

Université Claude Bernard  Lyon 1

Travail d'Initiative Personnelle Encadré

Mécanismes plans, en direction du théorème d'universalité de Kempe

Fares Guebour

Sous la direction de Amaury Thuillier

22 juin 2024

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Remerciements | 2 |
| 2 | Introduction | 3 |
| 3 | Introduction aux degrés de liberté | 4 |
| 4 | Mécanismes à sortie quasi rectiligne | 5 |
| 4.1 | Mécanisme de Watt | 5 |
| 5 | Mécanismes à sortie parfaitement rectiligne | 7 |
| 5.1 | Inverseur de Peaucellier | 8 |
| 5.2 | Inverseur de Hart | 10 |
| 6 | Les mécanismes plans : motivations | 13 |
| 6.1 | Enoncé et preuve du théorème d'universalité de Kempe | 13 |
| 6.2 | Présentation des dispositifs permettant les opérations | 19 |
| 6.3 | Critique du théorème d'universalité de Kempe et précision | 24 |
| 6.3.1 | Piste de Kapovich et Millson | 25 |
| 6.3.2 | Piste d'Abbott et Barton | 25 |
| 7 | Conclusion | 27 |
| 8 | Annexe : définitions usuelles | 28 |
| 8.1 | Distinction entre parallélogramme et antiparallélogramme | 28 |
| 8.2 | Espace de configuration | 32 |
| 8.2.1 | Définition générale | 32 |
| 8.2.2 | Mise en perspective : le pendule double | 32 |
| 9 | Bibliographie | 35 |

1 Remerciements

Je tiens avant toute chose à exprimer toute ma gratitude envers Monsieur Thuillier, qui a été une source inestimable de soutien et de conseils tout au long de l'élaboration de mon TIPE. Sa gentillesse et son expertise ont rendu cette aventure enrichissante et permis de m'approprier la notion de mécanismes plans. Vos conseils éclairés ont dissipé bien des incertitudes et ont guidé mes réflexions vers des horizons plus clairs. Merci, pour avoir été bien plus qu'un guide académique, mais aussi un soutien humain précieux dans ce projet.

2 Introduction

Cette étude se concentre sur les mécanismes plans à travers l'analyse du théorème d'universalité de Kempe, en se basant sur un extrait tiré du livre "Geometric Folding Algorithms" de Erik Demaine et Joseph O'Rourke.

Le théorème d'universalité de Kempe, un élément fondamental de la théorie des mécanismes plans, éclaire la conception de mécanismes sophistiqués à partir de configurations simples.

Nous utiliserons l'approche méthodique de l'ouvrage pour appréhender les implications théoriques et pratiques de ce théorème. Notre objectif est d'en explorer les fondements et d'examiner ses applications dans des domaines variés, tels que l'ingénierie mécanique et la robotique.

Par ailleurs, nous ferons la distinction entre les mécanismes à sortie rectiligne et quasi-rectiligne, puis traiterons du théorème d'universalité dans sa profondeur.

En contribuant à une meilleure compréhension du théorème d'universalité de Kempe et de ses applications potentielles, ce travail vise à approfondir mes connaissances dans le domaine des mécanismes plans, offrant ainsi une opportunité enrichissante pour mon parcours académique.

3 Introduction aux degrés de liberté

Les systèmes mécaniques sont composés de tiges et d'articulations conçues pour contrôler le mouvement de points spécifiques et ainsi générer une courbe. Ces systèmes sont fondamentaux dans la conception mécanique, souvent utilisés pour convertir le mouvement rotatif en mouvement linéaire ou pour générer des trajectoires complexes.

Les degrés de liberté (DDL) dans un système d'articulations se réfèrent au nombre de mouvements indépendants que le système peut effectuer. Pour qu'une liaison ait un point suivant une courbe particulière, elle doit idéalement avoir un degré de liberté, ce qui signifie que son espace de configuration (se référer à l'annexe page 30 pour la définition) est unidimensionnel.

On énumère alors les propriétés suivantes :

- Les articulations fixées à un point particulier du plan n'ajoutent aucun degré de liberté.
- Les articulations libres ajoutent 2 degrés de liberté chacune car elles peuvent se déplacer librement dans le plan cartésien, tant horizontalement que verticalement.
- Les tiges suppriment un degré de liberté si elles ne sont pas redondantes (c'est-à-dire qu'elles contribuent à l'intégrité structurelle de la liaison).

Étant donné une liaison avec j articulations libres et r tiges, les degrés de liberté du système peuvent être calculés comme suit :

$$\text{DDL} = 2j - r$$

Pour que la liaison suive une courbe spécifique, elle doit avoir un degré de liberté, autrement dit :

$$r = 2j - 1$$

Ainsi, le nombre de tiges doit être impair pour que la liaison réalise le mouvement désiré le long d'une courbe.

4 Mécanismes à sortie quasi rectiligne

Un mécanisme à sortie quasi rectiligne est un dispositif mécanique conçu pour convertir un type de mouvement (généralement circulaire ou oscillant) en un mouvement linéaire ou rectiligne, mais de manière approximative. Cela signifie que la trajectoire de la sortie est presque une ligne droite, mais peut présenter de légères courbures ou déviations. Parmi les plus connus, nous avons le mécanisme de Watt.

4.1 Mécanisme de Watt

Le mécanisme de Watt, développé par James Watt au 18^e siècle, est une avancée cruciale dans le domaine de la mécanique. Ce dispositif permet de transformer le mouvement circulaire des machines à vapeur en un mouvement rectiligne alternatif, rendant les machines de l'époque plus efficaces. En utilisant une série de tiges et de liaisons, Watt a réussi à créer un mouvement en ligne droite presque parfait, résolvant ainsi un problème mécanique important. Cette innovation a joué un rôle essentiel dans la révolution industrielle, facilitant le développement de nombreuses technologies et améliorant la performance des machines à vapeur.

Les applications de ce mécanisme sont les suivantes :

- **Machines à vapeur** : Le mécanisme était utilisé dans les premières machines à vapeur pour convertir le mouvement rotatif des pistons de la machine en un mouvement rectiligne, nécessaire pour entraîner divers composants mécaniques.
- **Locomotives** : Le mécanisme a été utilisé dans la distribution de vapeur des locomotives à vapeur pour contrôler le flux de vapeur dans les cylindres, permettant à la locomotive de se déplacer efficacement et en douceur.
- **Mouvement parallèle dans les moteurs** : Le mécanisme est sollicité dans

divers types de moteurs et de machines où un mouvement rectiligne est nécessaire, comme dans les pompes, les compresseurs et d'autres systèmes mécaniques.

Voici une description du comportement du mécanisme (voir figure 1) : Le point c situé au milieu du segment ab traduit approximativement une ligne droite sur une partie de sa course. Le point c étant entraîné par a et b donne par conséquent une courbe très particulière, le Lemniscate de Bernoulli, d'équation cartésienne

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

avec a la longueur entre le point c et un des deux sommets du Lemniscate.

