}, \dots, \frac{1}{a_d^2})$.

Définition 3.1.2

On définira un ellipsoïde centré en $c \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^d : {}^t(X - c)A(X - c) \leq 1\}$$

avec $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque :

Quitte à traduire on ne s'intéressera le plus souvent qu'aux ellipsoïdes centrés en 0.

3.1.2 Corps convexes

Définition 3.1.3

Un convexe compact $K \subset \mathbb{R}^d$ d'intérieur non vide est appelé **corps convexe**. De plus, on peut le qualifier de **symétrique** par rapport à l'origine si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$x \in K \Leftrightarrow -x \in K.$$

Autrement dit $K = -K$. On notera $\mathcal{K}_0$ l'ensemble des corps convexes symétrique par rapport à l'origine.

Encadrement du volume d'un corps convexe

Lemme 3.1.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{S}_n^+$ est fermé.

PREUVE. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, posons

$$\begin{aligned} \varphi_X : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto {}^tXAX \end{aligned}$$

Remarquons que cette application est continue. Comme $[0, +\infty[$ est fermé, on a

$$\mathcal{S}_n^+ = \bigcap_{X \in \mathbb{R}^n} \varphi_X^{-1}([0, +\infty[).$$

En effet, l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé. De plus, l'intersection quelconque de fermés est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa topologie usuelle d'espace euclidien. $\square$

Proposition 3.1.5

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ alors $\text{vol}_n(\mathcal{E}_A) = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \text{vol}_n(B_n)$.

PREUVE. Sans perte de généralités, on peut supposer A diagonale (via le [Théorème 1.4.7](#) et comme le volume est invariant pour P orthogonale). Dans ce cas,

$$\mathcal{E}_A = \{X \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leq 1, a_i > 0\}.$$

Soit $T : B_n \rightarrow \text{int}(\mathcal{E}_A)$ la transformation linéaire qui à $(x_1, \dots, x_n)$ associe $(\frac{1}{\sqrt{a_1}}x_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}x_n)$. On va appliquer le théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^n$ sur $\text{int}(\mathcal{E}_A)$ un ouvert. T est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $B_n \rightarrow \text{int}(\mathcal{E}_A)$ deux ouverts bornés. Ainsi :

$$\text{vol}_n(\mathcal{E}_A) = \text{vol}_n(T(\text{int}(\mathcal{E}_A))) = \int \cdots \int_{\text{int}(\mathcal{E}_A)} dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_{B_n} |\det J_T| dt_1 \dots dt_n.$$

Comme T linéaire on a la matrice jacobienne $J_T(u) = T$ pour tout $u \in \text{int}(\mathcal{E}_A)$ donc $|\det J_T(u)| = |\det T| = \frac{1}{\sqrt{\det A}}$. D'où

$$\text{vol}_n(\mathcal{E}_A) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \text{vol}_n(B_n). \quad (3.1)$$

□

Théorème 3.1.6 Log-concavité du déterminant

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta = 1$ alors

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq \det(A)^\alpha \det(B)^\beta.$$

PREUVE. On pourra se référer à [FG13].

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$ leurs déterminants sont strictement positifs et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

Par le Théorème 1.4.8, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = {}^t P P$ et $B = {}^t P D P$. Comme D est congrue à $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i > 0$.

D'une part,

$$\det A = \det({}^t P P) = \det(P)^2 \quad \text{et} \quad \det B = \det({}^t P D P) = \det(P)^2 \det(D).$$

Donc,

$$\det(A)^\alpha \det(B)^\beta = (\det(P)^2)^\alpha \det(D)^\beta (\det(P)^2)^{1-\alpha} = \det(P)^2 \det(D)^\beta = \det(P)^2 \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta.$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} \det(\alpha A + \beta B) &= \det(\alpha {}^t P P + \beta {}^t P D P) = \det\left({}^t P (\alpha I_n + \beta D) P\right) \\ &= \det(P)^2 \det(\alpha I_n + \beta D) \\ &= \det(P)^2 \times \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \end{aligned}$$

Comme ces deux quantités sont strictement positives, cela revient à montrer que

$$\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \geq (1-\alpha) \times \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i.$$

Or par concavité du logarithme, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \ln(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + (1-\alpha) \ln(\lambda_i).$$

Ce qui conclut la preuve. □

Théorème 3.1.7

Soit $K \in \mathcal{K}_0$. Alors, il existe un unique ellipsoïde de volume minimal qui contient K . On l'appelle ellipsoïde de Löwner et on le notera $\mathcal{E}_L$.

PREUVE. Voir [FG13] pour une preuve équivalente de ce théorème. C'est aussi un développement à l'agrégation.

Soit $K \in \mathcal{K}_0$. Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde qui contient K . Si un ellipsoïde de volume minimal existe, il est nécessairement centré en 0. On peut donc se restreindre à chercher le minimum parmi les ellipsoïdes centrés à l'origine.

On écrira $\mathcal{E}_A = \{X \in \mathbb{R}^n : {}^tXAX \leq 1\}$ avec $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On sait que $\text{Vol}(\mathcal{E}_A)$ est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{\det(A)}}$. Chercher un ellipsoïde de volume minimal revient donc à maximiser le déterminant de la matrice A .

On pose :

$$\mathcal{S}_K = \{A \in \mathcal{S}_n^+ : \forall X \in K, {}^tXAX \leq 1\}$$

Par le Lemme 3.1.4, $\mathcal{S}_K$ est **fermé** car il s'écrit comme l'intersection

$$\mathcal{S}_n^+ \cap \left(\bigcap_{X \in K} \varphi_X^{-1}(]-\infty, 1]) \right).$$

Par ailleurs, $\mathcal{S}_K$ est **borné**.

En effet, comme K est symétrique par rapport à l'origine et d'intérieur non vide on a donc $0 \in \text{int}(K)$. En effet, comme K est d'intérieur non vide, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset K$. Soit λ_n la plus grande valeur propre de $A \in \mathcal{S}_K$. Par le théorème spectral pour les matrices symétriques, il existe une base orthonormée de vecteurs propres. Soit X_n un vecteur propre unitaire associé à λ_n , alors $X = rX_n$ appartient à $B(0, r)$ donc à K . Par définition de $\mathcal{S}_K$, on doit avoir ${}^tXAX \leq 1$, i.e., ${}^t(rX_n)A(rX_n) \leq 1$, soit $r^2 {}^tX_nAX_n \leq 1$. Comme X_n est un vecteur propre unitaire, on obtient $r^2\lambda_n \leq 1$, d'où $\lambda_n \leq \frac{1}{r^2}$. Par le Théorème 1.4.7 on a donc A qui peut s'écrire comme une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans une base orthonormée. La trace étant invariante par changement de base, on a $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$. Donc $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq n\lambda_n^2 \leq \frac{n}{r^4}$ pour $\|\cdot\|$ la norme de Frobenius. D'où $\mathcal{S}_K$ est **borné**, et donc **compact**.

De plus, $\mathcal{S}_K$ est **non vide**. En effet, comme K est borné, il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$. Ainsi la matrice $A = \frac{1}{R^2}I_n$ appartient à $\mathcal{S}_K$.

Comme l'application $A \mapsto \det(A)$ est un polynôme en les coefficients de la matrice, elle est continue sur le compact $\mathcal{S}_K$ non vide, donc elle y atteint un maximum. Comme K est borné, il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$. Alors la matrice $A = \frac{1}{R^2}I_n$ appartient à $\mathcal{S}_K$ et $\det(A) = (1/R^2)^n > 0$. Le maximum du déterminant est donc strictement positif, ce qui garantit que la matrice associée est dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

Pour l'unicité, remarquons que l'ensemble $\mathcal{S}_K \cap \mathcal{S}_n^{++}$ est convexe. En effet, si A, B appartiennent à cet ensemble, alors pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $X \in K$:

$${}^tX((1-t)A + tB)X = (1-t)\underbrace{{}^tXAX}_{\leq 1} + t\underbrace{{}^tXBX}_{\leq 1} \leq (1-t) + t = 1.$$

Donc $(1-t)A + tB$ appartient aussi à cet ensemble. Ensuite, par la log-concavité du déterminant (Théorème 3.1.6) la fonction $A \mapsto \ln(\det(A))$ est strictement concave sur $\mathcal{S}_n^{++}$.

Par l'absurde, supposons que le maximum soit atteint pour deux matrices différentes A et B . Alors leur milieu $M = \frac{A+B}{2}$ (qui appartient à notre ensemble par convexité) aurait un déterminant strictement supérieur à celui de A et B car, par stricte concavité :

$$\ln(\det(M)) > \frac{1}{2} \ln(\det(A)) + \frac{1}{2} \ln(\det(B)).$$

Ce qui est une contradiction avec le fait que A et B maximisent le déterminant. Le minimum est donc unique. $\square$

Théorème 3.1.8

Soit $K \in \mathcal{K}_0$. Il existe un unique ellipsoïde de volume maximal contenu dans K . On l'appelle ellipsoïde de *John* et on le notera $\mathcal{E}_J$.

PREUVE. Il est possible de se référer à la seconde épreuve écrite de l'agrégation interne de 2025 pour une autre preuve. Sinon voir [Bar02].

On s'intéresse aux matrices $B \in \mathcal{S}_n^{++}$ associées aux ellipsoïdes $\mathcal{E}_B \subset K$. On commence par montrer que

$$\mathcal{S}_K = \{B \in \mathcal{S}_n^+ : \mathcal{E}_B \subset K\} = \{A \in \mathcal{S}_n^+ : \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \leq 1 \implies X \in K\}$$

est **fermé**. Et comme $A \mapsto \det A$ est continue sur cet ensemble non borné, il suffira de montrer qu'elle est coercive pour montrer qu'elle atteint un minimum.

Pour montrer $\mathcal{S}_K$ fermé, on utilise la définition séquentielle et le fait que K est fermé (par compacité). Ceci sera admis pour la preuve.

Comme K est un corps convexe symétrique d'intérieur non vide, il existe $R > r > 0$ tels que :

$$B(0, r) \subset K \subset B(0, R).$$

Comme $\mathcal{E}_A \subset K \subset B(0, R)$, tout point de l'ellipsoïde est à une distance au plus R de l'origine. Comme A est symétrique réelle on en déduit par le Théorème 1.4.7, l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres $(e_1, \dots, e_n)$ associés aux valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Prenons $X = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e_1$ alors il appartient à $\mathcal{E}_A$ car ${}^tXAX = (\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}})^2 \times {}^t(e_1)A(e_1) = \|e_1\|_2^2 = 1 \leq 1$. D'où :

$$\|X\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \leq R \implies \lambda_1 \geq \frac{1}{R^2}. \quad (3.2)$$

Comme $\lambda_1 \geq 1/R^2 > 0$ (la matrice A est inversible) donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. C'est bien un ellipsoïde.

Comme $\mathcal{S}_K$ est fermé mais non borné, nous devons montrer que $f(A) = \det(A)$ est coercive sur cet ensemble, c'est-à-dire que $f(A) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|A\| \rightarrow +\infty$ avec $A \in \mathcal{S}_K$. Prenons la norme définie sur l'espace des matrices qui est $\|A\| = \max_i |\lambda_i| = \lambda_n$ (car A est définie positive). Le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres :

$$f(A) = \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_n \times \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i.$$

Grâce à notre borne inférieure (3.2), nous savons que $\lambda_i \geq \frac{1}{R^2}$. On peut donc minorer le déterminant :

$$f(A) \geq \lambda_n \left(\frac{1}{R^2} \right)^{n-1} = \|A\| \left(\frac{1}{R^2} \right)^{n-1}.$$

Ainsi, si $\|A\| \rightarrow +\infty$ dans $\mathcal{S}_K$, alors $f(A) \rightarrow +\infty$. La fonction $\det$ est bien coercive sur $\mathcal{S}_K$.

