

# Théorème de Wigner

Anisa CAJA

sous la direction de Guillaume AUBRUN

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Eléments de la théorie des graphes et nombres de Catalan</b>	<b>2</b>
1.1	Eléments de la théorie des graphes . . . . .	2
1.1.1	Graphes . . . . .	2
1.1.2	Arbres . . . . .	3
1.2	Nombres de Catalan . . . . .	6
1.2.1	Nombres de Catalan et arbres . . . . .	6
1.2.2	Nombres de Catalan et loi du demi-cercle . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Théorème de Wigner</b>	<b>9</b>
2.1	Théorème de Wigner . . . . .	9
2.2	Expérience . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Annexes</b>	<b>20</b>
3.1	Pour la preuve du théorème de Wigner . . . . .	20
3.2	Code programme Maple . . . . .	28

## Résumé

L'objet de ce travail est la présentation et la démonstration du théorème de Wigner. C'est un théorème fondamental de la théorie des spectres de matrices aléatoires dont la dimension tend vers l'infini. Ce théorème entraîne que la distribution des valeurs propres de telles matrices est de la forme d'un demi-cercle. Une expérience faite sous MAPLE confirme cette forme pour des matrices de grande taille.

## Introduction

Depuis la fin des années 1920, les matrices aléatoires ont fait l'objet d'une analyse statistique avancée qui a commencé avec le travail de J. Wishart dans "The generalized product moment distribution in samples from a multivariate population" apparu dans *Biometrika* en 1928. Cependant ces travaux se sont basés sur des matrices aléatoires de taille fixe dont les coefficients ont été tirés d'une loi normale centrée-réduite.

Les premiers résultats asymptotiques sur le spectre de matrices aléatoires dont la taille tend vers l'infini ont été obtenus par Eugene Wigner dans les années 1950 dans une série de trois papiers dont le premier est : "Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions" apparu en 1955. Les travaux de Wigner étaient motivés par la physique nucléaire et expliquent les résultats expérimentaux des niveaux mesurés d'énergie atomique grâce à la limite du spectre de ces matrices aléatoires. Depuis ces travaux, l'analyse de la limite du spectre des matrices aléatoires dont la taille tend vers l'infini a attiré l'attention et a suscité intérêt pour les chercheurs dans le domaine des probabilités, des statistiques et de la physique.

Ce travail d'initiative personnelle encadré réalisé dans le cadre de la licence de mathématiques a pour objet de présenter le théorème de Wigner et sa preuve. Selon ce théorème pour  $A^N$  une matrice aléatoire de taille  $N \times N$  si

$$\mathbb{E} [A_{ij}^N] = 0, \mathbb{E} [|A_{ij}^N|^2] = \frac{1}{N}$$
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (A^N)^k \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ C_{\frac{k}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Il y a convergence en espérance et presque sûrement. Un corollaire très important de ce théorème est que la distribution des valeurs propres d'une matrice aléatoire dont la dimension tend vers l'infini est de la forme d'un demi-cercle.

Avant de présenter le théorème et sa preuve, il convient d'exposer les notions fondamentales qui servent à démontrer le théorème. Ces notions sont les graphes, les nombres de Catalan et la loi du demi-cercle. Cette présentation est faite dans un premier chapitre où le lien qui existe entre ces notions mathématiques est formulé. Dans un deuxième chapitre, il y a le théorème de Wigner, sa preuve ainsi qu'une expérience sous le logiciel MAPLE pour tester le théorème. Enfin en annexes tous les théorèmes, lemmes et propriétés qui ont aidé pour la démonstration sont démontrés.

**Remerciements** Je remercie Guillaume AUBRUN d'avoir pensé à ce sujet intéressant et de m'avoir permis de redécouvrir l'élégance mathématique. Je le remercie aussi pour son soutien durant la réalisation de ce travail.

# Chapitre 1

## Eléments de la théorie des graphes et nombres de Catalan

### 1.1 Eléments de la théorie des graphes

#### 1.1.1 Graphes

Un graphe permet de représenter simplement la structure, les connexions, les cheminements possibles d'un ensemble complexe comprenant un grand nombre de situations, en exprimant les relations et les dépendances éventuelles entre ses éléments. Ainsi un réseau de communication, un réseau routier ou ferroviaire, ou encore un arbre généalogique peuvent être représentés par des graphes. Dans notre cas on s'intéressera à la représentation de l'expression d'une matrice aléatoire de taille  $N \times N$  par les graphes. Pour cela il y aura besoin de préciser quelques notions sur les graphes, comme par exemple savoir ce que c'est un graphe orienté, non orienté, ou connexe. Commençons donc par quelques définitions.