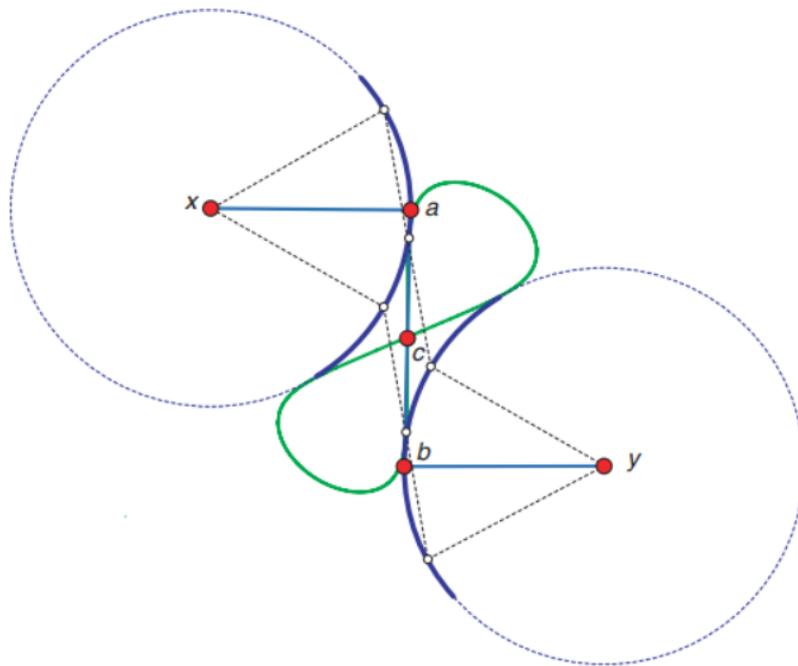


FIGURE 1 – Le mécanisme de Watt, comportant un seul degré de liberté ($j = 2$ et $r = 3$)

5 Mécanismes à sortie parfaitement rectiligne

Maintenant, nous allons présenter deux mécanismes que l'on nomme inverseurs, ces derniers réalisant une transformation géométrique nommée inversion. Par définition, dans un espace affine euclidien \mathcal{E} muni de la distance euclidienne

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (A, B) &\mapsto \|\overrightarrow{AB}\| \end{aligned}$$

Pour ω un point de \mathcal{E} et k un réel non nul, l'inversion de pôle ω et de rapport k est l'application de $\mathcal{E} \setminus \{\omega\}$ dans lui-même qui, à un point M , associe l'unique point $M' \in (\omega M)$ tel que $\overrightarrow{\omega M} * \overrightarrow{\omega M'} = k$. Le rapport k est également nommé puissance du pôle (voir plus bas).

Le pôle désigne un point quelconque du cercle par rapport auquel l'inversion est définie. Pour les deux inverseurs présentés (Peaucellier et Hart), le contexte est le même : on a l'inversion d'un cercle passant par le pôle dont l'image est une droite. Cette propriété peut être démontrée à l'aide de la figure suivante :

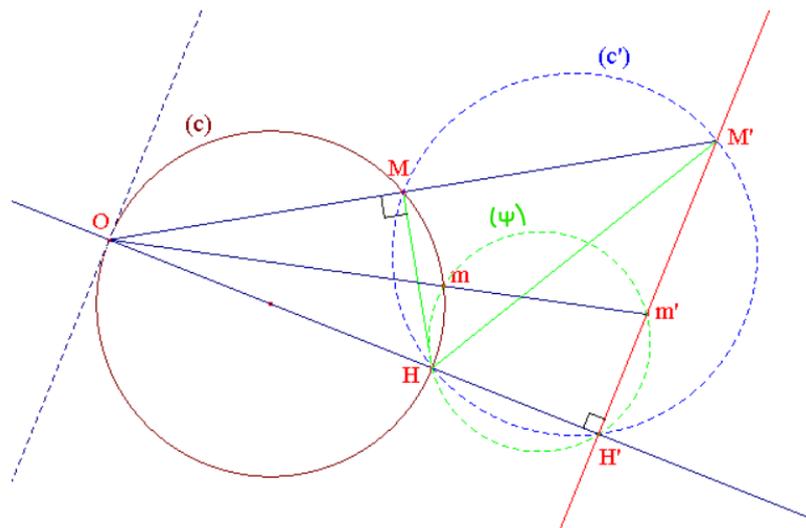


FIGURE 2 – Image d'un cercle passant par le pôle par une inversion

Pour montrer que la droite $(H'M')$ est l'inverse de (c) , posons un point m de (c) quelconque et traçons la droite (Om) coupant $(H'M')$ en m' . Par ailleurs, l'angle \widehat{OmH} est droit. Par conséquent, les points m, H, H' , et m' sont sur un même cercle (ψ) . La puissance de O par rapport à (ψ) est $Om \cdot Om' = OH \cdot OH'$. La puissance du point O par rapport au cercle (ψ) est définie comme le produit des distances de O aux points d'intersection de toute droite passant par O avec le cercle (ψ) . Dans ce cas, la puissance de O est $Om \cdot Om' = OH \cdot OH'$. Ainsi, m' est l'image de m par l'inversion de pôle O et de rapport $k = Om \cdot Om' = OH \cdot OH'$. Et finalement, obten la droite $(m'H')$ comme image.

5.1 Inverseur de Peaucellier

Le mécanisme de Peaucellier représente une avancée significative dans le domaine de la mécanique. Conçu en 1864 par Charles Nicolas Peaucellier, ce dispositif fut le premier à produire un mouvement rectiligne exact.

Ce mécanisme se compose de plusieurs tiges et liaisons spécialement arrangées. Les articulations x et y sont fixes, tandis que les articulations a, b, c et d sont mobiles. Ces dernières forment un losange, désigné par $abcd$, connecté par des tiges xa, xb et yc , qui maintiennent les liaisons sur des cercles, C_x et C_y .

Avec un degré de liberté unique, le mécanisme est capable d'effectuer un mouvement rectiligne en transformant un mouvement de rotation en une trajectoire linéaire. Lorsque le losange $abcd$ est tourné, les ajustements des tiges permettent de maintenir la forme du losange tout en réduisant la distance entre les cercles C_x et C_y , contraignant ainsi le point d à se déplacer le long d'une ligne verticale.

Montrons qu'il s'agit bien d'un inverseur.

Preuve (se référer à la figure 3) :

Tout d'abord, les segments $[XA]$ ET $[XB]$ ont la même longueur, que l'on note

a. Par ailleurs, le losange ACBD a ses quatre côtés égaux, on note cette longueur b .

Ensuite, le point X appartenant au cercle Cy , montrons alors que le point D est l'image de C par une inversion de pôle X , les diagonales du losange ACBD étant perpendiculaires et partageant le même milieu J .

$$\text{On a alors : } XC \cdot XD = (XJ - JC) \cdot (XJ + JD) = (XJ - JC) \cdot (XJ + JC) = XJ^2 - JC^2$$

Cependant, nous pouvons tirer du losange ACBD centré en le point J les triangles rectangles XJB et JCB rectangles en J . Le théorème de Pythagore nous donne alors les relations suivantes : $XJ^2 = a^2 - JB^2$ et $JB^2 = b^2 - JC^2$

Par conséquent, $XJ^2 - JC^2 = a^2 - b^2$. D est donc l'image de C par l'inversion de pôle X et de rapport $a^2 - b^2$.

En résumé, le mécanisme de Peaucellier représente une contribution majeure à la mécanique, alliant élégance et fonctionnalité pour résoudre le défi du mouvement rectiligne exact, et continue d'être une source d'inspiration dans le domaine de l'ingénierie mécanique.