Comme f est coercive sur un ensemble fermé en dimension finie alors, elle atteint son minimum global sur celui-ci. Il existe donc une matrice qui minimise le déterminant et donc maximise le volume de l'ellipsoïde. L'ellipsoïde associée est appelée ellipsoïde de *John*. Pour l'unicité, voir la preuve précédente.

□

Théorème 3.1.9 Encadrement ellipsoïde

Soit $K \in \mathcal{K}_0$. Alors $\mathcal{E}_J$ est centré à l'origine et $\mathcal{E}_J \subset K \subset \sqrt{d}\mathcal{E}_J$. La constante $\sqrt{d}$ ne peut pas être améliorée.

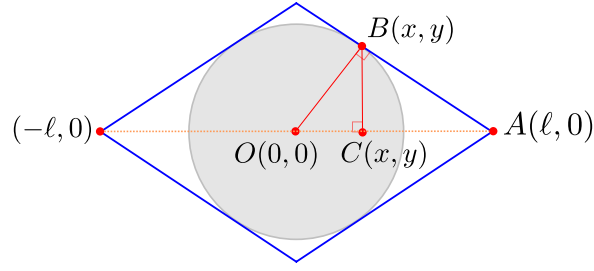


FIGURE 3.1

PREUVE. On pourra se référer à [Bar02] pour une preuve un peu plus complète pour la dimension quelconque. On s'appuie d'ailleurs sur la même idée. On va commencer par faire la preuve pour $d = 2$. Puis, on justifiera sa généralisation à $d \geq 2$. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un corps convexe symétrique. Soit $\mathcal{E}_J$ l'ellipsoïde de volume maximal contenu dans K . On applique si nécessaire une transformation linéaire pour se ramener à la boule fermée unité B_d pour une norme quelconque. Montrons que $K \subset \sqrt{d} B_2$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un point $x \in K$ tel que $x \notin \sqrt{2}B_2$. Par symétrie on a aussi $-x \in K$. On peut supposer sans perte de généralité que $x = (\ell, 0)$ avec $\ell > \sqrt{d} = \sqrt{2}$. On va montrer que dans ce cas on peut trouver un ellipsoïde contenu dans K de volume plus grand que B_2 qui est sensé être celui de volume maximal. D'où la contradiction s'il y a.

Dans $\mathbb{R}^2$ le volume d'un ellipsoïde, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ avec $a, b > 0$, est $\text{Vol}(\mathcal{E}) = \pi ab$. On cherche donc à obtenir a, b optimaux.

Comme K est convexe, il contient donc l'enveloppe convexe $\text{Conv}(B_2 \cup \{\pm x\})$.

On cherche l'équation d'une tangente τ_1 au cercle unité passant par x pour pouvoir paramétrer une ellipse.

On note (x, y) les coordonnées de B . Comme $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OB}$ on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \ell \\ y - 0 \end{pmatrix} = 0$ i.e. $x^2 + y^2 = \ell x$ i.e. $x = \frac{1}{\ell}$.

Par *Pythagore*, dans le triangle rectangle OBC , on trouve que $BC = \sqrt{1 - \frac{1}{\ell^2}} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\ell^2 - 1}$. Ainsi, la pente de la tangente vaut $-\frac{1}{\sqrt{\ell^2 - 1}}$. On en déduit l'équation suivante

$$\boxed{\tau_1 : \sqrt{\ell^2 - 1}y + x = \ell} \quad (3.3)$$

Par symétrie on trouve

$$\tau_2 : \sqrt{\ell^2 - 1}y - x = \ell$$

L'espace délimité par ces deux tangentes forme un cône.

On cherche à avoir un unique point d'intersection entre notre ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.4)$$

et notre tangente. En écrivant x en fonction de y dans (3.3) et en injectant dans (3.4) on se ramène à étudier le déterminant de

$$y^2(a^2 + b^2(\ell^2 - 1)) - y(2\ell b^2 \sqrt{\ell^2 - 1}) + (b^2 \ell^2 - a^2 b^2) = 0.$$

Or ce déterminant vaut 0 (solution unique) donc on trouve la condition de tangence suivante :

$$\boxed{a^2 + (\ell^2 - 1)b^2 = \ell^2} \quad (3.5)$$

On cherche à maximiser le produit ab ce qui revient à maximiser le a^2b^2 qui vaut $(\ell^2 - (\ell^2 - 1)b^2)b^2$ d'après ci-dessus. Grâce au changement de variable $x = b^2$ étudions $f : x \mapsto (\ell^2 - (\ell^2 - 1)x)x = \ell^2x - (\ell^2 - 1)x^2$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ell^2 - 2(\ell^2 - 1)x.$$

Donc elle atteint un maximum en $x = \frac{\ell^2}{2(\ell^2 - 1)}$ i.e. $b = \frac{\ell}{\sqrt{2(\ell^2 - 1)}}$. Ainsi $a = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$.

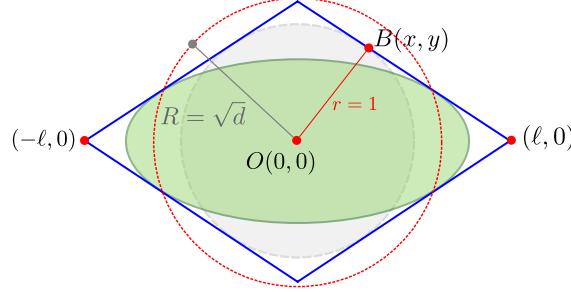


FIGURE 3.2 – Ellipsoïde optimal

Ainsi, l'ellipsoïde de bord vérifiant

$$(\partial\mathcal{E}) : \frac{2x^2}{\ell^2} + \frac{2(\ell^2 - 1)y^2}{\ell^2} = 1$$

convient. Son volume

$$\text{Vol}(\mathcal{E}) = \pi ab = \frac{\pi \ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - 1}} > \pi.$$

Reste à montrer que $\mathcal{E} \subset K$ et justifier sa généralisation à $d \geq 2$. Par convexité, K contient l'enveloppe convexe de B_2 et des points $\pm(\ell, 0)$. Or, par construction, notre ellipse $\mathcal{E}$ est tangente à cette enveloppe convexe (tangente au cône et à la boule) et reste située à l'intérieur par concavité. Donc $\mathcal{E} \subset K$. D'où l'absurdité!

Pour $d \geq 2$, on retrouve la même condition de tangence (d'un hyperplan) à l'ellipsoïde $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_2^2 + \dots + x_d^2}{b^2} \leq 1$ la même étude nous ramène à trouver $a = \frac{\ell}{\sqrt{d}}$ et $b = \ell \sqrt{\frac{d-1}{d(\ell^2 - 1)}}$. Il suffit de prendre l'ellipsoïde de bord

$$(\partial\mathcal{E}) : \frac{2x_1^2}{\ell^2} + \frac{d(\ell^2 - 1)x_2^2}{\ell^2(d-1)} + \dots + \frac{d(\ell^2 - 1)x_d^2}{\ell^2(d-1)} = 1.$$

Son volume

$$\text{Vol}(\mathcal{E}) \propto \frac{\ell}{\sqrt{d}} \times \left(\frac{\ell(d-1)}{\sqrt{d(\ell^2 - 1)}} \right)^{d-1} > 1$$

en supposant encore que $\ell > \sqrt{d}$ par la Proposition 3.1.5 et d'après ce qui précède. Il est donc de volume plus grand que B_d .

Comme K est convexe, symétrique par rapport à l'origine, et contient à la fois la boule unité B_d et les points $\pm x$ (où $x = (\ell, 0, \dots, 0)$), il contient nécessairement leur enveloppe convexe $C = \text{Conv}(B_d \cup \{\pm x\})$. Il suffit donc de démontrer que $\mathcal{E} \subset C$. Comme l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ possède une symétrie de révolution autour de l'axe x_1 . Il suffit donc de vérifier cette inclusion pour n'importe quelle coupe passant par l'axe x_1 . On se ramène donc exactement dans le cas $d = 2$ i.e. une ellipse inscrite dans l'enveloppe convexe d'un cercle et de deux points.

On ne peut pas améliorer cette constante car pour l'hypercube de côté 1 centré en 0 son ellipsoïde de John est la boule unité. Toutefois, ses sommets se situent à une distance $\sqrt{d}$ de l'origine.

□

Remarque :

On notera que la condition de tangence à un ellipsoïde (3.5) est en fait générale. Pour une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ celle-ci est tangente à la droite $Ax + By + d = 0$ si et seulement si $a^2 A^2 + b^2 B^2 = d^2$.

Chapitre 4

Dual, polaire

Et dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux deux dernières notions importantes : la dualité et le polaire d'un ensemble.

Pour cela, nous aurons besoin d'introduire ce qu'est un cône et son polaire c'est lui qui est à l'origine de la construction du polaire d'un ensemble quelconque. Nous verrons aussi quelques propriétés très utiles pour le produit de *Mahler*.

On pourra se référer à [Bar02] pour les quelques preuves non présentées ici.

4.1 Cône

4.1.1 Cône dans un espace vectoriel

Définition 4.1.1

Soit V un espace vectoriel. On dit que $\mathcal{C} \subset V$ est un cône si :

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in \mathcal{C}, \lambda x \in \mathcal{C}.$$

dans le cas où $0 \in \mathcal{C}$ on dit qu'il est pointé et sinon époiné.

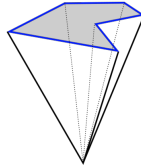


FIGURE 4.1 – Exemple de cône à base polygonale

Proposition 4.1.2

Soit V un espace vectoriel. $\mathcal{C} \subset V$ est un cône convexe si et seulement si :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \forall x, y \in \mathcal{C}, \quad \alpha x + \beta y \in \mathcal{C} \quad \text{i.e.} \quad \mathcal{C} + \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$$

PREUVE. Immédiate à partir de la définition de partie convexe et d'un cône. □

Exemple 4.1.3

L'ensemble des matrices semi-définies (i.e. l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{S}_n^+$) est un **cône convexe** pointé. En effet, la matrice nulle y appartient. Et pour tout $\lambda \geq 0$ et $A \in \mathcal{S}_n^+$ on a $\lambda A \in \mathcal{S}_n^+$ car les valeurs propres de cette matrice restent positives. Donc c'est bien un cône.

De plus, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$${}^t x(A + B)x = ({}^t xAx) + ({}^t xBx) \geq 0.$$

On dit aussi qu'il est saillant car il ne contient aucune droite vectorielle. En effet, si $A \in \mathcal{S}_n^+$ et $-A \in \mathcal{S}_n^+$, alors $A = 0$.

Remarque :

C'est un exemple intéressant car ses propriétés nous permettent de définir une relation d'ordre partiel sur les matrices semi-définies. Cet ordre s'appelle l'ordre de *Löwner* et il est le suivant pour $A, B \in \mathcal{S}_n^+$:

$$A \preceq B \iff A - B \in \mathcal{S}_n^+$$

En fait, tout cône permet de définir un ordre partiel. Plus d'informations sur :

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Loewner_order
2. <https://math.stackexchange.com/questions/383895/properties-of-the-cone-of-positive-semidefinite-matrices> (propriétés intéressantes sur les ellipsoïdes)

Définition 4.1.4

Soit V un espace vectoriel. Soient $x_1, \dots, x_m \in V$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ alors

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$$

est une combinaison conique des points $x_1, \dots, x_m \in V$.

Remarque :

On note $\text{co}(A)$ l'enveloppe conique de $A \subset V$. On l'appelle aussi parfois cône convexe engendré par A . Sa définition est analogue à l'enveloppe convexe : c'est l'ensemble des combinaisons coniques des points de A . Mais aussi, c'est le plus petit cône convexe qui contient A et l'intersection de tous les cônes convexes de V qui contiennent A . L'enveloppe conique d'un point $x \neq 0$ est appelé rayon engendré par x . De plus on le qualifie d'extrême si

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in K, \quad x_2 \in K \implies x_1 \text{ et } x_2 \in \mathbb{R}_+ x.$$

Proposition 4.1.5

Soit V un espace vectoriel. Soit $K \subset V$ un convexe alors le cône engendré par K , noté $\text{co}(K)$ ou $\mathcal{C}_K$, est $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda K$.