**Définition 1.1.1 (Graphe orienté)** *Un graphe orienté  $G = (S, E)$  est déterminé par :*

- un ensemble  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  dont les éléments sont appelés sommets
- un ensemble  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  du produit cartésien  $S \times S$  dont les éléments sont appelés arcs.

Pour un arc  $e = (s_i, s_j)$ ,  $s_i$  est l'extrémité initiale,  $s_j$  l'extrémité finale (ou bien origine et destination). L'arc  $e$  part de  $s_i$  et arrive à  $s_j$ . Un arc de la forme  $(s_i, s_i)$

est appelé *boucle*.

Dans ce travail on s'intéresse à des matrices symétriques, donc pour faire appel aux indices des coefficients de ces matrices, on utilise des graphes non orientés.

**Définition 1.1.2 (Graphe non orienté)** *Un graphe non orienté  $G = (S, \tilde{E})$  est déterminé par :*

- un ensemble  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  dont les éléments sont appelés sommets
- un ensemble  $\tilde{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  qui est un sous-ensemble du produit cartésien  $S \times S$  et dont les éléments sont appelés arêtes.

Donc dans le cas des graphes non orientés on s'intéresse à l'existence d'arc(s) entre deux sommets (sans en préciser l'ordre).

**Définition 1.1.3 (Chaîne)** *Une chaîne est une séquence d'arcs telle que chaque arc ait une extrémité commune avec le suivant.*

**Définition 1.1.4 (Cycle)** *Un cycle est une séquence d'arêtes distinctes  $e_i = (s_i, s_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq p$  telles que  $\exists p \geq 1$ ,  $s_1 = s_{p+1}$ .*

**Définition 1.1.5 (Graphe connexe)** *Un graphe  $G = (S, E)$  est connexe si  $\forall i, j \in S$  il existe une chaîne entre  $i$  et  $j$ .*

Après avoir donné ces quelques définitions sur les graphes, nous regarderons une forme particulière et fort utile de graphes : *les arbres*.

## 1.1.2 Arbres

**Définition 1.1.6 (Arbre)** *Un arbre est un graphe connexe qui ne contient aucun cycle.*

On dit qu'un arbre est orienté s'il est dessiné sur un plan et dans ce cas l'orientation du plan devient l'orientation de l'arbre aussi.

**Remarque 1.1.7** *La notion d'orientation d'un arbre est différente de la notion d'orientation d'un graphe quelconque.*

Un arbre peut avoir une *racine* et dans ce cas on spécifie un arc de l'arbre d'où on part pour le parcourir.

On peut regarder un arbre comme un arbre double, c'est - à - dire où chaque arête apparaît deux fois comme deux arêtes parallèles des deux côtés de l'arête de départ. Le chemin qui part de la racine et qu'on peut parcourir sur cet arbre double, prendra comme orientation celle du plan.

Les arbres sont différents des autres graphes et cette particularité peut être caractérisé mathématiquement.

**Lemme 1.1.8** Soit  $G = (S, E)$  un graphe connexe avec  $S$  l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes. On note  $|A|$  le nombre d'éléments distincts de l'ensemble fini  $A$ . On a alors :

$$|S| \leq |E| + 1$$

Il y a égalité si et seulement si  $G$  est un arbre.

*Preuve*

Si  $|S| = 1$  alors l'inégalité est évidente.

Pour  $|S| = n \geq 1$  procédons par récurrence.