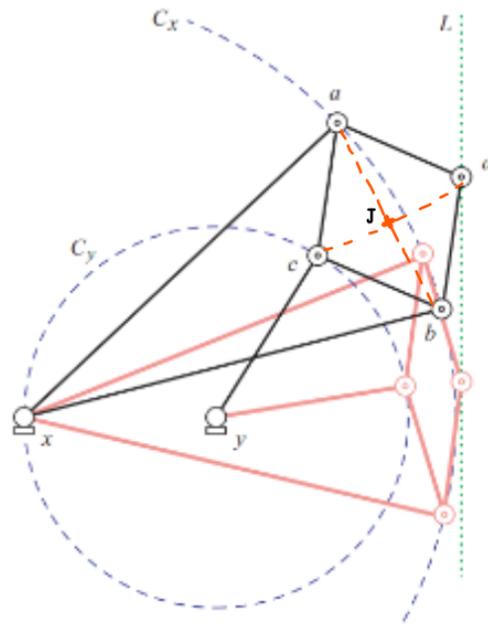


FIGURE 3 – Le mécanisme de Peaucellier, comportant un seul degré de liberté ($j = 4$ et $r = 7$)

5.2 Inverseur de Hart

L'inverseur de Hart représente une version simplifiée et optimisée du mécanisme de Peaucellier. En effet, nous pouvons lister de nombreux avantages.

Le nombre réduit de composants constitue l'une des principales améliorations. Alors que le mécanisme de Peaucellier nécessite sept tiges, l'inverseur de Hart en utilise seulement cinq. Cette réduction simplifie la fabrication, diminue les coûts et facilite l'assemblage.

Par ailleurs, la simplicité de conception de l'inverseur de Hart en fait un choix attrayant. Cette structure simplifiée le rend plus facile à assembler et entretenir que le mécanisme de Peaucellier. Il en résulte une maintenance plus simple et

une fiabilité accrue dans les applications industrielles.

En outre, ce mécanisme occupe moins de place le mécanisme de Peaucellier, il est donc mieux adapté aux applications où l'espace est fréquemment restreint.

Malgré sa simplification, l'inverseur de Hart parvient à produire un mouvement rectiligne exact.

Maintenant, montrons que ce dispositif est bien un inverseur.

Preuve (se référer à la figure 4) :

Tout d'abord, une relation prescrit le lien entre les positions des points X et Y sur les tiges de longueur AB et AD. En effet, le quadrilatère ABCD est un antiparallélogramme déformable par l'action des tiges de longueur ZX et ZY. on peut alors noter que $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YD} = \frac{CY'}{Y'B} = \frac{p}{q}$, avec p et q deux réels quelconques.

Par ailleurs, les points X et Z sont les deux seuls points fixes dans le plan (cela est modélisé par le petit rectangle sous ces deux points). Et les points X et Y appartenant au cercle bleu de centre Z, nous obtenons également que $XZ = YZ$.

De plus, le segment [AC] étant parallèle au segment [BD], cela implique que les points X, Y et Y' sont inscriptibles sur une droite parallèle à la fois aux segments [AC] et [BD], autrement dit, [XY] est parallèle à [AC].

En outre, on a : $AC \cdot BD = WW' \cdot BD = (WD + WB)(WD - WB) = WD^2 - WB^2$.

Cependant, $WD^2 + AW^2 = AD^2$ et $WB^2 + AW^2 = AB^2$ (Théorème de Pythagore). Cela nous permet donc d'établir que $WD^2 - WB^2 = AD^2 - AB^2$

Maintenant, nous avons les relations suivantes que nous pouvons exhiber :

On a $\frac{AX}{AB} = \frac{p}{p+q}$. Mais par proportionnalité, on a également $\frac{XY}{BD} = \frac{AX}{AB}$, donc $\frac{XY}{BD}$

$= \frac{AX}{AB} = \frac{p}{p+q}$. De manière analogue, on a $\frac{XB}{AB} = \frac{q}{p+q}$. De même, par proportionnalité, on a également $\frac{XY'}{AC} = \frac{XB}{AB} = \frac{q}{p+q}$.

Pour terminer, $XY \cdot XY' = \frac{pq}{(p+q)^2} \cdot BD \cdot AC = \frac{pq}{(p+q)^2} \cdot (AD^2 - AB^2)$.

Enfin, les proportionnalités établies sont conservées pour toutes les positions de l'inverseur. Autrement dit, Y' est l'image de Y par l'inversion de pôle X et de rapport $\frac{pq}{(p+q)^2} \cdot (AD^2 - AB^2)$.

En conclusion, l'inverseur de Hart représente une avancée significative par rapport au mécanisme de Peaucellier, offrant une conception simplifiée, un nombre réduit de composants, une efficacité d'espace améliorée et une performance équivalente.

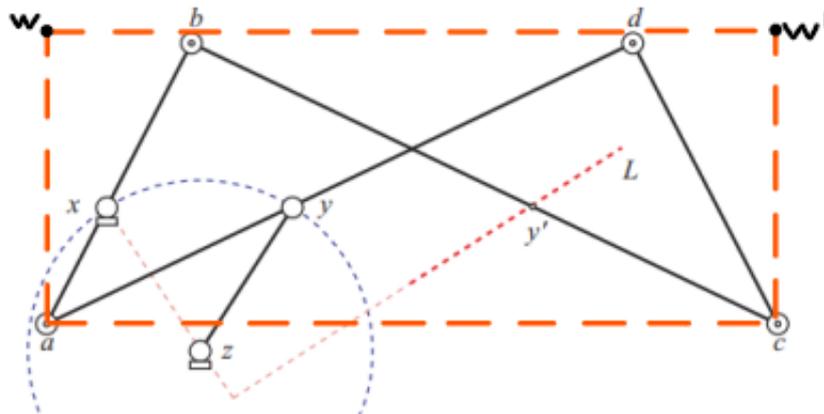


FIGURE 4 – L'inverseur de Hart

6 Les mécanismes plans : motivations

6.1 *Énoncé et preuve du théorème d'universalité de Kempe*

Énoncé :

Soit C une partie bornée (dont la distance entre deux points quelconques est majorée par un réel) d'une courbe algébrique dans le plan cartésien qui représente l'intersection de l'ensemble des zéros (racines) du polynôme $\phi \in \mathbb{R}_n[X, Y]$ que l'on peut noter $Z(\phi)$ avec un disque fermé $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R\}$, autrement dit, $C = B \cap Z(\phi)$

Il existe alors un mécanisme plan dont la trajectoire d'une de ses articulations est décrite par C .

Par ailleurs, de manière plus originale, le théorème est aussi cité de la manière suivante : "il existe un mécanisme pouvant reproduire notre signature".

Il est naturel de penser qu'une signature pourrait être vue comme une courbe dans le plan d'équation $g(x, y) = 0$, où g est une fonction continue définie dans un domaine D de \mathbb{R}^2 , mais il est cependant fort probable que cette dernière ne soit aucunement algébrique (imaginons une sinusoïde, ou encore un assemblage de fonctions usuelles sur un segment). Par conséquent, la signature doit être approximée polynomialement par l'intermédiaire du théorème de Weierstrass :

Si g est une fonction continue à valeurs réelles définie sur un domaine D inclus dans \mathbb{R}^2 (par exemple le carré $[a, b] \times [c, d]$) et si ε est un réel strictement positif, alors il existe une fonction polynomiale P à deux variables telle que pour tous x, y appartenant au domaine D ,
$$\sup_{(x, y) \in D} |g(x, y) - P(x, y)| < \varepsilon.$$

Pour l'exemple du carré $D = [a, b] \times [c, d]$ cela donne, pour tous x dans $[a, b]$ et y dans $[c, d]$,
$$\sup_{(x, y) \in D} |g(x, y) - P(x, y)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, plus ε est petit, meilleur est l'approximation de la courbe

d'équation $g(x,y) = 0$ par la fonction polynômiale (courbe algébrique) $P \in \mathbb{R}[X, Y]$.