Proposition 4.1.6

Soit V un espace vectoriel. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset V$ des cônes convexes alors $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ est un cône convexe.

PREUVE. Pour la preuve on peut commencer par prouver que la somme de 2 cônes est un cône puis comme la somme de 2 convexes est un convexe alors on a montré le résultat attendu.

Soit V un espace vectoriel. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset V$ des cônes. Soient $\lambda > 0$ et $(x, y) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ alors $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ c'est la somme d'un élément de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$ $\square$

$\square$

Lemme 4.1.7

Soient $\mathcal{C}$ un cône d'un espace vectoriel V et $H \subset V$ un hyperplan affine qui isole $\mathcal{C}$ et tel que $\mathcal{C} \cap H \neq \emptyset$. Alors $0 \in H$.

Définition 4.1.8: Base

Soit V un espace vectoriel. Soit $\mathcal{C} \subset V$ un cône. On dit que $B \subset \mathcal{C}$ est une base de $\mathcal{C}$ si $0 \notin B$ et pour tout $u \in \mathcal{C}$ non nul, il existe une unique représentation $u = \lambda v$ avec $v \in B$ et $\lambda > 0$.

Lemme 4.1.9

Soient $\mathcal{C}$ un cône de base convexe B et soit $u \in \mathcal{C}$ non nul. Alors u engendre un rayon extrême de $\mathcal{C}$ ssi $u = \lambda v$ avec $v \in B$ et $\lambda > 0$.

4.1.2 Cône dual

Soit V un espace vectoriel, on note V^* son espace dual i.e. l'ensemble des formes linéaires non dégénérées de V .

Définition 4.1.10

Soit E un e.v. réel. On appelle crochet de dualité, la forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $(\phi, x) \mapsto \phi(x)$.

Théorème 4.1.11 Théorème de Riesz

Soit V euclidien. Alors pour toute $\phi \in V^*$, il existe un unique $y_\phi \in V$ tel que :

$$\forall x \in V, \phi(x) = \langle y_\phi, x \rangle$$

Ainsi cela aura pour conséquence l'identification de V^* à V par isomorphisme pour $\mathbb{R}^d$.

Définition 4.1.12

Soit $\mathcal{C}$ un cône dans un espace vectoriel V . Le cône dual $\mathcal{C}^*$ est défini par :

$$\mathcal{C}^* = \{y \in V^* : \langle x, y \rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{C}\}.$$

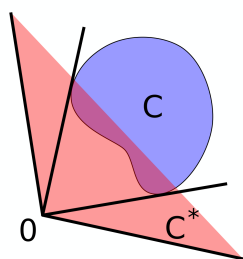


FIGURE 4.2 – Cône dual par Oleg Alexandrov 03 :03, 2 June 2007 (UTC), Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2188889>.

Remarque :

Si V est euclidien (donc isomorphe à $\mathbb{R}^n$) on peut l'écrire :

$$\mathcal{C}^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{C}\}.$$

Donc pour un produit scalaire associé à $A \in \mathcal{S}_n^{++}$:

$$\mathcal{C}_A^* = \{y \in \mathbb{R}^n : {}^t x A y \geq 0, \forall x \in \mathcal{C}\}.$$

Pour le cône $\mathcal{C}_{can}^*$ pour le produit scalaire canonique on trouve

$$\mathcal{C}_A^* = A^{-1} \mathcal{C}_{can}^*$$

4.1.3 Polaire du cône

Définition 4.1.13

Soit $\mathcal{C}$ un cône convexe de $\mathbb{R}^d$. Alors on définit le polaire de celui-ci de la façon suivante :

$$\mathcal{C}^\circ = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 0, \forall y \in \mathcal{C}\}.$$

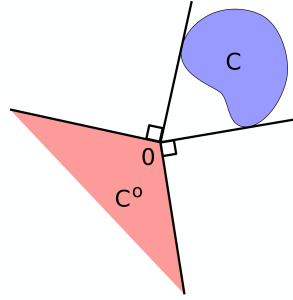


FIGURE 4.3 – Polaire du cône, Oleg Alexandrov, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2115866>.

Remarque :

On remarque alors que $\mathcal{C}^\circ = -\mathcal{C}^*$.

Proposition 4.1.14

$(A + B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ pour A, B des cônes de $\mathbb{R}^d$.

4.2 Généralisation de la notion de polarité à d'autres ensembles dans un espace euclidien

Pour calculer le polaire d'une partie A de $\mathbb{R}^2$, on peut placer A dans un hyperplan affine de $\mathbb{R}^3$ de hauteur arbitraire, prenons par exemple celui pour $z = 1$, puis tracer l'enveloppe du cône $\mathcal{C}_A$ de base A . On trace son cône polaire $\mathcal{C}_A^\circ$ (de génératrices orthogonales à celles de $\mathcal{C}_A$). Ainsi, l'intersection de l'hyperplan affine $z = -1$ avec le cône polaire $\mathcal{C}_A^\circ$ n'est d'autre que le polaire de A .

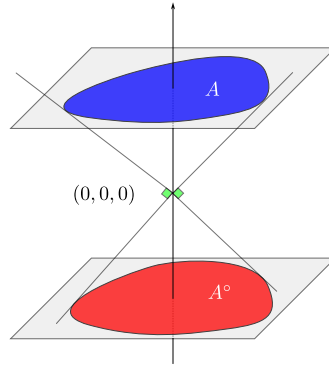


FIGURE 4.4 – Construction du polaire d'un ensemble A dans $\mathbb{R}^2$.

4.2.1 Définition

Définition 4.2.1

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ non vide. On appelle

$$A^\circ = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, x \rangle \leq 1, \forall x \in A\}$$

le polaire de A .

Autre point de vue

Proposition 4.2.2

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ non vide son polaire est une intersection de demi-espaces fermés. En effet,

$$A^\circ = \bigcap_{x \in A} \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, x \rangle \leq 1\}$$

De plus, A° est un **convexe**.

PREUVE. Ceci découle de la Proposition 2.1.6. □

4.2.2 Exemples

Exemple 4.2.3 (Polaire dans $\mathbb{R}$.)

Soit $K = [-a, a]$, avec $a > 0$, un corps convexe symétrique par rapport à 0. Alors

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R} : xy \leq 1, \forall y \in K\}.$$

Regardons ce qu'il se passe aux bords. Soit $x \in \mathbb{R}$, x appartient à K° si et seulement si :

$$\begin{cases} xa \leq 1 \\ -xa \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq \frac{1}{a} \\ x \geq -\frac{1}{a} \end{cases}$$

C'est-à-dire si et seulement si $x \in \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]$. Finalement :

$$K^\circ = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right].$$

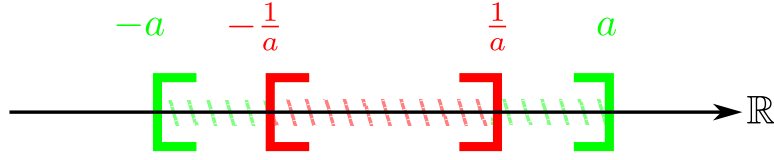


FIGURE 4.5 – Polaire de K pour $a > 1$.

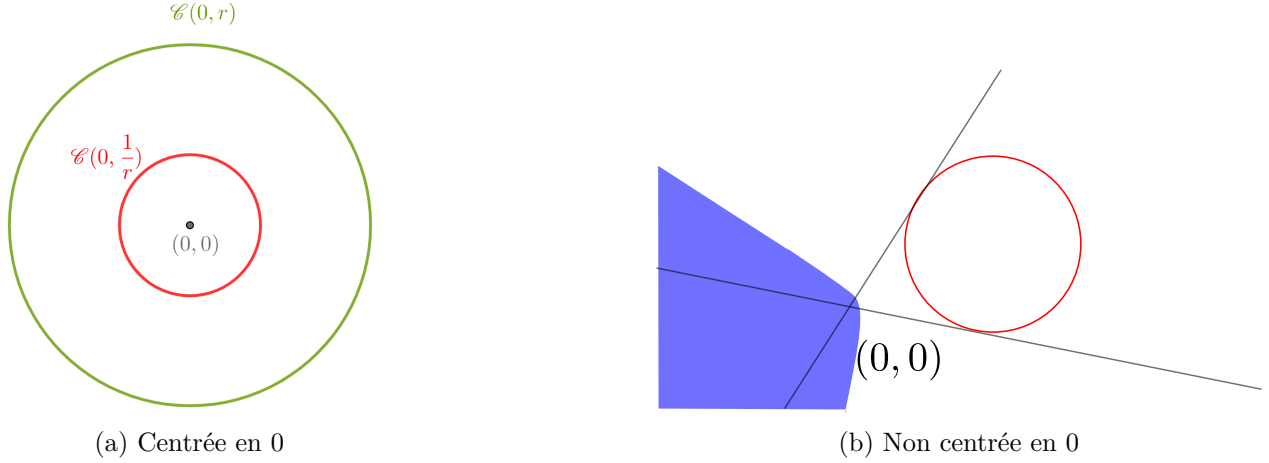


FIGURE 4.6 – Polaires de boules pour la norme 2. Animation [Cha26]

Voir [BCL87, 10.7.11 Polarité, p.177, Vol. 2] pour la méthode de construction.

4.2.3 Propriétés

Proposition 4.2.4

Pour $\mathbb{R}^d$ muni d'un produit scalaire on a $(\mathbb{R}^d)^\circ = \{0\}$ et $\{0\}^\circ = \mathbb{R}^d$.

PREUVE. $(\mathbb{R}^d)^\circ = \{c \in \mathbb{R}^d : \langle c, x \rangle \leq 1 \text{ pour tout } x \in A\}$. L'inclusion réciproque est directe car $\langle 0, x \rangle = 0$ pour tout $x \in A$. Soit $c \in (\mathbb{R}^d)^\circ$ alors $\langle c, x \rangle \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Supposons par l'absurde qu'il existe $c \neq 0$ qui vérifie $\langle c, x \rangle \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Prenons $x = \lambda c$ avec $\lambda > \frac{1}{\|c\|^2}$ alors $\langle c, \lambda c \rangle = \lambda \|c\|^2 > 1$, ce qui est absurde. On montre très facilement le 2^e résultat car le produit scalaire de tout point de $\mathbb{R}^d$ avec 0 est nul donc, en particulier, inférieur ou égal à 1. $\square$

Proposition 4.2.5

Soient $A \subset B$ des parties non vides de E un espace vectoriel. Alors $B^\circ \subset A^\circ$.

PREUVE. Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}^d$ non vides. Soit $c \in B^\circ$ alors pour tout $x \in B$, $\langle c, x \rangle \leq 1$. Soit $x \in A$, comme $A \subset B$ on a $\langle c, x \rangle \leq 1$ ainsi $c \in A^\circ$. D'où $B^\circ \subset A^\circ$. $\square$

Proposition 4.2.6

Soit $(A_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de parties non vides de $\mathbb{R}^d$. Alors

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ.$$

PREUVE. Soit I un ensemble quelconque non vide. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties non vides de $\mathbb{R}^d$. Alors $(\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ$ est non vide. Alors $(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset A_i \subset (\bigcup_{i \in I} A_i)$ pour tout $i \in I$ donc $(\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ \subset (A_i)^\circ \subset (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ$ pour tout $i \in I$. Ainsi $(\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ \subset (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \subset (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ$.