Supposons que  $|S| = n$  et soit  $s$  un élément de  $S$ . Ce sommet est contenu dans au moins une arête de  $E$ . Soit  $l \geq 1$  le nombre d'arêtes de  $E$  qui contiennent  $s$ . On les note  $(e_1, \dots, e_l)$ . On remarque alors que  $G$  se décompose en deux parties : celle composée de  $s$  et  $(e_1, \dots, e_l)$  et l'autre partie où il y a les  $n - 1$  sommets qui restent et les arêtes autres que  $(e_1, \dots, e_l)$ . Cette deuxième partie est en fait composée de  $r \leq l$  graphes connexes  $G_j = (S_j, E_j)$  pour  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$ . Plus précisément il y aura au maximum autant de graphes connexes que d'arêtes qui contiennent  $s$ . Il peut y en avoir moins si les sommets autres que  $s$  des deux arêtes qui contiennent  $s$ , sont reliées par la même arête ou plus simplement si  $s$  fait partie d'un cycle. On a :

$$|S| - 1 = \sum_{j=1}^r |S_j|, \quad |E| - l = \sum_{j=1}^r |E_j|$$

*Hypothèse de récurrence* :  $|V_j| \leq |E_j| + 1$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|V| - 1 \leq \sum_{j=1}^r |E_j| + 1 = |E| + r - l \leq |E|. \quad (1.1)$$

Cela prouve la première partie du 1.1.8. Pour la deuxième partie du lemme on

se sert de la définition de l'arbre et plus particulièrement du fait qu'un arbre ne contient pas de cycles. En effet, en se servant de ce qu'on a précisé au-dessus sur pourquoi  $r \leq l$ , on a vu qu'il y aura égalité si et seulement si il n'y a aucun cycle dans le graphe parce que s'il y a même un seul cycle, deux sommets se partagent la même arête et donc il y aura inégalité stricte :  $r < l$  et donc inégalité stricte dans 1.1. Alors pour que  $r = l$  il suffit et il faut que  $G$  soit un arbre.  $\square$

Après ce lemme faisons un pas en avant vers le lien qui existe entre le nombre d'arbres orientés et les nombres de Catalan. Regardons tout d'abord le lien entre les arbres et les chemins de Dick.

**Définition 1.1.9 (Chemin de Dyck)** *Un chemin de Dyck de longueur  $2n$ ,  $c : (\{1, \dots, 2n\} \rightarrow \mathbb{N})$  est un chemin qui commence et se termine à l'origine, avec  $c(i+1) - c(i) \in \{-1, 1\}$  et qui reste au dessus de l'axe non négatif.*

**Proposition 1.1.10** *Il y a une bijection entre l'ensemble des arbres orientés enracinés avec  $n$  arêtes et les chemins de Dyck de longueur  $2n$ .*

*Preuve*

Soit  $G = (S, E)$  un arbre de  $n$  arêtes. On le regardera comme un arbre double, donc où chaque arête de  $E$  apparaît deux fois. L'ensemble des sommets  $S$  ne change pas. On part de la racine et on parcourt un chemin sur cet arbre double, chemin qui prend l'orientation du plan.

Le premier pas sur l'arbre correspond au premier pas du chemin de Dyck. En parcourant le chemin sur l'arbre on ajoute  $+1$  au chemin de Dyck chaque fois qu'on parcourt une arête qu'on n'avait pas parcouru avant, et si on parcourt une arête déjà rencontrée avant, on lui ajoute  $-1$ . Comme les arêtes sont toutes doubles et pour parcourir une arête pour la deuxième fois il faut l'avoir parcouru une première fois, pour ajouter  $-1$  il faut avoir ajouté  $+1$ . Donc on ajoute et on enlève 1 autant de fois qu'il y a des arêtes et le chemin de Dyck atteint 0 après  $2n$  pas.

Après avoir parcouru tout l'arbre, on retourne à la racine et le chemin de Dyck atteint de nouveau l'origine. Donc il y a une bijection entre les arbres orientés enracinés avec  $n$  arêtes et les chemins de Dyck de longueur  $2n$  car on peut associer un chemin de Dyck unique à chaque arbre et un arbre unique à chaque chemin de Dyck.  $\square$

## 1.2 Nombres de Catalan

### 1.2.1 Nombres de Catalan et arbres

En mathématique combinatoire, les nombres de Catalan forment une séquence de nombres naturels qui apparaissent et aident à résoudre des problèmes de comptage. Ils sont appelés ainsi en l'honneur du mathématicien belge Eugène Charles Catalan (1814-1894).

Le nombre de Catalan d'ordre  $n$  s'exprime par :

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n)!}, \forall n \geq 0.$$

Les nombres de Catalan pour  $n = 1, 2, \dots$  sont 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ...