Une fois l'approximation polynômiale obtenue, le mécanisme doit être conçu pour tracer les portions de courbes algébriques nécessaires par les méthodes que nous développerons dans la suite.

Preuve :

Soit $\phi(x, y) = 0$ la courbe algébrique traduisant le mouvement d'un point noté P au sommet du parallélogramme suivant :

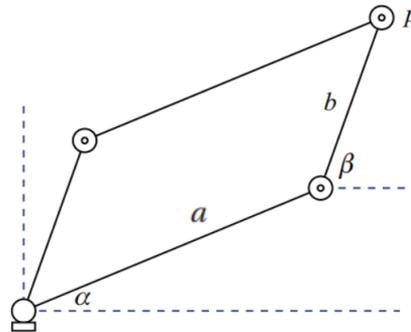


FIGURE 5 – Configuration du parallélogramme

Par conséquent le mouvement de P est restreint par ce dispositif. Donc, nous pouvons exprimer les coordonnées de $P = (x,y)$ dans le plan cartésien par l'intermédiaire des angles α et β :

$$x = a \cos(\alpha) + b \cos(\beta) \qquad y = a \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) + b \cos(\beta - \frac{\pi}{2})$$

Les courbes algébriques étant polynômiales, (exemple : $\phi(x, y) = x^2y$)

Nous pouvons montrer que toutes les courbes algébriques peuvent s'écrire sous la forme :

$$\phi(x, y) = c + \sum_i c_i \cos(r_i \alpha + s_i \beta + \delta_i) \quad (**)$$

Où c et c_i sont des constantes réelles, r_i et s_i des entiers, et $\delta_i \in \{0, \pm \frac{\pi}{2}\}$

Pour démontrer de manière générale que toute courbe algébrique définie par un polynôme $\phi(x, y)$ peut être réécrite sous la forme trigonométrique donnée, raisonnons de la manière suivante :

Étape 1 : Paramétrisation en termes de cosinus et sinus

Les paramétrisations sont :

$$x = a \cos(\alpha) + b \cos(\beta)$$

$$y = a \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + b \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin(\alpha) - b \sin(\beta)$$

Étape 2 : Expression des puissances de x et y

Considérons un polynôme général $\phi(x, y)$:

$$\phi(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

où a_{ij} sont des coefficients réels.

Nous devons réécrire chaque terme $x^i y^j$ en termes de $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\sin(\alpha)$, et $\sin(\beta)$.

En utilisant le binôme de Newton, nous développons x^i :

$$x^i = (a \cos(\alpha) + b \cos(\beta))^i = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (a \cos(\alpha))^k (b \cos(\beta))^{i-k}$$

$$= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} a^k b^{i-k} \cos^k(\alpha) \cos^{i-k}(\beta)$$

De même, nous développons y^j :

$$\begin{aligned} y^j &= (-a \sin(\alpha) - b \sin(\beta))^j = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-a \sin(\alpha))^l (-b \sin(\beta))^{j-l} \\ &= \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^j a^l b^{j-l} \sin^l(\alpha) \sin^{j-l}(\beta) \end{aligned}$$

Étape 3 : Utilisation des identités trigonométriques

Nous réécrivons chaque produit de cosinus et de sinus en utilisant les identités trigonométriques.

Pour $\cos^k(\alpha) \cos^{i-k}(\beta)$, nous utilisons :

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} \cos(A + B) + \frac{1}{2} \cos(A - B)$$

Pour $\sin^l(\alpha) \sin^{j-l}(\beta)$, nous utilisons :

$$\sin(A) \sin(B) = \frac{1}{2} (\cos(A - B) - \cos(A + B))$$

Étape 4 : Combinaison des termes

Nous devons combiner les termes obtenus pour x^i et y^j . On a alors :

$$x^i y^j = \left(\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} a^k b^{i-k} \cos^k(\alpha) \cos^{i-k}(\beta) \right) \left(\sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^j a^l b^{j-l} \sin^l(\alpha) \sin^{j-l}(\beta) \right)$$

En utilisant les identités trigonométriques, nous transformons chaque produit de cosinus et sinus en une somme de termes en cosinus.

1. Pour $\cos^k(\alpha) \cos^{i-k}(\beta)$, nous obtenons des termes de la forme

$$\cos^k(\alpha) \cos^{i-k}(\beta) \rightarrow \sum \cos(r\alpha + s\beta)$$

2. Pour $\sin^l(\alpha) \sin^{j-l}(\beta)$, nous obtenons des termes de la forme

$$\sin^l(\alpha) \sin^{j-l}(\beta) \rightarrow \sum \cos(r\alpha + s\beta)$$

3. Pour les produits mixtes, nous obtenons également des termes de la forme

$$\cos(\alpha) \sin(\beta) \rightarrow \sum \cos(r\alpha + s\beta)$$

Pour prouver cela, utilisons un raisonnement par récurrence :

Soit $S_{i,j}$ définie par :

$$\forall j \in \mathbb{N}, S_{0,j} = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^l a^l b^{j-l} \sin^l(\alpha) \sin^{j-l}(\beta)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,$$

$$S_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} a^k b^{i-k} \cos^k(\alpha) \cos^{i-k}(\beta) & \text{si } j = 0 \\ x^i y^j & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante :

$$P(i) : \forall j \in \mathbb{N}^*, S_{i,j} = c + \sum_i c_i \cos(r_i \alpha + s_i \beta + \delta_i)$$

Montrons cette propriété par récurrence sur i .

$$\text{Initialisation : Pour } i = 0, S_{0,j} = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^l a^l b^{j-l} \sin^l(\alpha) \sin^{j-l}(\beta)$$

Pour prouver que l'on peut obtenir une somme de cosinus, traitons par exemple le cas $j=2$.

$$\text{On a donc } S_{0,2} = a^2 \sin^2(\alpha) + b^2 \sin^2(\beta) + 2ab \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\text{Soit } S_{0,2} = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \cos(2\beta) - \frac{a^2}{2} \cos(2\alpha) + ab \cos(\alpha - \beta) - ab \cos(\alpha + \beta)$$

Par ailleurs, pour tout j , les identités trigonométriques garantissent qu'on peut toujours linéariser les puissances de fonctions trigonométriques, d'où l'initialisation.

Hérédité : Maintenant, supposons P vraie au rang i , et montrons qu'elle l'est également au rang $i+1$, soit $P(i+1) : \forall j \in \mathbb{N}, S_{i+1,j} = c + \sum_i c_i \cos(r_i \alpha + s_i \beta + \delta_i)$

Pour cela, on fait une récurrence sur j .

$$\text{Pour } j = 0, S_{i+1,0} = \sum_{k=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} a^k b^{i+1-k} \cos^k(\alpha) \cos^{i+1-k}(\beta)$$

Par exemple, pour $i = 1$, on obtient $S_{2,0} = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2}{2} \cos(2\beta) + \frac{a^2}{2} \cos(2\alpha) + ab \cos(\alpha - \beta) - ab \cos(\alpha + \beta)$

Tout comme pour j , les identités trigonométriques permettent de linéariser les puissances pour tout entier i .