Soit $y \in (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ$ alors pour tout $i \in I$, pour tout $x \in A_i$, $\langle y, x \rangle \leq 1$. Soit $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i)$, alors il existe $j \in I$ tel que $x \in A_j$. Ainsi par le résultat ci-dessus on a $\langle y, x \rangle \leq 1$. On en déduit donc que : $\forall x \in (\bigcup_{i \in I} A_i)$, $\langle y, x \rangle \leq 1$ et donc $y \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ$. $\square$

Proposition 4.2.7

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Alors pour $\alpha \neq 0$, on a

$$(\alpha A)^\circ = \frac{1}{\alpha} A^\circ.$$

PREUVE. Soient $\alpha > 0$ et $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble non vide. Par définition de l'ensemble polaire, on a : c appartient à $(\alpha A)^\circ$ si et seulement si :

$$\forall x \in \alpha A, \quad \langle c, x \rangle \leq 1.$$

Tout élément $x \in \alpha A$ s'écrit sous la forme $x = \alpha x'$ avec $x' \in A$. L'équivalence devient alors :

$$\begin{aligned} c \in (\alpha A)^\circ &\iff \forall x' \in A, \langle c, \alpha x' \rangle \leq 1 \\ &\iff \forall x' \in A, \alpha \langle c, x' \rangle \leq 1 \quad (\text{par linéarité à droite}) \\ &\iff \forall x' \in A, \quad \langle \alpha c, x' \rangle \leq 1 \\ &\iff \alpha c \in A^\circ \\ &\iff c \in \frac{1}{\alpha} A^\circ \end{aligned}$$

D'où

$$(\alpha A)^\circ = \frac{1}{\alpha} A^\circ.$$

$\square$

Proposition 4.2.8

Le polaire d'un polytope $P = \text{Conv}(v_1, \dots, v_m)$ est

$$P^\circ = \{c \in \mathbb{R}^d : \langle c, v_i \rangle \leq 1 \text{ pour } i = 1, \dots, m\}.$$

PREUVE. Soit $P = \text{Conv}(v_1, \dots, v_m)$ un polytope de $\mathbb{R}^d$.

Soit $c \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle c, v_i \rangle \leq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Soit $x \in P$ alors il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$ avec les $\alpha_i \geq 0$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$. Donc

$$\langle c, x \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle c, v_i \rangle \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i \leq 1.$$

Ainsi on a montré que $\{c \in \mathbb{R}^d : \langle c, v_i \rangle \leq 1 \text{ pour } i = 1, \dots, m\} \subset P^\circ$.

Soit $c \in \{c \in \mathbb{R}^d : \langle c, x \rangle \leq 1, \forall x \in P\}$. Comme l'inégalité est vraie pour tout $x \in P$ cela l'est encore quand $x = v_1, \dots, v_m$.

$\square$

Théorème 4.2.9 du Bipolaire

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Alors :

$$A^{\circ\circ} = A \iff A \text{ est un convexe fermé contenant l'origine.}$$

De manière générale on a seulement $A \subset A^{\circ\circ}$.

PREUVE. $\Rightarrow$ Supposons que $A = A^{\circ\circ}$. Par définition, le polaire d'un ensemble quelconque est toujours une intersection de demi-espaces fermés contenant l'origine, c'est donc toujours un convexe fermé contenant 0. Comme A est le polaire de A° par hypothèse alors A est nécessairement un convexe fermé contenant l'origine.

$\Leftarrow$ Supposons que A est un convexe fermé tel que $0 \in A$.

$\subseteq$ L'inclusion $A \subset A^{\circ\circ}$ est toujours vraie. En effet, soit $x \in A$, alors pour tout $y \in A^\circ$, la définition du polaire donne $\langle x, y \rangle \leq 1$ i.e. $x \in A^{\circ\circ}$.

$\supseteq$ Supposons qu'il existe un point u tel que $u \in (A^\circ)^\circ$ mais $u \notin A$. Comme A est fermé et convexe, d'après le théorème de séparation il existe un hyperplan affine séparant strictement u de A . C'est-à-dire, il existe un vecteur $c \neq 0$ et un α tels que $\langle c, x \rangle < \alpha$ pour tout $x \in A$ et $\langle c, u \rangle > \alpha$.

Puisque $0 \in A$, on en déduit que $\alpha > 0$. Considérons $b = \frac{1}{\alpha}c$. Nous avons $\langle b, x \rangle < 1$ pour tout $x \in A$ et par conséquent $b \in A^\circ$. Cependant, $\langle b, u \rangle > 1$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $u \in (A^\circ)^\circ$. Par conséquent $(A^\circ)^\circ \subset A$. Ce qui achève la preuve. $\square$

Proposition 4.2.10

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. $A^\circ = A$ si et seulement si A est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$ pour la norme induite par le produit scalaire.

PREUVE. Notons $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée, où $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

$\Rightarrow$ Supposons $A = B$.

$\subseteq$ Soient $x, y \in B$. Par l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*, $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \leq 1 \times 1 = 1$.

$\supseteq$ Soit $y \in B^\circ$. Pour tout $x \in B$, on a $\langle x, y \rangle \leq 1$. Si $y \neq 0$, posons $x = \frac{y}{\|y\|}$, qui appartient bien à B . On a alors $\left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle \leq 1 \implies \frac{\|y\|^2}{\|y\|} \leq 1 \implies \|y\| \leq 1$. Donc $y \in B$, ce qui prouve $B^\circ \subset B$.

Conclusion : $B^\circ = B$. Donc si $A = B$, on a bien $A^\circ = A$.

$\Leftarrow$ Supposons $A^\circ = A$.

$\subseteq$ Soit $x \in A$. Puisque $A = A^\circ$, on a aussi $x \in A^\circ$. Par définition de l'ensemble polaire de A , le produit scalaire de tout élément de A avec tout élément de A° est inférieur ou égal à 1. Donc $\langle x, x \rangle \leq 1$, soit $\|x\|^2 \leq 1$, et donc $x \in B$. Cela prouve que $A \subset B$.

$\supseteq$ Par inversion par passage au polaire on obtient $B^\circ \subset A^\circ$. Or, $B^\circ = B$, et par hypothèse $A^\circ = A$. On obtient donc $B \subset A$. Par double inclusion, $A = B$. $\square$

Proposition 4.2.11

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. $A^{\circ\circ\circ} = A^\circ$ pour $A \subset \mathbb{R}^d$ non vide.

PREUVE. $\subseteq$ D'une part, $A^\circ \subset (A^\circ)^{\circ\circ} = A^{\circ\circ\circ}$

$\supseteq$ D'autre part, $A \subset A^{\circ\circ}$. Par passage au polaire $(A^{\circ\circ})^\circ \subset A^\circ$.

Par double inclusion, on conclut que $A^{\circ\circ\circ} = A^\circ$. $\square$

Théorème 4.2.12

Soient $K \subset \mathbb{R}^d$ et $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une transformation linéaire. Alors

$$(T(K))^\circ = (T^*)^{-1}(K^\circ).$$

PREUVE. Par définition :

$$(T(K))^\circ = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, T(x) \rangle \leq 1, \forall x \in K\} = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, T^*(y) \rangle \leq 1, \forall x \in K\}.$$

Il faut donc que $T^*(y) \in K^\circ$ i.e. $y \in (T^*)^{-1}K^\circ$. □

Chapitre 5

Conjecture de *Mahler*

Nous avons donc défini toutes les notions requises pour parler de la conjecture de *Mahler* : corps convexe, symétrie, polaire, polytope de *Hanner*.

Ainsi, dans ce chapitre, nous commencerons en nous attaquant à la preuve de la conjecture de *Mahler* pour le cas $d = 2$. *Mahler*, lui-même, montre ce résultat dans [Mah38 ; Mah39]. Toutefois, nous suivrons une méthode plus moderne proposée dans [IS20].

Nous montrerons ensuite, le résultat pour d quelconque mais dans le cas des corps convexes « $\mathbb{R}$ -inconditionnels » et « $\mathbb{C}$ -inconditionnels ». On remarquera cependant que la minoration pour les corps convexes « $\mathbb{C}$ -inconditionnels » sera quelque peu différente en raison de minimiseurs différents.

Pour la preuve du cas $d = 3$, on pourra regarder l'article de *Iriyeh* et *Shibata* [IS20]. À noter que la conjecture reste ouverte pour le cas $d \geq 4$.

5.1 Produit de *Mahler*

5.1.1 Définition

Définition 5.1.1

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un corps convexe symétrique par rapport à l'origine. Le **produit de *Mahler*** de K , noté $\mathcal{M}(K)$ est défini comme le produit des volumes de K et de son polaire K° :

$$\mathcal{M}(K) = \text{vol}_d(K) \cdot \text{vol}_d(K^\circ) .$$

5.1.2 Propriétés

Proposition 5.1.2

Soient $K \subset \mathbb{R}^d$ un corps convexe symétrique par rapport à l'origine et $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ une transformation linéaire. Alors

$$\mathcal{M}(T(K)) = \mathcal{M}(K) .$$

On dit que le **produit de *Mahler*** est invariant par transformation linéaire.

PREUVE. On va appliquer le théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^d$ sur $\text{int}(K)$ ouvert. T est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ donc de $\text{int}(K) \rightarrow T(\text{int}(K))$ deux ouverts bornés. En effet, $T(\text{int}(K))$ est l'image réciproque de $\text{int}(K)$ par T^{-1} bijective donc comme $\text{int}(K)$ est un ouvert et T continue, c'est bien un ouvert. Il est de plus borné car $\text{int}(K)$ l'est. Ainsi :

$$\text{vol}_d(T(K)) = \text{vol}_d(T(\text{int}(K))) = \int \cdots \int_{T(\text{int}(K))} dv_1 \dots dv_d = \int \cdots \int_{\text{int}(K)} \det T \, du_1 \dots du_d .$$

Car, comme T linéaire on a la matrice jacobienne $J_T(u) = T$ pour tout $u \in \text{int } K$ donc $|\det J_T(u)| = |\det T|$. Donc

$$\text{vol}_d(T(K)) = |\det T| \text{vol}_d(K). \quad (5.1)$$

Par le [Théorème 4.2.12](#), on a :

$$(T(K))^\circ = (T^*)^{-1}(K^\circ).$$

Par (5.1) on a :

$$\text{vol}_d((T(K))^\circ) = \left| \det \left((T^*)^{-1} \right) \right| \text{vol}_d(K^\circ) = \frac{1}{|\det T|} \text{vol}_d(K^\circ).$$

Ainsi :

$$\mathcal{M}(T(K)) = \text{vol}_d(T(K)) \cdot \text{vol}_d((T(K))^\circ) = |\det T| \text{vol}_d(K) \cdot \frac{1}{|\det T|} \text{vol}_d(K^\circ) = \mathcal{M}(K)$$

□

5.2 Conjecture de *Mahler*

5.2.1 Énoncé

Conjecture de *Mahler* (1939)

Pour tout corps convexe symétrique par rapport à l'origine $K \subset \mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathcal{M}(K) \geq \frac{4^d}{d!}. \quad (5.2)$$

L'égalité est atteinte si K est un polytope de *Hanner* ([définition 2.4.12](#)).

A l'origine *Mahler* avait émis l'hypothèse que le minimum était atteint pour l'hypercube (qui est lui-même un polytope de *Hanner*). En dimension 2, ceci correspond au carré.