**Proposition 1.2.1** *Les nombres de Catalan satisfont la relation de récurrence :*

$$C_0 = 1 \text{ et } C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

*Preuve*

Pour  $n = 0$ ,  $C_0 = 1$  car  $0! = 1$ .

Montons la relation de récurrence.  $\forall n \geq 1$

$$C_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!}$$

et

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n)!}$$

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!} \times \frac{(n+1)!(n)!}{(2n)!} = \frac{(2n+1)2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(2n+1)}{n+2} \square$$

Les nombres de Catalan servent également à compter le nombre de chemins de Dyck. Le nombre de chemins de Dyck de longueur  $n$  est ainsi donné par le nombre de Catalan d'ordre  $n$ .

Par 1.1.10 et ce qu'on vient de dire il résulte ce corollaire.

**Corollaire 1.2.2** *Le nombre d'arbres orientés avec racine et  $n$  arêtes est donné par  $C_n$ , le nombre de Catalan d'ordre  $n$ .*

## 1.2.2 Nombres de Catalan et loi du demi-cercle

**Loi du demi-cercle** Soit  $f(x)$  la fonction de densité de la loi du demi-cercle. Elle est de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbb{1}_{|x| \leq 2}$$

**Proposition 1.2.3** Soit  $m_k = \int x^k f(x) dx$  le moment d'ordre  $k$  de la loi du demi-cercle. Alors

$$\forall k \geq 0, m_{2k} = C_k$$

*Preuve*

Ecrivons  $m_{2k}$ .

$$m_{2k} = \int x^{2k} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbb{1}_{|x| \leq 2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^{2k} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} dx$$

On procède à un changement de variable en posant  $x = 2 \sin(\theta)$ . Pour les bornes : si  $x = 2$  alors  $\sin(\theta) = 1$  et donc  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et pour borne inférieure en procédant de la même façon on obtient  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ .  $d(2 \sin(\theta)) = 2 \cos(\theta) d\theta$

$$m_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin(\theta))^{2k} (\theta) \sqrt{4 - 4 \sin^2(\theta)} d\theta \quad (1.2)$$

$$= \frac{2 \times 2^{2k}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(\theta) \cos^2(\theta) d\theta \quad (1.3)$$

$$= \frac{2 \times 2^{2k}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(\theta) (1 - \sin^2(\theta)) d\theta \quad (1.4)$$

$$= \frac{2 \times 2^{2k}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(\theta) d\theta - \frac{2 \times 2^{2k}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2}(\theta) d\theta \quad (1.5)$$

On calcule le deuxième terme par une intégration par parties. Posons

$$u = \sin^{2k+1}(\theta) \text{ et } v' = \sin(\theta)$$

$$u' = (2k + 1) \cos(\theta) \sin^{2k}(\theta)$$

$$v = -\cos(\theta)$$

Nous aurons ainsi :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1}(\theta) \sin(\theta) d\theta = [-\sin^{2k+1}(\theta) \cos(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (2k + 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(\theta) \cos^2(\theta) d\theta$$

Le premier terme de cette expression est nul car  $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Dans le deuxième terme en multipliant par  $\frac{2 \times 2^{2k}}{\pi}$  on reconnaît  $(2k+1)m_{2k}$ .  
En remplaçant dans 1.2 on a :

$$m_{2k} = \frac{2 \times 2^{2k}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(\theta d\theta) - (2k+1)m_{2k}$$

Donc,

$$(2k+2)m_{2k} = \frac{2 \times 2^{2k}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(\theta d\theta)$$

En intégrant encore une fois par parties on a :

$$\frac{2 \times 2^{2k}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(\theta d\theta) = 4(2k-1)m_{2k-2}$$

Remarquons que  $m_0 = 1$  car  $m_0 = \int f(x)$  et  $f(x)$  est la fonction de densité de  $X$ . On a également :

$$m_{2k} = \frac{4(2k-1)}{2k+2} m_{2k-2} = \frac{2(2k-1)}{k+1} m_{2k-2}$$

On voit que cette relation de récurrence est la même que la proposition 1.2.1 à l'ordre  $n-1$ . Il en résulte que  $m_{2k} = C_k$   $\square$

# Chapitre 2

## Théorème de Wigner

### 2.1 Théorème de Wigner

**Théorème 2.1.1 (Théorème de Wigner)** Soit  $\mathbf{A}^N$  une matrice aléatoire de taille  $N \times N$  de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  telle que  $(A_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq N)$  soient indépendantes et  $\mathbf{A}^N$  soit auto-adjointe, c'est-à-dire  $A_{ij}^N = \overline{A_{ji}^N}$ .