De la même manière, supposons P vraie au rang j , et montrons qu'elle l'est également au rang $j+1$, soit $P(j+1) : \forall j \in \mathbb{N}, S_{i+1,j+1} = c + \sum_i c_i \cos(r_i \alpha + s_i \beta + \delta_i)$

$$\text{On a } S_{i+1,j+1} = x^i y^j * xy = S_{i,j} * S_{1,1}$$

Cette somme est linéarisable par produit de l'hypothèse de récurrence avec le cas de S pour $i=j=1$

Ainsi, en combinant tous ces termes, chaque monôme $x^i y^j$ peut être réécrit en une somme de termes impliquant des cosinus de combinaisons linéaires de α et β . Ainsi, toute courbe algébrique définie par un polynôme $\phi(x, y)$ peut être réécrite sous la forme :

$$\phi(x, y) = c + \sum_i c_i \cos(r_i \alpha + s_i \beta + \delta_i)$$

où c et c_i sont des constantes réelles, r_i et s_i sont des entiers, et $\delta_i \in \{0, \pm \frac{\pi}{2}\}$.

en revenant à l'exemple $\phi(x, y) = x^2y$, on obtient :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}[a^3 \cos(\alpha) + 2ab^2 \cos(\alpha) - a^3 \cos(3\alpha) + ab^2 \cos(\alpha - 2\beta) + a^2b \cos(2\alpha - \beta) + 2a^2b \cos(\beta) + b^3 \cos \beta - b^3 \cos(3\beta) - 3a^2b \cos(2\alpha + \beta) - 3ab^2 \cos(\alpha + 2\beta)]$$

Ainsi, chaque terme de (**) peut être défini comme un lien de longueur c_i orienté selon un angle, et étant décalé d'une longueur c . Le problème de base se réduit donc à la construction d'un angle de la forme $r_i\alpha + s_i\beta + \delta_i$ à partir des angles initiaux α et β .

Par conséquent, nous pouvons réaliser ce processus par l'intermédiaire de trois dispositifs : le translateur, permettant de translater un mouvement et donc de tracer une portion de courbe préalablement choisie, l'additionneur, permettant d'additionner deux angles entre eux, et le multiplicateur, permettant de multiplier un angle par un entier positif.

6.2 Présentation des dispositifs permettant les opérations

Le multiplicateur : Ce dispositif est animé par deux antiparallélogrammes (se référer à l'annexe page 28 pour la définition). Les angles opposés de chaque antiparallélogramme α et β sont égaux et les deux triangles de chacune des deux figures sont congruents, autrement dit, de même forme, de même taille, mais dans des positions respectives différentes. Le multiplicateur n'a qu'un seul degré de liberté lorsque les points x et y représentés dans la figure 6 sont fixes dans le plan, autrement dit, lorsque la tige xy est immobile. Par conséquent, la valeur de l'angle α (respectivement β) préalablement déterminée impose celle de β (respectivement α). Astucieusement, les deux polygones sont reliés de sorte que l'angle β soit partagé par ces derniers au niveau de la liaison notée a . Par ailleurs, les deux figures ont leurs longueurs proportionnelles de sorte que $\frac{|xy|}{|xa|} = \frac{|xa|}{|xd|}$. Du fait du lien entre α et β préalablement mentionné et de la proportionnalité des deux figures, l'angle α appartenant initialement à la plus grande figure est dupliqué au point x sur la plus petite figure en surbrillance sur la figure 6. Ce qui signifie ainsi que l'angle α a été multiplié par 2, d'où le nom du dispositif

donné par Kempe. Evidemment, le processus peut être répété indéfiniment selon le nombre d'antiparallélogrammes que l'on imbrique. Cependant, en 1877, Kempe a présenté le trisecteur (voir figure 7) qui n'est autre qu'un multiplicateur composé de 3 antiparallélogrammes qui multiplie l'angle initial par 3 et donc, on associe à la courbe algébrique du trisecteur le coefficient $r_i=3$. Egalement, Kempe souligne que le trisecteur est l'unique dispositif qui, composé de liens, trisecte (divise par 3) un angle. Cette opération est en effet impossible à réaliser à l'aide d'une règle et d'un compas.

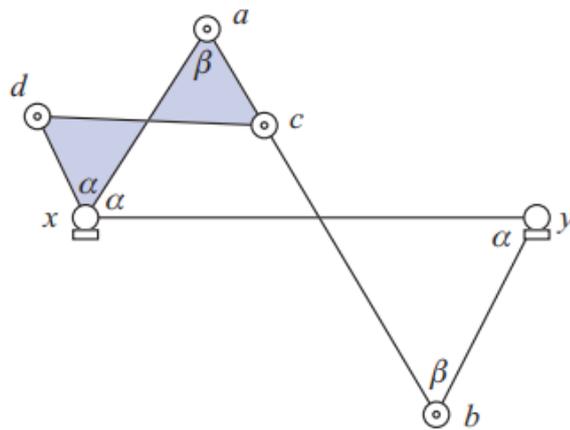


FIGURE 6 – Le multiplicateur de Kempe composé de deux antiparallélogrammes semblables imbriqués

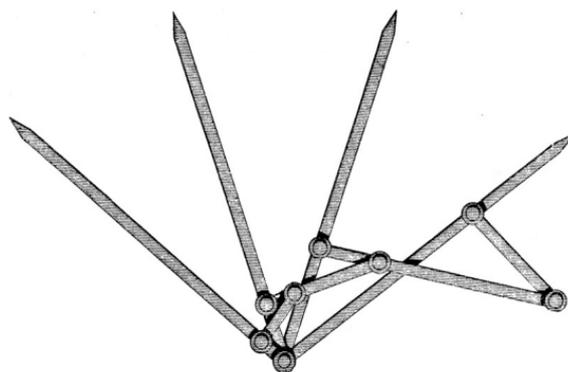


FIGURE 7 – Le trisecteur d'angle de Kempe

L'additionneur : Ce dispositif a pour objectif de sommer deux angles entre eux. Il repose sur le multiplicateur dans la figure 6 qui est également appelé inverseur étant donné la réflexion de l'angle α par rapport à la droite xa . On note θ_1 et θ_2 les deux angles que l'on additionne. Le mécanisme se compose pour cela de 5 tiges toutes reliés en x . La droite A que l'on voit sur la figure 8 ci-dessous forme un angle α avec la droite C qui reflète A en la droite A' . De manière analogue, la droite B forme un angle β avec la droite C qui reflète B en la droite B' . Si ces symétries sont maintenues durant toute la course de l'additionneur, A et A' (respectivement B et B') sont placés symétriquement par rapport à C avec qui ils partagent en commun le même angle α (respectivement β). Il vient alors que $\theta_1 = \alpha - \beta$ et $\theta_2 = \alpha + \beta$, et donc que $\theta_1 + \theta_2 = 2\alpha$, qui n'est autre que l'angle entre A et A' . Ensuite, en prenant comme base la droite A , on établit que θ_1 (respectivement θ_2) est l'angle entre les droites A et B (respectivement l'angle entre les droites A et B'). Par conséquent on revient à l'angle entre les droites A et A' , qui n'est autre que $\theta_1 + \theta_2 = 2\alpha$. Pour maintenir les symétries relatives à la droite C durant toute la course de l'additionneur, il faut pour cela implémenter à la figure initiale 2 antiparallélogrammes particuliers (en rouge sur la figure 9), le premier pour maintenir les symétries relatives à la droite A , et le second pour maintenir les symétries relatives à la droite B .