5.2.2 Justification de la recherche d'un minimum

Proposition 5.2.1

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un corps convexe symétrique par rapport à 0. Alors, on a

$$d^{-\frac{d}{2}} \cdot \mathcal{M}(B_d) \leq \mathcal{M}(K) \leq d^{\frac{d}{2}} \cdot \mathcal{M}(B_d),$$

où B_d est la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

PREUVE. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un corps convexe symétrique par rapport à 0. Par le [Théorème 3.1.9](#), on peut se ramener au cas où $B_d \subset K \subset \sqrt{d}B_d$. On a

$$\mathcal{M}(\sqrt{d}B_d) = \mathcal{M}(B_d).$$

par la [Proposition 5.1.2](#). Comme $B_d \subset K \subset \sqrt{d}B_d$ on a $K^\circ \subset B_d^\circ$. Donc $\text{vol}_d(K^\circ) \leq \text{vol}_d(B_d^\circ)$ et $\text{vol}_d(K) \leq d^{\frac{d}{2}} \cdot \text{vol}_d(B_d)$. D'où

$$\mathcal{M}(K) \leq d^{\frac{d}{2}} \cdot \mathcal{M}(B_d)$$

par stricte positivité des volumes. En effet, puisque $\text{int}(K) \neq \emptyset$ est symétrique (par rapport à l'origine), il contient au moins une petite boule ouverte $B(0, \varepsilon)$. Par conséquent, son volume est

strictement positif : $\text{vol}_d(K) > 0$. De même, on a $B_d \subset K$ et $(\sqrt{d}B_d)^\circ = \frac{1}{\sqrt{d}}B_d^\circ \subset K^\circ$. Donc $\text{vol}_d(K) \geq \text{vol}_d(B_d)$ et $\text{vol}_d(K^\circ) \geq d^{-\frac{d}{2}} \text{vol}_d(B_d^\circ)$. Ainsi, on a

$$\mathcal{M}(K) \geq d^{-\frac{d}{2}} \cdot \mathcal{M}(B_d).$$

□

Les travaux [San49 ; Bla17] donnent même un maximum pour le produit de *Mahler* et, celui-ci est atteint pour la boule unité.

L'encadrement que l'on vient d'obtenir, nous montre qu'il est justifié de se poser la question de l'existence du minimum car on sait qu'il est non nul.

5.2.3 Preuve de la conjecture dans le cas $d = 2$

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un corps convexe symétrique par rapport à l'origine.

Réduction de l'étude

On détaille ici, la preuve d'Iriyeh et Shibata [IS20, p.6-7]. Dans ce même article, il est aussi démontré le cas $d = 3$. On pose :

$$K_{++} = K \cap (\mathbb{R}_+)^2, \quad K_{--} = -K_{++} \quad (5.3)$$

$$K_{-+} = K \cap (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+), \quad K_{+-} = -K_{-+} \quad (5.4)$$

Ces parties sont convexes. Comme K est symétrique par rapport à l'origine, quitte à appliquer une rotation, on peut supposer que l'aire $|K_{++}|$ est égale à $|K_{-+}|$. En effet, d'après le *théorème des valeurs intermédiaires* appliqué à la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto |K_{++}(\theta)| - |K_{-+}(\theta)| \end{aligned}$$

qui est continue¹. On remarque que :

$$f(0) = |K_{++}| - |K_{-+}| \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left|K_{++}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| - \left|K_{-+}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |K_{-+}| - |K_{++}| = -f(0).$$

Ainsi, il existe $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(\theta_0) = 0$, c'est-à-dire $|K_{++}(\theta_0)| = |K_{-+}(\theta_0)|$.

Comme le produit de *Mahler* est invariant par transformation linéaire (voir Proposition 5.1.2), on peut toujours se ramener à cette situation avec $B := (1, 0)$ et $C := (0, 1) \in \partial K$. On pose $O = (0, 0)$.

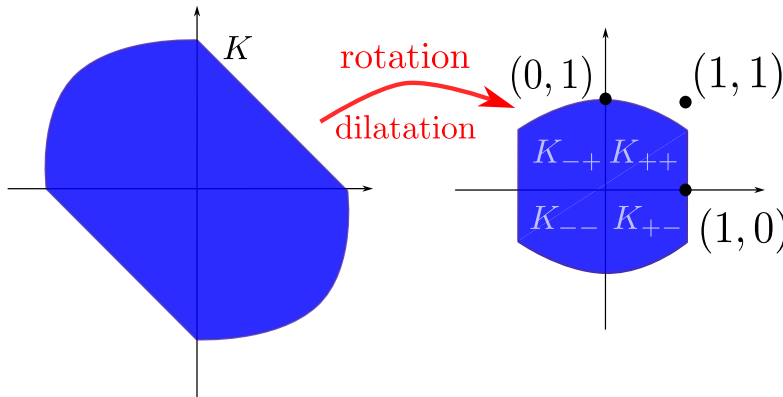


FIGURE 5.1 – Réduction de l'étude au cas où $B, C \in \partial K$ et $|K_{++}| = |K_{-+}| = \frac{|K|}{4}$

1. On pose $I_\theta = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(R_\theta(x)) dx$. On s'intéresse à $I_\theta - I_0$. On montre ensuite que $x \mapsto \chi_A(R_\theta(x)) - \chi_A(R_0(x))$ est lipschitzienne et bornée.

Pour tout $(u, v) \in K^\circ$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \pm B, (u, v) \rangle &\leq 1 \quad \text{i.e.} \quad \pm u \leq 1, \\ \langle \pm C, (u, v) \rangle &\leq 1 \quad \text{i.e.} \quad \pm v \leq 1. \end{aligned}$$

D'où $K^\circ \subset [-1, 1]^2$.

Cas où $(1, 1) \in K^\circ$:

Alors pour tout $(x, y) \in K$, on a $x + y \leq 1$. Comme $O, B, C \in K_{++}$ et que le cadran K_{++} est convexe et délimité par la droite d'équation $y \leq 1 - x$, on trouve que $K_{++} = \text{Conv}\{O, B, C\}$. Par symétrie, on a $K_{--} = \text{Conv}\{O, -B, -C\}$. De plus, $|K_{++}| = \frac{1}{2}$ et donc $|K| = 2$.

On a $(-1, 0)$ et $(0, 1) \in K_{-+}$. Par convexité, $\text{Conv}\{O, -B, C\} \subset K_{-+}$. Or $|K_{-+}| = 1/2 = |\text{Conv}\{O, -B, C\}|$, donc $K_{-+} = \text{Conv}\{O, -B, C\}$. Ainsi,

$$K = \text{Conv}\{\pm(1, 0), \pm(0, 1)\} = \overline{B_1(0, 1)}.$$

Donc $K^\circ = \overline{B_\infty(0, 1)}$ et finalement $s(K) = 2 \times 4 = 8$. Si $(-1, 1) \in K^\circ$ on retrouve le même résultat.

Cas où $\pm(1, 1)$ et $\pm(-1, 1) \notin K^\circ$:

Comme $B \in K^\circ$ et $(1, 1) \notin K^\circ$ on peut prendre B° tel que $\langle B, B^\circ \rangle = 1$. Ainsi B° s'écrit $(1, b)$ avec $-1 < b < 1$. De la même façon, il existe $C^\circ \in \partial K^\circ$ qui s'écrit $(c, 1)$ avec $-1 < c < 1$. Comme en 5.3 et 5.4, on utilise les mêmes notations pour K° .

Soit $(u, v) \in K_{++}^\circ$. Les triangles $\text{Conv}\{O, B^\circ, P\}$ et $\text{Conv}\{O, P, C^\circ\}$ sont inclus dans K_{++}° .
Donc

$$|OB^\circ P| + |OPC^\circ| \leq |K_{++}^\circ| \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & b \\ u & v \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & c \\ u & v \end{vmatrix} \leq |K_{++}^\circ|.$$

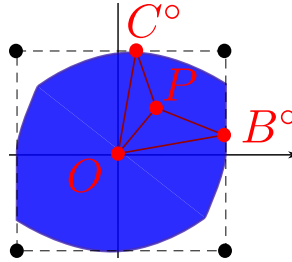


FIGURE 5.2 – $OB^\circ P$ et OPC° sont dans K_{++}°

Ce qui donne

$$\frac{1}{2} v \underbrace{(1-c)}_{>0} + \frac{1}{2} u \underbrace{(1-b)}_{>0} \leq |K_{++}^\circ|.$$

On procède de la même manière pour K_{-+}° . On trouve

$$P_1 := \frac{(1-b, 1-c)}{2|K_{++}^\circ|} \in K_{++}, \quad P_2 := \frac{(-1-b, 1-c)}{2|K_{-+}^\circ|} \in K_{-+}$$

car $P_1 \cdot (u, v) \leq 1$ pour $(u, v) \in K_{++}$ et $P_2 \cdot (u, v) \leq 1$ pour $(u, v) \in K_{-+}$ et on vérifie les hypothèses du Théorème 4.2.9. On trouve que $P_3 := \frac{2(1,1)}{|K|}$, $P_4 := \frac{2(-1,1)}{|K|}$ sont deux points de K° . En effet, soit $(x, y) \in K$:

$$(x, y) \cdot \frac{2}{|K|} (1, 1) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{|K|} (x + y) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (x + y) \leq \frac{|K|}{4}.$$

Ce qui n'est d'autre que l'aire du rectangle sur la figure suivante.

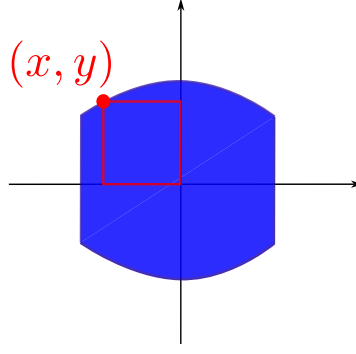


FIGURE 5.3 – $\text{Conv}\{(x, y), (x, 0), (y, 0), (0, 0)\}$

On procède de la même manière sur pour P_4 . Ainsi, on a $P_1 \cdot P_3 \leq 1$ et $P_2 \cdot P_4 \leq 1$ i.e.

$$(1, 1) \cdot (1 - b, 1 - c) \leq |K| |K_{++}^\circ| \quad \text{et} \quad (-1, 1) \cdot (-1 - b, 1 - c) \leq |K| |K_{-+}^\circ|$$

Comme $|K^\circ| = 2(|K_{++}^\circ| + |K_{-+}^\circ|)$ par symétrie du polaire on trouve que

$$s(K) = |K| |K^\circ| = 2|K| (|K_{++}^\circ| + |K_{-+}^\circ|) \geq 8.$$

Pour le cas d'égalité voir [IS20].

5.3 Corps convexes $\mathbb{R}$ -inconditionnels

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Définition 5.3.1: Corps convexe inconditionnel

Soit $L \subset \mathbb{R}^d$ un corps convexe. On dit qu'il est $\mathbb{R}$ -inconditionnel si pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ il est invariant par la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $e_i^\perp$.

Proposition 5.3.2

Soit $L \subset \mathbb{R}^d$ un corps convexe. Alors L est $\mathbb{R}$ -inconditionnel si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$x = (x_1, \dots, x_d) \in L \iff (\pm x_1, \dots, \pm x_d) \in L \iff (|x_1|, \dots, |x_d|) \in L.$$

Corollaire 5.3.3

Un corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel de $\mathbb{R}^d$ est symétrique par rapport à l'origine.

Corollaire 5.3.4

Soit L un corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel de $\mathbb{R}^d$. Alors L° est aussi $\mathbb{R}$ -inconditionnel.

PREUVE. Soit $y \in L^\circ$. Alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad \langle \pm e_i, y \rangle \leq 1.$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\langle e_i, \pm y \rangle \leq 1 \quad \text{i.e.} \quad \pm y_i \leq 1.$$

D'où L est $\mathbb{R}$ -inconditionnel. □

Théorème 5.3.5 Conjecture de *Mahler* pour les corps convexes réels $\mathbb{R}$ -inconditionnels (*Saint Raymond*)

Pour tout corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel $L \subset \mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathcal{M}(L) \geq \frac{4^d}{d!} . \quad (5.5)$$

L'égalité est atteinte si L est un hypercube.

Ce résultat a été initialement prouvé par *Jean Saint-Raymond* en 1981 (voir [CRS81]).

PREUVE. Nous suivons ici, une nouvelle preuve (voir [FMZ23, p.18-19]). On va raisonner par récurrence sur d .

Initialisation $d = 1$:

Soit $L \subset \mathbb{R}$ un corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel donc symétrique par rapport à 0.

D'après l'exemple 4.2.3, $\text{vol } L = 2a$ et $\text{vol } L^\circ = \frac{2}{a}$. D'où, $\mathcal{M}(L) = 4 \geq 4$.