Supposons que

$$\mathbb{E}[A_{ij}^N] = 0, \mathbb{E}[|A_{ij}^N|^2] = \frac{1}{N}$$

On suppose en outre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, B_k = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{ij \in \{1, \dots, N\}^2} \mathbb{E}[|\sqrt{N}A_{ij}^N|^k] < \infty.$$

Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ C_{\frac{k}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

en espérance et presque sûrement.  $(C_k)_{k \geq 0}$  sont les nombres de Catalan.

*Preuve*

*1. Convergence en espérance*

On pose  $\mathbf{B}^N = \sqrt{N}\mathbf{A}^N = (B_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq N}$ . En appliquant le lemme 3.1.1 présenté en annexes on a :

$$\text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_k=1}^N A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_k i_1}.$$

Notons

$$\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_k=1}^N A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_k i_1} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_k i_1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] &= \frac{1}{N} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \mathbb{E} (A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_k i_1}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \mathbb{E} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^k (B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N N^{-\frac{k}{2}-1} \mathbb{E} (B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1}) \end{aligned}$$

Notons  $P(\mathbf{i}) = \mathbb{E} (B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1})$ . En appliquant le corollaire 3.1.7 présenté en annexe à  $P(\mathbf{i})$  et sachant que

$$B_k = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{ij \in \{1, \dots, N\}^2} \mathbb{E} \left[ |\sqrt{N} A_{ij}^N|^k \right] < \infty, \forall k \in \mathbb{N},$$

on aura :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{i}) &= \mathbb{E} (B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1}) \\ &\leq \mathbb{E} (|B_{i_1 i_2}|^k)^{\frac{1}{k}} \dots \mathbb{E} (|B_{i_k i_1}|^k)^{\frac{1}{k}} \\ &= \mathbb{E} (|\sqrt{N} A_{i_1 i_2}|^k)^{\frac{1}{k}} \dots \mathbb{E} (|\sqrt{N} A_{i_k i_1}|^k)^{\frac{1}{k}} \\ &\leq B_k^{\frac{1}{k}} \dots B_k^{\frac{1}{k}} \\ &= B_k \end{aligned}$$

$B_k, \forall k$  est une constante. Il résulte ainsi que  $P(\mathbf{i})$  est uniformément borné par  $B_k$ .

Remarquons que les variables de la matrice aléatoire  $\mathbf{B}^N$  pour  $1 \leq i \leq j \leq N$  sont indépendantes car  $\mathbf{B}^N = \sqrt{N} \mathbf{A}^N$  et  $(A_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq N)$  sont indépendantes. Et comme les  $A_{ij}$  sont des variables centrées,  $B_{ij}$  sont des variables centrées aussi. Donc

$$P(\mathbf{i}) = 0 \text{ si } \exists (p, p+1) \text{ tels que } \forall l \neq p, (p, p+1) \neq (l, l+1) \text{ ou } (l+1, l).$$

Si on suppose qu'il existe un tel  $p$ , même s'il est unique on aura :

$$P(\mathbf{i}) = \mathbb{E} (B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_p i_{p+1}} \dots B_{i_k i_1}) \quad (2.1)$$

$$= \mathbb{E} (B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_{p-1} i_p} B_{i_{p+1} i_{p+2}} \dots B_{i_k i_1}) \mathbb{E} (B_{i_p i_{p+1}}) \quad (2.2)$$

$$= 0 \quad (2.3)$$

(2.2) vient du fait que  $B_{i_p, i_{p+1}}$  est indépendant des autres variables car il n'existe pas un indice  $l$  différent de  $p$  pour lequel

$$(i_p, i_{p+1}) = (i_l, i_{l+1}) \text{ ou } (i_{l+1}, i_l).$$

Donc on n'a pas deux fois la même variable dans le produit ni par égalité des indices ni sachant que la matrice est symétrique et  $B_{i_p, i_{p+1}} = B_{i_{p+1}, i_p}$ . Puisque les variables sont indépendantes, l'espérance du produit est le produit des espérances. Ici on utilise comme convention  $i_{k+1} = i_1$

$$\forall p \in \{1, \dots, k\}, \mathbb{E}(A_{i_p, i_{p+1}}) = 0$$

Donc

$$\mathbb{E}(B_{i_p, i_{p+1}}) = 0.$$

Pour que  $P(\mathbf{i}) > 0$  il faut alors que

$$\forall p \in 1, \dots, k \exists l \text{ tel que } (i_p, i_{p+1}) = (i_l, i_{l+1}) \text{ ou } (i_{l+1}, i_l)$$