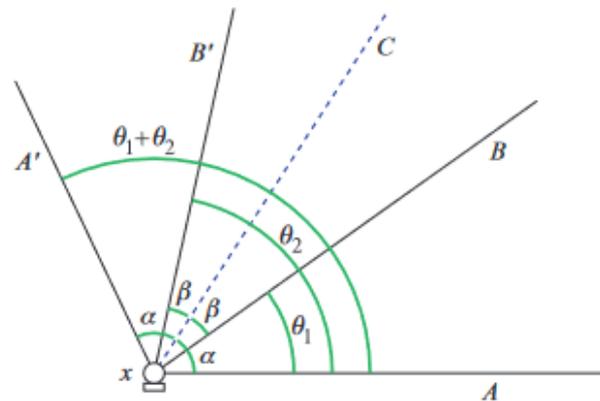


FIGURE 8 – Configuration et paramétrisation de l'additionneur

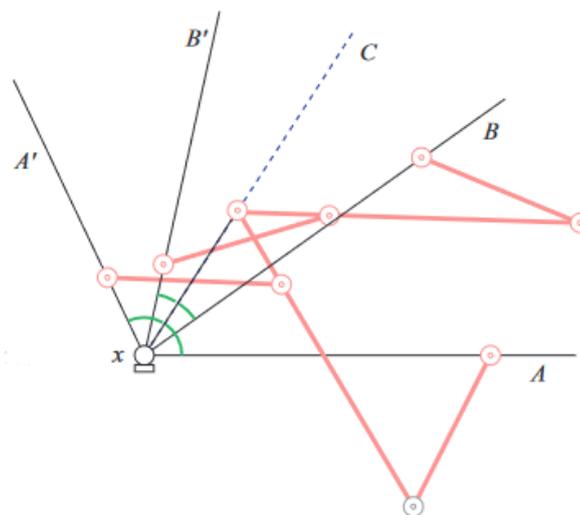


FIGURE 9 – Version de l'additionneur formalisée par Kempe

Le translateur : Ce dispositif est le plus simple des mécanismes postulés par Kempe, le principe étant de dupliquer le même segment selon la même orientation à différents endroits. On a une tige notée A ancrée à un point x qui est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale que l'on retrouve à un autre

endroit sous le nom de la tige C ancrée en un point y . Ensuite, les deux tiges D et E que l'on voit sur la figure 10 ci-dessous ont la même longueur, de sorte que la tige C puisse être placée n'importe où dans un disque centré en x .

Enfin, le translateur comporte un écueil dans sa configuration, et nous en parlerons plus tard.

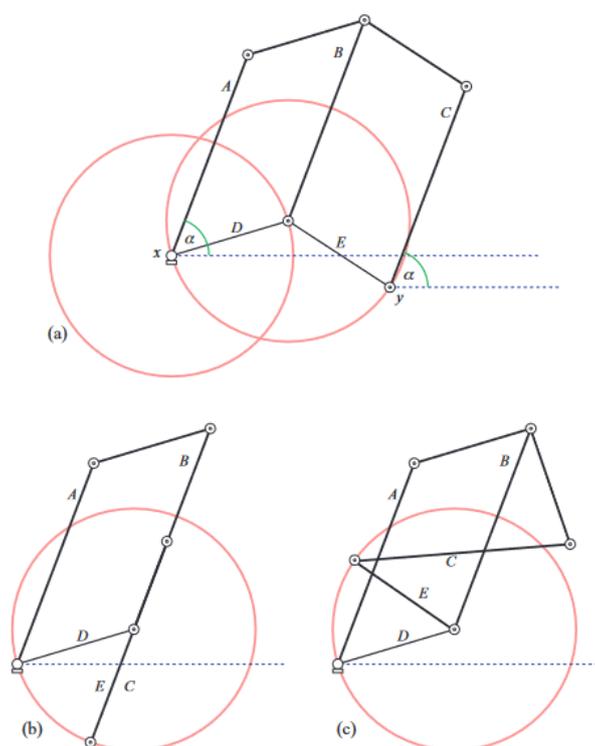


FIGURE 10 – Le translateur de Kempe sous différentes positions

En revenant à l'équation (**) page 14, nous pouvons établir que le multiplicateur multiplie n'importe quel angle par les entiers r_i et s_i . Ensuite, l'additionneur permet de sommer tous les angles en argument dans les cosinus de la somme. Enfin, le translateur permet de sommer les cosinus. Combiner ces 3 dispositifs dans une configuration appropriée donne un point que l'on note P qui reste constamment à une distance $\phi(x, y) + c$ de l'axe des ordonnées. Un exemple

typique de mécanisme qui vérifie cette condition est le mécanisme de Peaucellier, possédant un degré de liberté, dans lequel nous avons le point P couissant en permanence sur la droite d'équation $x - c = 0$, avec c l'abscisse d'intersection de la droite, ce qui force alors le point P appartenant au parallélogramme (voir figure 3) à suivre la courbe algébrique d'équation $\phi(x, y) = 0$.

Pour terminer, afin de générer des courbes algébriques diverses et variées nous avons les inverseurs, des outils géométriques permettant à partir d'un cercle d'obtenir une portion de droite et vice-versa. De plus, nous avons les 3 mécanismes présentés précédemment (additionneur, translateur, multiplicateur) permettant de générer des courbes en sommant des cosinus d'angles. Ces mécanismes peuvent être fusionnés entre eux par des liaisons ponctuelles, ce qui permet de générer une infinité de courbes au gré des besoins.

6.3 Critique du théorème d'universalité de Kempe et précision

En observant la figure 10 présentant le translateur, on constate que la configuration (c) ne respecte pas la condition d'orientation similaire pour les tiges A et C, ce qui engendre un antiparallélogramme. Cela fragilise par conséquent le raisonnement de Kempe, étant donné que le principal problème de la preuve de Kempe est qu'elle ne fonctionne bien que pour un certain sous-ensemble de l'espace de configuration de certains mécanismes, ce qui a notamment été postulé par William Thurston en 1984.

Par conséquent, il faut éviter qu'un antiparallélogramme puisse devenir un parallélogramme au sein d'un mécanisme quelconque et vice-versa.

Pour améliorer la preuve de Kempe, nous devons renforcer à la fois le parallélogramme et l'antiparallélogramme pour éviter qu'ils perdent leur propriété de parallélisme. Pour le premier renforcement, nous suivons la résolution de Kapovich et Millson. Ces derniers ont seulement renforcé le parallélogramme, sur lequel ils se sont concentrés. Pour le second renforcement, nous adoptons une idée récente d'Abbott et Barton (2004), qui eux se sont focalisés sur l'antiparallélogramme.

6.3.1 Piste de Kapovich et Millson

Le renforcement proposé par Kapovich et Millson, en plus de sa simplicité, est une amélioration très pertinente. En effet, ce dernier consiste à ajouter une tige et donc 3 liaisons au milieu de chaque parallélogramme du transateur (voir figure 11), afin d'éviter les dégénérescences (b) et (c) de la figure 10. La conséquence de cela est une restriction de l'espace de configuration au sein du translateur. En effet, les deux tiges ajoutées à chacun des deux parallélogrammes étant connectées, lorsqu'elles sont parallèles, le mécanisme se bloque, ce qui assure la condition de parallélisme pour les tiges A et C (voir figure 10) invoquée plus haut.