Hérédité : Supposons que l'inégalité soit vérifiée pour tout corps convexe L $\mathbb{R}$ -inconditionnel de $\mathbb{R}^{d-1}$. Dans la même idée que pour le cas $d = 2$ pour les convexes symétriques, on définit

$$L_+ := L \cap \mathbb{R}_+^d, \quad L_+^\circ := L^\circ \cap \mathbb{R}_+^d .$$

Alors on a $\mathcal{M}(L) = \text{vol}_d(2L_+) \text{vol}_d(2L_+^\circ) = 4^d \text{vol}_d(L_+) \text{vol}_d(L_+^\circ)$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$, alors

$$x \in L_+ \Leftrightarrow \forall y \in L_+^\circ \langle x, y \rangle \leq 1$$

$$x \in L_+^\circ \Leftrightarrow \forall y \in L_+ \langle x, y \rangle \leq 1$$

car $(L_+^\circ)^\circ = L_+$ par Théorème 4.2.9.

On s'intéresse maintenant aux $L_i := L \cap \{x_i = 0\}$ qui est un corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel de $\mathbb{R}^{d-1}$ et on a $(L_i)^\circ = (L^\circ)_i$. On note $(L_i)_+ := L_i \cap \mathbb{R}_+^d$. Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in L_+$, notons $C_i(x)$ l'enveloppe convexe de la réunion de $\{x\}$ et $(L_i)_+$. C'est un cône de sommet x et alors on a

$$\text{vol}_d(C_i(x)) = \frac{x_i}{d} \text{vol}_{d-1}((L_i)_+) .$$

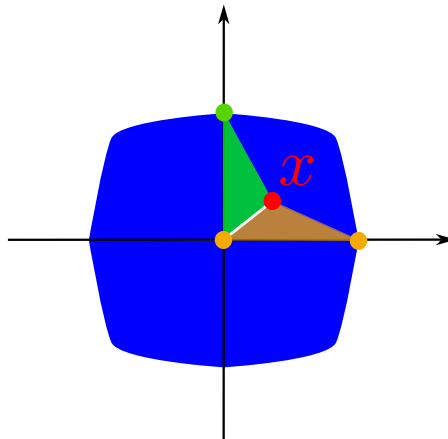


FIGURE 5.4 – Intersection de $C_1(x)$ (en vert) et $C_2(x)$ (en orange) dans le cas $d = 2$.

Comme $C(x) := \bigcup_{i=1}^d C_i(x) \subset L_+$, on a

$$\text{vol}_d(L_+) \geq \text{vol}_d(C(x)) = \text{vol}_d \sum_{i=1}^d (C_i(x)) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d x_i \text{vol}_{d-1}((L_i)_+) . \quad (5.6)$$

En effet, commençons par montrer que pour tous $i \neq j$, $\text{vol}_d(C_i(x) \cap C_j(x)) = 0$. Voir les Figures 5.4 et 5.5. On a pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$C_i(x) = \{(1 - \lambda)x + \lambda z : z \in (L_i)_+, \lambda \in [0, 1]\} \quad (5.7)$$

Soit $y \in C_i(x) \cap C_j(x)$. D'après (5.7), il existe $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $(a, b) \in (L_i)_+ \times (L_j)_+$ tels que :

$$y = (1 - \alpha)x + \alpha a = (1 - \beta)x + \beta b .$$

On suppose $x_i > 0$ car si $x_i = 0$ alors le volume est immédiatement nul. Ainsi en regardant les i^e et j^e coordonnées de cette égalité on a :

$$y_i = (1 - \alpha)x_i = (1 - \beta)x_i + \beta b_i \quad \text{et} \quad y_j = (1 - \alpha)x_j + \alpha a_j = (1 - \beta)x_j .$$

Comme $\alpha a_j \geq 0$ et $(1 - \beta)x_j \geq 0$ on a $(1 - \alpha)x_j \leq (1 - \beta)x_j$ donc $\alpha \geq \beta$. Idem par symétrie, on trouve pour i , $\alpha \leq \beta$ donc $\alpha = \beta$ donc $a = b$ si $\alpha > 0$. Ainsi, y s'écrit comme la combinaison convexe de x et $(L_i)_+ \cap (L_j)_+$.

De plus, on a $(L_i)_+ \cap (L_j)_+$ qui est inclus dans $\{x_i = 0\} \cap \{x_j = 0\}$ un sous-espace vectoriel de dimension $d - 2$. Par convexité et comme ils partagent le même sommet x , l'intersection $C_i(x) \cap C_j(x)$ est contenue dans l'enveloppe convexe du point x et de $\{x_i = 0\} \cap \{x_j = 0\}$. D'où $C_i(x) \cap C_j(x)$ est contenu dans un sous espace affine de dimension au plus $d - 1$. Donc $\text{vol}_d(C_i(x) \cap C_j(x)) = 0$.

Par (5.6) et en posant $a := \frac{1}{d \text{vol } L_+} (\text{vol}_{d-1}((L_1)_+), \dots, \text{vol}_{d-1}((L_d)_+))$ on a alors pour tout $x \in L_+$, $\langle a, x \rangle \leq 1$ i.e. $a \in L_+^\circ$. On pose $a^* := \frac{1}{d \text{vol } L_+^\circ} (\text{vol}_{d-1}((L_1^\circ)_+), \dots, \text{vol}_{d-1}((L_d^\circ)_+))$ et par la même équation on a $a^* \in L_+$. Ainsi, on $\langle a, a^* \rangle \leq 1$ ce qui se réécrit

$$\frac{1}{d^2 \text{vol}_d(L_+) \text{vol}_d(L_+)} \sum_{i=1}^d x_i \text{vol}_{d-1}((L_i)_+) \text{vol}_{d-1}((L_i^\circ)_+) \leq 1 .$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\text{vol}_{d-1}(L_i) = 2^{d-1} \text{vol}_{d-1}((L_i)_+)$ et $\text{vol}_{d-1}(L_i) = 2^{d-1} \text{vol}_{d-1}((L_i^\circ)_+)$. De plus, $L_i \in \mathbb{R}^{d-1}$ est $\mathbb{R}$ -inconditionnel donc $\mathcal{M}(L_i) \geq \frac{4^{d-1}}{(d-1)!}$ par hypothèse de récurrence.

Ainsi,

$$\mathcal{M}(L) \geq \frac{4}{d^2} \sum_{i=1}^d \text{vol}_{d-1}(L_i) \text{vol}_{d-1}(L_i^\circ) \geq \frac{4}{d^2} \times d \times \frac{4^{d-1}}{(d-1)!} = \frac{4^d}{d!} .$$

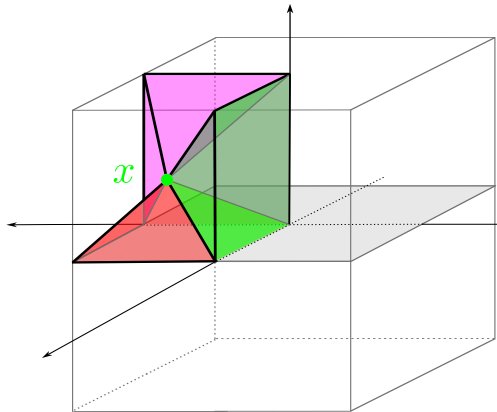


FIGURE 5.5 – $C_1(x)$ (en vert), $C_2(x)$ (en rose), $C_3(x)$ (en rouge) pour le cube.

Pour le cas d'égalité, voir [CRS81].

□

5.3.1 Corps convexes $\mathbb{C}$ -inconditionnels

Définition 5.3.6: Corps convexes $\mathbb{C}$ -inconditionnels

Soit $L \subset \mathbb{C}^d$ un corps convexe complexe on dit qu'il est $\mathbb{C}$ -inconditionnel s'il est invariant par $U_\theta := \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d})$ pour tous $\theta_1, \dots, \theta_d \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ceci se dit aussi invariant par l'action du tore.

Proposition 5.3.7

Soit $L \subset \mathbb{C}^d$ un corps convexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le corps L est $\mathbb{C}$ -inconditionnel.
- (ii) Pour tout vecteur $z \in \mathbb{C}^d$, z appartient à L si et seulement si $U_\theta z$ appartient à L pour tout $\theta \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$.
- (iii) Pour tout vecteur $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, z appartient à L si et seulement si $(|z_1|, \dots, |z_d|)$ appartient à L .

Proposition 5.3.8

Soit $L \subset \mathbb{C}^d$ un corps convexe invariant par U_θ pour tout $\theta \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$. Alors L° l'est aussi.

PREUVE. Soit L un tel ensemble. Alors par définition on a

$$L^\circ := \left\{ \omega \in \mathbb{C}^d : \Re \langle \omega, z \rangle \leq 1, \forall z \in L \right\}.$$

Voir [Bou07, p.68].

Soit $\omega \in L^\circ$, alors

$$\Omega := \left\langle \left(\omega_1 e^{i\theta_1}, \dots, \omega_d e^{i\theta_d} \right), z \right\rangle = \sum_{k=1}^d \overline{e^{i\theta_k} \omega_k} z_k = \sum_{k=1}^d \overline{\omega_k} \left(e^{-i\theta_k} z_k \right)$$

par invariance de L on a bien $\Re(\Omega)$ inférieure ou égale à 1. D'où L° invariant par $\text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d})$. $\square$

On va introduire quelques notations qui nous seront très utiles pour la preuve du théorème pour les corps convexes $\mathbb{C}$ -inconditionnel.

Notation : On pose

$$\begin{aligned} \nu_k : \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt[k]{|x|^k + |y|^k} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \|\cdot\|_L : \quad \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \min\{\alpha \in \mathbb{R}_+^* : \frac{v}{\alpha} \in L\} \end{aligned}$$

avec L un corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel.

Lemme 5.3.9

Soit L un corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel. Soient $(x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Si $(x_1, \dots, x_d) \leq (y_1, \dots, y_d)$ pour l'ordre produit de $\mathbb{R}_+^d$ alors,

$$\|(x_1, \dots, x_d)\|_L \leq \|(y_1, \dots, y_d)\|_L.$$

PREUVE. Soient $x := (x_1, \dots, x_d)$ et $y := (y_1, \dots, y_d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}_+^d$ tels que $x \leq y$ pour l'ordre produit. Alors, par hypothèse on a $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Donc, pour tout i ,

$$0 \leq \frac{x_i}{\|y\|_L} \leq \frac{y_i}{\|y\|_L}.$$

Par le même raisonnement que pour la convexité de L_1 (comme 4. dans le [Lemme 5.3.14](#)), on a $\frac{x}{\|y\|_L} \in L$. Ainsi, comme $\|x\|_L$ est le minimum, $\|x\|_L \leq \|y\|_L$. □

Théorème 5.3.10

Soit $L \subset \mathbb{R}^d$ un corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel alors l'application $G : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(z) := \|\nu_k(z_1), \dots, \nu_k(z_d)\|_L$$

est une norme.

PREUVE.

1. $\|\cdot\|_L$ est **définie positive**. $\Rightarrow$ Soit $x = 0$. Alors $G(0) = \|0, \dots, 0\|_L = 0$ car $\nu_k, \|\cdot\|_L$ sont des normes. $\Leftarrow$ Soit $z \in \mathbb{C}^d$ tel que $G(z) = 0$. Alors comme $\|\cdot\|_L$ est une norme on a $(\nu_k(z_1), \dots, \nu_k(z_d)) = 0$. Et comme ν_k est une norme on a $z = 0$.
2. G est **homogène** immédiatement par homogénéité de ν_k et $\|\cdot\|_L$.
3. Elle respecte **l'inégalité triangulaire**. Soit $z := (z_1, \dots, z_d), w := (w_1, \dots, w_d) \in \mathbb{C}^d$. Alors comme ν_k est une norme et d'après le [Lemme 5.3.9](#) on a :

$$\begin{aligned} G(z+w) &= \|\nu_k(z_1+w_1), \dots, \nu_k(z_d+w_d)\|_L \\ &\leq \|\nu_k(z_1) + \nu_k(w_1), \dots, \nu_k(z_d) + \nu_k(w_d)\|_L \\ &\leq \|\nu_k(z_1), \dots, \nu_k(z_d)\|_L + \|\nu_k(w_1), \dots, \nu_k(w_d)\|_L \text{ par inégalité triangulaire sur la jauge} \\ &\leq G(z) + G(w) \end{aligned}$$

□

Proposition 5.3.11

Soit L un corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel. Alors

$$(L_{\nu_k})^\circ = (L^\circ)_{\nu_k^*}$$

avec $L_{\nu_k} := \{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : (\nu_k(z_1), \dots, \nu_k(z_d)) \in L\}$.