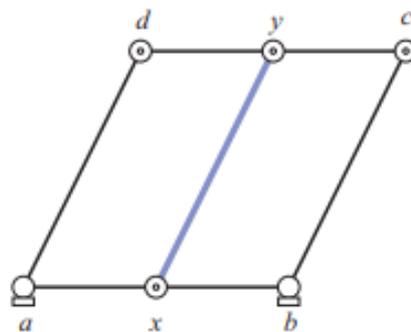


FIGURE 11 – Renforcement proposé par Kapovich et Millson

6.3.2 Piste d'Abbott et Barton

La deuxième amélioration portant cette fois-ci sur l'antiparallélogramme est un plus complexe. En effet, cette dernière consiste à ajouter 4 tiges et donc 4 liaisons (p, q, r et s) de manière plutôt astucieuse (voir figure 12). Lorsque les barres ajoutées sont assez longues, cela permet de bloquer le mouvement du mécanisme de sorte à ne pas se transformer en parallélogramme. Cela induit ainsi également une restriction de l'espace de configuration du mécanisme.

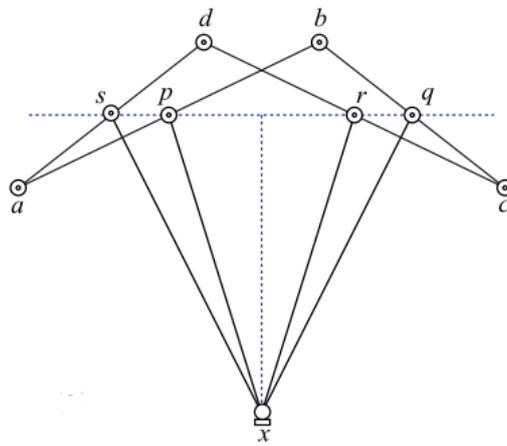


FIGURE 12 – Renforcement proposé par Abbott et Barton

7 Conclusion

Pour conclure, ce travail m'a permis d'approfondir ma compréhension des mécanismes plans et du théorème d'universalité de Kempe. En étudiant des exemples comme les inverseurs de Peaucellier et de Hart, j'ai découvert comment des concepts géométriques élémentaires peuvent produire des mouvements relativement précis et utiles. Ces mécanismes montrent par ailleurs l'ingéniosité humaine dans la création de solutions pratiques à partir de principes mathématiques.

L'analyse a révélé que le théorème de Kempe, bien qu'ancien et perfectible sur certains plans, reste pertinent et puissant pour la conception de mécanismes répondant à un cahier des charges rigoureux. J'ai également appris que les chercheurs contemporains, comme Kapovich et Millson, continuent d'améliorer et d'étendre ces idées, ouvrant la voie à des innovations futures.

En outre, ce projet m'a offert une précieuse opportunité d'explorer des concepts théoriques et leurs applications pratiques. Il m'a aidé à développer mes compétences en géométrie, et en particulier à apprécier la complexité des mécanismes que l'on peut construire. En conclusion, cette expérience m'a été très enrichissante et je suis reconnaissant pour cette opportunité d'apprentissage et pour les conseils que j'ai reçus tout au long de ce projet.

8 Annexe : définitions usuelles

8.1 Distinction entre parallélogramme et antiparallélogramme

La distinction entre un parallélogramme et un antiparallélogramme repose sur leur nature géométrique et des propriétés angulaires que l'on va exposer. Un parallélogramme est une figure géométrique convexe où les côtés opposés sont parallèles et de longueur égale 2 à 2. En revanche, un antiparallélogramme est une figure non convexe, ce dernier possédant des angles rentrants. La convexité peut être vulgarisée de la manière suivante : si on entoure d'un élastique la figure, dans le cas d'une figure convexe, l'élastique épouse la forme de la figure. Cependant, dans le cas d'une figure non convexe, l'élastique n'épouse pas la forme de la figure.

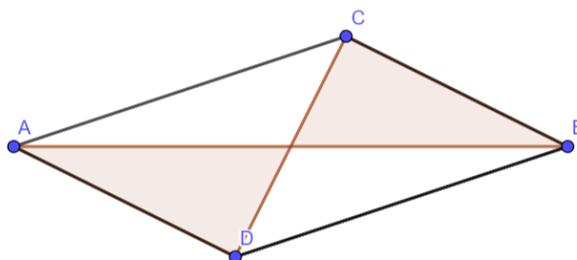


FIGURE 13 – Quadrilatère croisé obtenu à partir par renumérotation des sommets

Ensuite, la construction du parallélogramme se déroule de la manière suivante (voir figure 14) : on part des points A, B et C, puis on trace le cercle de rayon AD centré en A ainsi que le cercle de rayon AB centré en C. L'intersection des 2 cercles située du même côté que le point C par rapport au segment [AB] nous donne ainsi le point D et donc le parallélogramme ABCD.

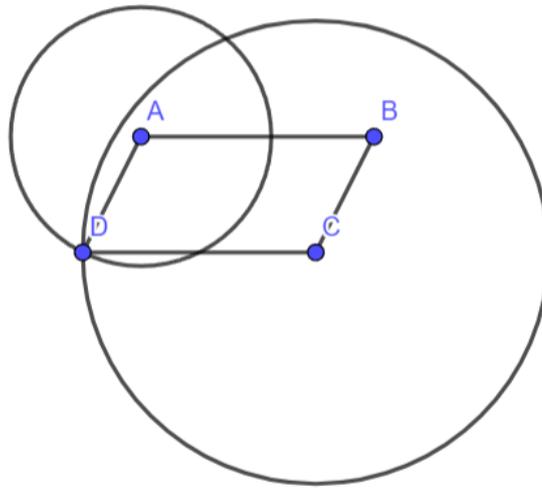


FIGURE 14 – Construction du parallélogramme

De manière analogue, la construction de l'antiparallélogramme se déroule de la manière suivante (voir figure 15) : on effectue le même tracé que précédemment. Cependant, on choisit cette fois l'intersection des 2 cercles située à l'opposé du point C par rapport au segment $[AB]$, ce qui nous donne ainsi le point D et donc l'antiparallélogramme ABCD.

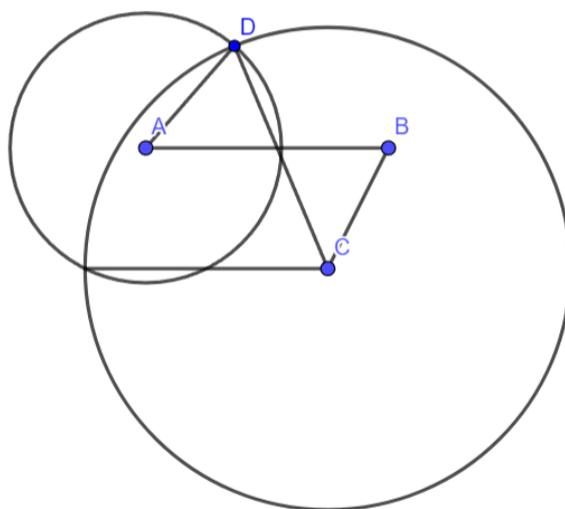


FIGURE 15 – Construction de l'antiparallélogramme

Formellement, l'antiparallélogramme est défini comme étant un quadrilatère croisé dont les côtés non-adjacents sont de même longueur. En l'occurrence, en se basant sur la figure 13, le segment $[AB]$ coupe le segment $[CD]$ et les paires de côtés non-adjacents de même longueur sont les segments $[AC]$ et $[BD]$, et les segments $[AB]$ et $[CD]$.

Néanmoins, la réelle distinction entre le parallélogramme et l'antiparallélogramme porte sur des propriétés angulaires. En effet, le parallélogramme est un quadrilatère dont les angles opposés (autrement dit, ceux en regard diagonalement) ont la même mesure.

Propriétés angulaires (se référer à la figure 13) :

- **Somme des angles intérieurs :** La somme des angles intérieurs d'un antiparallélogramme, comme tout quadrilatère, est de 360° .
- **Angles opposés :** Les 2 angles opposés d'un antiparallélogramme, autrement

dit, les paires d'angles ne partageant ni la même diagonale ni les mêmes cotés restants (en l'occurrence les côtés de longueurs AD et BC) sont égaux. Exemple : les angles \widehat{BAD} et \widehat{BCD}

Preuve des propriétés angulaires :

Soit un antiparallélogramme $ABCD$ où $AB = CD$ et $AD = BC$ (tout comme dans la figure 13).

1. Somme des angles intérieurs

La somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est toujours de 360° . Cette propriété est héritée de la somme des angles intérieurs d'un triangle, qui est de 180° .

$$\widehat{ABC} + \widehat{BAD} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} = 360^\circ$$

2. Angles opposés

On ajoute comme propriété que les diagonales AC et BD se croisent en O .

Par ailleurs, les triangles AOD et COB sont isocèles avec $AD = BC$ et $AO = CO$. Donc, $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$.

Et ainsi, les angles opposés ont égaux 2 à 2.

8.2 Espace de configuration

8.2.1 Définition générale

Un mécanisme plan L peut être considéré comme un graphe (V, E) dans un espace métrique E (un espace muni de la distance euclidienne usuelle) composé de :

1. Une fonction $l : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ (qui donne la longueur de chaque arête et donc la distance entre les deux points de cette dernière) ;
2. Un sous-ensemble $F \subseteq V$ des sommets fixes (représentés sur une figure) ;
3. Une fonction indicatrice $\varphi_0 : F \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui indique les coordonnées des éléments de F .

Soit L le mécanisme plan, et considérons la distance euclidienne dans \mathbb{R}^2 . Une configuration (ou position) du mécanisme L est une fonction $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

1. Pour chaque arête $(v_1, v_2) \in E$, $(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = l(v_1, v_2)$
2. $\varphi|_F = \varphi_0$. (la restriction de φ à l'ensemble F des sommets fixes)

Par conséquent, l'espace de configuration $\text{Conf}(L)$ est l'ensemble de toutes les positions φ de L : il est un sous-ensemble de $(\mathbb{R}^2)^n$, où n est le nombre de sommets.

8.2.2 Mise en perspective : le pendule double

Par exemple, dans le cas du pendule double dans le plan, l'espace de configuration peut clairement être étudié.

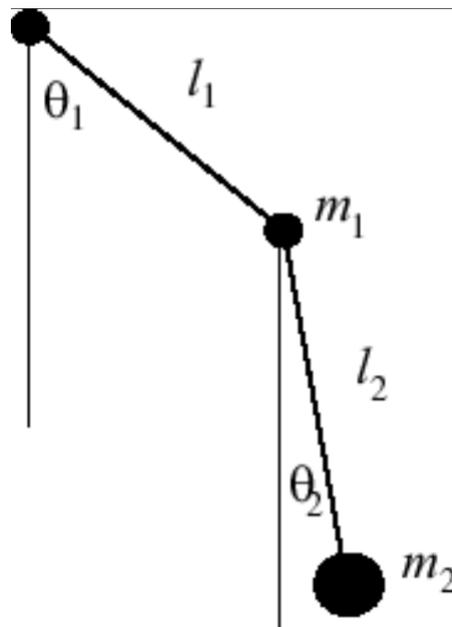


FIGURE 16 – Le pendule double, un mécanisme à 2 degrés de liberté d’espace de configuration bidimensionnel

Ainsi, pour décrire correctement l’espace de configuration du pendule double dans le plan, procédons de la manière suivante : d’un coté le point m_1 tourne selon le cercle de rayon l_1 , et le point m_2 tourne selon le cercle de rayon l_2 . Ce processus nous conduit à former un tore. Alternativement, nous pouvons considérer que les angles θ_1 et θ_2 appartenant à $[0 ; 2\pi]$ sont paramétrés de manière bijective (un unique angle pour une unique coordonnée) par un point des cercles S_1 et S_2 , ce qui signifie qu’un couple d’angles (θ_1, θ_2) est paramétré de manière bijective par un point de l’espace $S_1 \times S_2$, ce qui donne un tore (voir la figure 17 ci-dessous). Visuellement, le premier angle permet de localiser un point sur le cercle rouge tandis que le second angle désigne un point sur le cercle rose. Par ailleurs, et pour conclure, un mécanisme à n degrés de liberté induit un espace de configuration de dimension n , d’où l’unidimensionnalité invoquée page 4 pour les mécanismes à un degré de liberté étudiés.

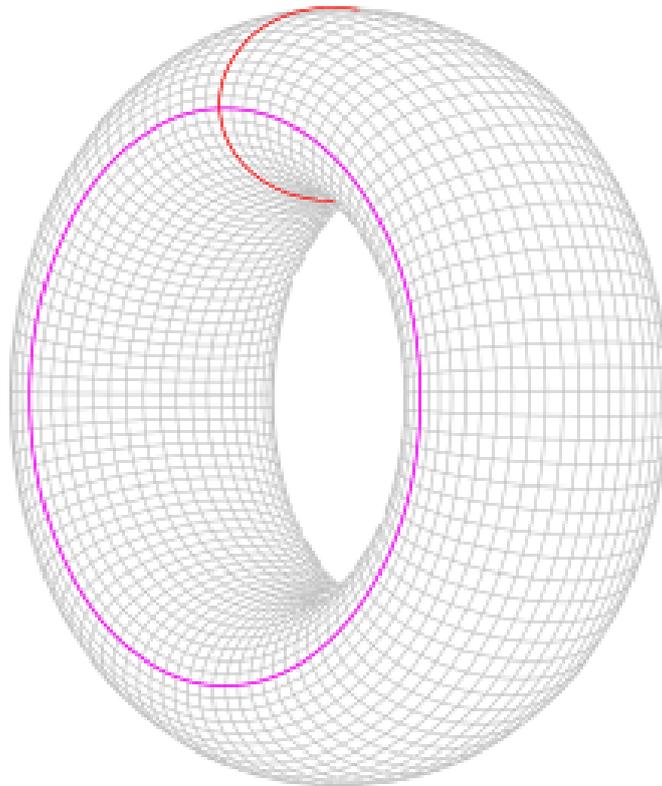


FIGURE 17 – Le tore : produit de deux cercles

9 Bibliographie

[1] Richard Courant et Herbert Robbins. What is Mathematics... An elementary approach to ideas and methods. (pages 155-158). Oxford University Press. 1941

[2] Erik Demaine et Joseph O'Rourke. Geometric Folding Algorithms. Cambridge University Press. 2007

[3] Timothy Good Abbott. Generalizations of Kempe's Universality Theorem. Massachusetts Institute of Technology. 2008

[4] Joseph O'Rourke. The mathematics of linkages, origami and polyhedra. Cambridge University Press. 2011

[5] Anupam Saxena. Kempe's Linkages and the Universality Theorem. Indian Academy of Sciences. 2011

[6] Le site etudes.ru