PREUVE. $\supseteq$ Soient $\xi \in (L^\circ)_{\nu_k^*}$ et $z \in L_{\nu_k}$, alors

$$\langle \xi, z \rangle = \sum_{j=1}^d \Re(\bar{\xi}_j z_j) \leq \sum_{j=1}^d \Re\left(\bar{\xi}_j \frac{z_j}{\nu_k(z_j)}\right) \cdot \nu_k(z_j) \leq \sum_{j=1}^d \nu_k^*(\xi_j) \nu_k(z_j)$$

car $\nu_k\left(\frac{z_j}{\nu_k(z_j)}\right) = 1$ et par définition de ν_k^* . De plus, $\nu_k(z_j) \neq 0$. Ceci n'est rien d'autre que le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$ de $(\nu_k^*(\xi_j))_j$ avec $(\nu_k(z_j))_j$. Comme $(\nu_k^*(\xi_j))_j \in L^\circ$ par définition de $(L^\circ)_{\nu_k^*}$ et $(\nu_k(z_j))_j \in L \cap \mathbb{R}_+^d$ on a bien

$$\langle \xi, z \rangle \leq 1.$$

$\subseteq$ Soit $\xi \in (L_{\nu_k})^\circ$. Par définition, pour tout $z \in L_{\nu_k}$, on a $\langle \xi, z \rangle \leq 1$. Il nous suffit de montrer que $(\nu_k^*(\xi_1), \dots, \nu_k^*(\xi_d)) \in L^\circ$. Soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_d) \in L \cap \mathbb{R}_+^d$. On s'intéresse à $\sum_{j=1}^d \nu_k^*(\xi_j) \ell_j$. Pour

chaque coordonnée j , on a :

$$\begin{aligned}\nu_k^*(\xi_j) \cdot \ell_j &= \left(\max_{\nu_k(z'_j)=1} \Re(\overline{\xi_j} z'_j) \right) \cdot \ell_j \\ &= \max_{\nu_k(z'_j)=1} \left(\Re(\overline{\xi_j} (z'_j \cdot \ell_j)) \right) \\ &= \max_{\nu_k(z''_j)=\ell_j} \left(\Re(\overline{\xi_j} z''_j) \right)\end{aligned}$$

en posant $z''_j = z'_j \ell_j$. Et on a donc $\nu_k(z''_j) = \nu_k(z'_j) \ell_j = 1 \cdot \ell_j = \ell_j$.

Comme la sphère de rayon ℓ_j est compacte et que la fonction est continue, ce maximum est atteint pour un certain complexe z''_j . Posons le vecteur $z'' = (z''_1, \dots, z''_d)$. Par construction, on a $(\nu_k(z''_1), \dots, \nu_k(z''_d)) = (\ell_1, \dots, \ell_d) = \ell$. Comme $\ell \in L$, cela nous donne exactement que $z'' \in L_{\nu_k}$. Ainsi, par sommation et puisque $\xi \in (L_{\nu_k})^\circ$, on a :

$$\sum_{j=1}^d \nu_k^*(\xi_j) \ell_j = \sum_{j=1}^d \Re(\overline{\xi_j} z''_j) = \langle \xi, z'' \rangle \leq 1$$

car $z'' \in L_{\nu_k}$. Ainsi, pour tout $\ell \in L \cap \mathbb{R}_+^d$, et donc pour tout $\ell \in L$ (par $\mathbb{R}$ -inconditionnalité de L), on en conclut que le vecteur $(\nu_k^*(\xi_1), \dots, \nu_k^*(\xi_d))$ est dans L° . D'où $\xi \in (L^\circ)_{\nu_k^*}$. $\square$

Corollaire 5.3.12

Soit L un corps convexe inconditionnel. Alors

$$(L_1)^\circ = L_\infty$$

avec $L_1 := L_{\nu_1}$ et $L_\infty := L_{\nu_\infty}$ où $\nu_\infty(x, y) := \max(|x|, |y|)$.

Remarque :

$$L = L_{\nu_2}$$

Lemme 5.3.13

Soit L un corps convexe $\mathbb{C}$ -inconditionnel. Alors

$$\text{vol}_{2d}(L) = (2\pi)^d \int_{\Pi(L)} r_1 \cdots r_d \, dr_1 \cdots dr_d \text{ et } \text{vol}_{2d}(L^\circ) = (2\pi)^d \int_{\Pi(L^\circ)} r_1 \cdots r_d \, dr_1 \cdots dr_d$$

en posant

$$\begin{aligned}\Pi : \quad \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathbb{R}_+^d \\ (z_1, \dots, z_d) &\longmapsto (|z_1|, \dots, |z_d|) \quad .\end{aligned}$$

PREUVE. Soit L un corps convexe $\mathbb{C}$ -inconditionnel.

On a alors

$$\text{vol}_d(L) = \int_L dz_1 \cdots dz_n = \text{vol}_d(\text{int } L) .$$

Comme $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^{2d}$, cela revient à considérer le volume

$$\text{vol}_{2d}(L) = \int_L dx_1 dy_1 \cdots dx_d dy_d .$$

Comme L est invariant par U_θ , on pose

$$\begin{aligned}\psi : \quad (\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[)^d &\longrightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ (r_1, \theta_1, \dots, r_d, \theta_d) &\longmapsto (r_1 \cos(\theta_1), r_1 \sin(\theta_1), \dots, r_d \cos(\theta_d), r_d \sin(\theta_d)) \quad .\end{aligned}$$

ψ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme par le *Théorème d'inversion globale* car $(\mathbb{R}_+^*)^d \times]-\pi, \pi[^d =: U$ et $V := \mathbb{R}^{2d}$ sont des ouverts, ses composantes sont $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^1$, elle est injective (cf. changement de variable polaire) et de Jacobien non nul. En effet, pour tous $(r, \theta) \in U$,

$$|J_\psi(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & -r_1 \sin(\theta_1) & & \\ \sin(\theta_1) & r_1 \cos(\theta_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cos(\theta_d) & -r_d \sin(\theta_d) \\ & & & \sin(\theta_d) & r_d \cos(\theta_d) \end{vmatrix} = r_1 \cdots r_d .$$

Ainsi par le *Théorème de changement de variable* pour $\psi : U \rightarrow \text{int } L$ des ouverts bornés on a

$$\text{vol}_{2d}(L) = \int_L dx_1 dy_1 \cdots dx_d dy_d = \int_U |J_\psi(r, \theta)| r d\theta dr .$$

Comme U est un pavé ceci se réécrit

$$\text{vol}_{2d}(L) = \int_{L \cap \mathbb{R}_+^d} r_1 \cdots r_d \left(\int_{]-\pi, \pi[^d} d\theta_1, \dots, d\theta_d \right) dr_1 \cdots dr_d .$$

Par *Fubini* :

$$\boxed{\text{vol}_{2d}(L) = (2\pi)^d \int_{\Pi(L)} r_1 \cdots r_d dr_1 \cdots dr_d .}$$

$\Pi(L) = L \cap \mathbb{R}_+^d$ se vérifie rapidement avec l'hypothèse L est inconditionnel.

De la même manière pour L° , on a la même invariance, on trouve que

$$\boxed{\text{vol}_{2d}(L^\circ) = (2\pi)^d \int_{\Pi(L^\circ)} r_1 \cdots r_d dr_1 \cdots dr_d .}$$

□

Lemme 5.3.14

Soit L un corps convexe $\mathbb{C}$ -inconditionnel alors L_1 est un corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel.

PREUVE. On trouve que

$$L_1 = \{(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) \in \mathbb{R}^{2d} : (|x_1| + |y_1|, \dots, |x_d| + |y_d|) \in \Pi(L)\} .$$

Cela se montre rapidement par équivalence. L_1 est corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel car :

1. Soit $(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) \in L_1$. Alors $(|\pm x_1| + |\pm y_1|, \dots, |\pm x_d| + |\pm y_d|) \in \Pi(L)$. Ce qui nous dit que L_1 est bien **inconditionnel**.
2. $L_1 = f^{-1}(\Pi(L))$ avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2d} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^d \\ (x_i, y_i) & \longmapsto & |x_i| + |y_i| \end{array}$$

continue. Comme $\Pi(L) = L \cap \mathbb{R}_+^d$ fermé alors L_1 est **fermé**. De plus, L_1 est **borné**. Prenons $(x, y) \in L_1$. Comme $\Pi(L)$ est borné, par compacité (image par une application continue d'un compact), il existe $M_i > 0$ tel que $|x_i| + |y_i| \leq M_i$ pour tout i . Donc, $|x_i| \leq M_i$ et $|y_i| \leq M_i$. Donc L_1 est **compact**.

3. $0 \in \text{int } L_1$ car L inconditionnel. Donc $\text{int } L_1 \neq \emptyset$.

4. L_1 est **convexe**. Soient $(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d), (x'_1, y'_1, \dots, x'_d, y'_d) \in L_1$. Soient $t \in [0, 1]$ et $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Alors

$$r_i'' := \|t(x_i, y_i) + (1-t)(x'_i, y'_i)\|_1 \leq t \underbrace{\|(x_i, y_i)\|_1}_{=: r_i} + (1-t) \underbrace{\|(x'_i, y'_i)\|_1}_{=: r'_i} .$$

On pose $r = (r_i)_i$ et $r' = (r'_i)_i$. Ce sont deux points de $\Pi(L)$. Donc $R = tr + (1-t)r' \in \Pi(L)$ par convexité. Comme pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket, r_i \leq R_i$ on a alors $t(x_i, y_i) + (1-t)(x'_i, y'_i) \in L_1$. En effet, soit $r = (r_1, \dots, r_d) \in \Pi(L)$. Alors $(\pm r_1, \dots, \pm r_d) \in L$ par invariance. Et par convexité de L on a $\text{Conv}\{\pm r_1, \dots, \pm r_d\} = [-r_1, r_1] \times \dots \times [-r_d, r_d] \subset L$. Ainsi pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ tel que $|u_i| \leq r_i$ pour tout i alors $u \in L$. On applique ce résultat à R .

□

En fait ce résultat est plus général et il se montre de la même façon.

Lemme 5.3.15

Soit L un corps convexe $\mathbb{C}$ -inconditionnel alors L_{ν_k} est un corps convexe $\mathbb{R}$ -inconditionnel.

PREUVE. Soit L un corps convexe $\mathbb{C}$ -inconditionnel alors :

1. ν_k est très clairement inconditionnel grâce à la valeur absolue dans la définition de ν_k .
2. On prend ici

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^d \\ (z_1, \dots, z_d) & \longmapsto & (\nu_k(z_1), \dots, \nu_k(z_d)) \end{array} .$$

Donc $L_{\nu_k} = f^{-1}(L)$. Donc L_{ν_k} fermé comme L fermé et f continue. Comme L borné, il existe $M > 0$ tel que $\nu_k(x_i, y_i) \leq M_i$. Or

$$\sqrt[k]{|x_i|^k} \leq \sqrt[k]{|x_i|^k + |y_i|^k} \leq M_i .$$

De même pour y_i par symétrie donc L_{ν_k} borné.

3. $0 \in \text{int } L_{\nu_k}$ car L_{ν_k} inconditionnel.
4. Cela se vérifie quasiment de la même façon que dans la preuve précédente en remplaçant $\|\cdot\|_1$ par ν_k .

□

Lemme 5.3.16

Soit L un corps convexe $\mathbb{C}$ -inconditionnel. Alors

$$\int_{\Pi(L)} r_1 \cdots r_d dr_1 \cdots dr_d = \frac{1}{4^d} \text{vol}_{2d}(L_1) \text{ et } \int_{\Pi(L^\circ)} r_1 \cdots r_d dr_1 \cdots dr_d = \frac{1}{8^d} \text{vol}_{2d}((L_1)^\circ) .$$

PREUVE. On pose

$$L_1 \cap \mathbb{R}_+^{2d} = \{(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) \in \mathbb{R}_+^{2d} : (r_1 := x_1 + y_1, \dots, r_d := x_d + y_d) \in \Pi(L)\} .$$

Son volume est

$$\int_{\Pi(L)} r_1 \cdots r_d dr_1 \cdots dr_d$$

car

$$L_1 \cap \mathbb{R}_+^{2d} = \{(r_1 t_1, (1-t_1)r_1, \dots, r_d t_d, (1-t_d)r_d : t_i \in [0, 1], (r_i)_i \in \Pi(L)\} .$$

Voir notes de bas de page².

2. Pour tout i , on peut écrire $(x_i, y_i) = t_i(x_i, 0) + (1-t_i)(0, y_i)$ et $t_i \in [0, 1]$. (Tracer les axes $\{0\} \times \Pi(L)$ en fonction de $\Pi(L) \times \{0\}$ puis placer r_i sur chacun).

L'application

$$\begin{aligned} \phi : \quad & \text{int } \Pi(L) \times]0, 1[^d \longrightarrow \text{int } L_1 \cap \mathbb{R}_+^{2d} \\ (r_1, \dots, r_d, t_1, \dots, t_d) & \longmapsto (r_1 t_1, (1 - t_1) r_1, \dots, r_d t_d, (1 - t_d) r_d) \end{aligned}$$

est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme via le *Théorème d'inversion globale*³. Par le *Théorème de changement de variable*, par intégration sur un pavé et comme le bord est de mesure nulle, on a

$$\text{vol}_{2d}(L_1 \cap \mathbb{R}_+^{2d}) = \int_{\Pi(L)} r_1 \cdots r_d dr_1 \cdots dr_d .$$

Finalement, son symétrisé L_1 est lui un corps convexe inconditionnel de $\mathbb{R}^{2d}$. Il s'écrit

$$L_1 = \{(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) \in \mathbb{R}^{2d} : (|x_1| + |y_1|, \dots, |x_d| + |y_d|) \in \Pi(L)\} .$$

Par symétrisation, on a

$$\boxed{\text{vol}_{2d}(L_1) = 4^d \text{vol}_{2d}(L_1 \cap \mathbb{R}_+^{2d}).}$$

Et donc, d'après [Corollaire 5.3.12](#), on a

$$(L_1)^\circ = L_\infty = \{(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) \in \mathbb{R}^{2d} : (\max(|x_1|, |y_1|), \dots, \max(|x_d|, |y_d|)) \in \Pi(L^\circ)\} .$$

Cette dernière égalité se montre, elle aussi, facilement.

Comme $(L_1)^\circ$ est inconditionnel par la [Proposition 5.3.8](#), on a

$$\text{vol}_{2d}(L_1^\circ) = 4^d \int_{L_1^\circ \cap \mathbb{R}_+^{2d}} dx_1 dy_1 \cdots dx_d dy_d$$

On peut diviser $\mathbb{R}_+^{2d}$ en 2^d sous-régions tel que $x_i \geq y_i$ ou $x_i \leq y_i$. Supposons que $x_i \geq y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Alors $\max(x_i, y_i) = x_i \leq M_i, \forall i$ car $(L_1)^\circ$ est compact et $0 \in \text{int}(L_1)^\circ$. Ainsi $(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) \in (L_1)^\circ$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_d) \in \Pi(L^\circ)$. De plus, $0 \leq y_i \leq x_i, \forall i$. Ainsi par le théorème de *Fubini*, on a :

$$\int_{L_1^\circ \cap \mathbb{R}_+^{2d}} dx_1 dy_1 \cdots dx_d dy_d = 2^d \int_{\Pi(L^\circ)} \left(\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_d} dy_1 \cdots dy_d \right) dx_1 \cdots dx_d .$$

D'où

$$\text{vol}_{2d}((L_1)^\circ) = 8^d \int_{\Pi(L^\circ)} r_1 \cdots r_d dr_1 \cdots dr_d .$$

□

Théorème 5.3.17 Conjecture de *Mahler* pour les corps convexes complexes inconditionnels

Pour tout corps convexe $\mathbb{C}$ -inconditionnel $L \subset \mathbb{C}^d$, on a :

$$\mathcal{M}(L) \geq \frac{(2\pi^2)^d}{(2d)!} . \tag{5.8}$$

PREUVE.

Soit L un corps convexe $\mathbb{C}$ -inconditionnel. On reprend les notations du [Lemme 5.3.13](#).

3. La matrice jacobienne est diagonale par blocs $J_i = \begin{pmatrix} t_i & r_i \\ 1 - t_i & -r_i \end{pmatrix}$. L'injectivité se montre rapidement en passant par la définition de celle-ci et en regardant coordonnée par coordonnée. ϕ est défini sur un ouvert et $\mathcal{C}^1$ car polynomiale.

Par le [Lemme 5.3.16](#) et [Lemme 5.3.13](#) on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(L) &= \text{vol}(L) \cdot \text{vol}(L^\circ) \\
&= (2\pi)^{2d} \int_{\Pi(L)} r_1 \cdots r_d dr_1 \cdots dr_d \cdot \int_{\Pi(L^\circ)} r_1 \cdots r_d dr_1 \cdots dr_d \\
&= \frac{(2\pi)^{2d}}{4^d} \text{vol}(L_1) \cdot \frac{1}{8^d} \text{vol}((L_1)^\circ)
\end{aligned}$$

Ainsi comme L_1 est $\mathbb{R}$ -inconditionnel par le [Lemme 5.3.14](#) on applique le [Théorème 5.3.5](#) et on trouve que

$$\mathcal{M}(L) \geq \frac{(2\pi)^{2d}}{4^d} \cdot \frac{1}{8^d} \cdot \frac{4^{2d}}{(2d)!} = \frac{(2\pi^2)^d}{(2d)!}.$$

Le cas d'égalité ne sera pas étudié par manque de temps mais, on s'attend à ce qu'il corresponde au polydisque ou son polaire. Pour $d = 1$ on retrouve bien le volume du disque unité. $\square$

Bibliographie

- [Aqu24] AQUITANEHUNGERFORCE. *Cube*. en. CC BY-SA 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>, via Wikimedia Commons. 16 fév. 2024. URL : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexahedron.svg>.
- [Bar02] Alexander BARVINOK. *A Course in Convexity*. en. T. 54. Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, nov. 2002. ISBN : 978-0-8218-2968-4 978-0-8218-7231-4 978-1-4704-1792-5. DOI : [10.1090/gsm/054](https://doi.org/10.1090/gsm/054).
- [BCL87] Marcel BERGER, Michael COLE et Silvio LEVY. *Geometry*. en. Universitext. Berlin New York Paris [etc.] : Springer, 1987. ISBN : 978-3-540-11658-5 978-0-387-11658-7.
- [Bla17] Wilhelm BLASCHKE. “Über affine geometrie VII : Neue extremeigenschaften von ellipse und ellipsoid”. In : *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl* 69 (1917), p. 306-318.
- [BM85] J BOURGAIN et VD MILMAN. “On Mahler’s conjecture on the volume of a convex symmetric body and its polar”. In : *Preprint IHES, March* (1985).
- [Bou07] Nicolas BOURBAKI. *Espaces vectoriels topologiques : Chapitres 1 à 5*. fre. Mathematics and Statistics (Springer-11649 ; ZDB-2-SMA). Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Springer e-books, 2007. ISBN : 978-3-540-34498-8.
- [Cha26] Eléonore CHARTON. *Animation : construction du polaire d’une boule non centrée en 0*. fre. Avr. 2026. URL : <https://www.geogebra.org/geometry/cjyaw4bz> (visité le 17/06/2026).
- [CRS81] Gustave CHOQUET, Marc ROGALSKI et Jean SAINT-RAYMOND. “Sur le volume des corps convexes symétriques, Séminaire d’initiation à l’analyse, 20 e Année, 1980/1, Exp.# 11, eds”. In : *Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie 46), Univ. Paris VI, Paris* (1981).
- [FG13] Serge FRANCINO et Hervé GIANELLA. *Exercices de mathématiques des oraux de l’École polytechnique et des Écoles normales supérieures, Algèbre. Tome III*. fre. 2e édition. Cassini, jan. 2013. ISBN : 978-2-84225-166-6.
- [FMZ23] Matthieu FRADELIZI, Mathieu MEYER et Artem ZVAVITCH. “Volume Product”. In : *arXiv* (jan. 2023). DOI : [10.48550/arXiv.2301.06131](https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.06131).
- [Gou21] Xavier GOURDON. *Algèbre, probabilités*. fre. 3e éd. Les maths en tête. Ellipses, 2021. ISBN : 978-2-340-05676-3.
- [IS20] Hiroshi IRIYEH et Masataka SHIBATA. “Symmetric Mahler’s conjecture for the volume product in the three dimensional case”. In : *Duke Mathematical Journal* 169.6 (avr. 2020). ISSN : 0012-7094. DOI : [10.1215/00127094-2019-0072](https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0072).
- [Mah38] Kurt MAHLER. “Ein Minimalproblem für konvexe Polygone”. ger. In : *Mathematica, Section B* 7 (1938), p. 118-127. URL : <https://carmamaths.org/resources/mahler/collected.html#1930s> (visité le 17/06/2026).
- [Mah39] Kurt MAHLER. “A theorem on transfer for convex bodies”. cs. In : *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 068.3 (1939), p. 93-102. ISSN : 1802-114X. DOI : [10.21136/CPMF.1939.109441](https://doi.org/10.21136/CPMF.1939.109441).

- [Mir23] Petru MIRONESCU. *Cours de Topologie*. fre. Note de cours. Université Claude Bernard Lyon 1, 2023. URL : https://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a23:s5_topologie:poly2023.pdf (visité le 17/06/2026).
- [Ngo19] San Vĩ NGOC. *Topologie Générale*. fre. Notes de cours. ENS Rennes, déc. 2019. URL : <https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/teofil.adamski/notes-cours/TOPG.pdf> (visité le 17/06/2026).
- [San49] Luis-Antonio SANTALÓ. “Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones”. spa. In : *Portugaliae Mathematica* 8.4 (1949), p. 155-161. URL : <http://eudml.org/doc/114682> (visité le 17/06/2026).
- [Ska04] Georges SKANDALIS. *Topologie et analyse 3e année cours et exercices avec solutions*. Paris : Dunod, 2004. ISBN : 978-2-10-048886-5.
- [soh26] SOHAMCH08. *Mise en page des théorèmes et sommaire LaTeX*. en. Avr. 2026. URL : <https://github.com/sohamch08/LaTeX/tree/ae878d0ada096905cef0a9cf00ed4694e05fec01/CMI/B.Sc/Sem%202> (visité le 17/06/2026).
- [Sta21] STANNERED. *Octahedron*. en. CC BY-SA 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>, via Wikimedia Commons. 4 oct. 2021. URL : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Octahedron.svg>.
- [Tex19] Rozenn TEXIER-PICARD. *Convexité et applications*. fre. Notes de cours. ENS Rennes, 2019. URL : <https://agreg-maths.univ-rennes1.fr/journal/2019/convexite.pdf> (visité le 17/06/2026).
- [Wik25] WIKIPEDIA. *Loewner order*. en. Page Version ID : 1324915618. Nov. 2025. URL : https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Loewner_order&oldid=1324915618 (visité le 17/06/2026).