Regardons par la théorie des arbres quels sont les indices qui contribuent à la somme, i.e. ceux pour lesquels  $P(\mathbf{i}) > 0$ .

Soit  $S(\mathbf{i}) = \{i_1, \dots, i_k\}$  l'ensemble des sommets. Soit  $E(\mathbf{i}) = (a_p)_{p=1}^k = (i_p, i_{p+1})_{p=1}^k$  l'ensemble des arcs. Soit  $G(\mathbf{i}) = (S(\mathbf{i}), E(\mathbf{i}))$  le graphe qui a comme sommets ceux dans  $S(\mathbf{i})$  et ces sommets sont reliés par les arcs dans  $E(\mathbf{i})$ . Il existe une suite d'arcs qui relie tout couple de sommets donc  $G(\mathbf{i})$  est un graphe connexe.

Considérons  $\tilde{G}(\mathbf{i}) = (\tilde{S}(\mathbf{i}), \tilde{E}(\mathbf{i}))$ , qui est le squelette de  $G(\mathbf{i})$  dans le sens où  $\tilde{S}(\mathbf{i})$  ne contient pas des sommets multiples et  $\tilde{E}(\mathbf{i})$  est l'ensemble des arêtes différentes contenues dans  $E(\mathbf{i})$ .

Par ce qu'on a dit avant sur  $P(\mathbf{i})$  on sait que pour que  $P(\mathbf{i}) > 0$  il faut que chaque arête de  $\tilde{E}(\mathbf{i})$  ait au moins une jumelle. Comme  $\tilde{E}(\mathbf{i})$  contient les mêmes arêtes de  $E(\mathbf{i})$  où une arête multiple est comptée une seule fois, il résulte que

$$P(\mathbf{i}) > 0 \implies |\tilde{E}(\mathbf{i})| \leq \frac{|E(\mathbf{i})|}{2} = \frac{k}{2}$$

où  $|E|$  désigne le nombre d'éléments de  $E$ .

En appliquant le lemme 1.1.8 à  $\tilde{G}(\mathbf{i})$  on a :

$$|\tilde{V}(\mathbf{i})| \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

Donc il y a au plus  $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$  indices pour lesquels  $P(\mathbf{i}) > 0$  et chacun d'eux est choisi dans  $\{1, \dots, N\}$ . Donc il y en a au plus  $N^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1}$ . On aura alors

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N N^{-\frac{k}{2}-1} \mathbb{E} (B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1}) \quad (2.4)$$

$$\leq N^{-\frac{k}{2}-1} \times N^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1} B_k \quad (2.5)$$

$$= B_k N^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - \frac{k}{2}} \quad (2.6)$$

Dans (2.6) la somme a disparu car on a remplacé par le nombre d'indices pour lesquels  $P(\mathbf{i}) > 0$  et on sait aussi par l'inégalité de Hölder que  $P(\mathbf{i}) \leq B_k$  pour ces indices. Si on passe à la limite du terme à droite, pour des  $k$  impairs on aura :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B_k N^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - \frac{k}{2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B_k}{N^\alpha} = 0$$

où  $\alpha = \frac{k}{2} - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor > 0$  car  $k$  impair. Comme  $\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right]$  est majorée par un terme qui tend vers 0, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] = 0$$

Dans le cas où  $k$  est pair, les seuls indices pour lesquels  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right]$  n'est pas nul sont les termes pour lesquels :

$$|\tilde{S}(\mathbf{i})| = \frac{k}{2} + 1 \quad (2.7)$$

En effet pour les autres termes on aura la même chose que pour les  $k$  impairs.

L'équation 2.7 et le lemme 1.1.8 impliquent que  $\tilde{G}(\mathbf{i})$  est un arbre et que  $|\tilde{E}(\mathbf{i})| = \frac{k}{2}$  donc chaque arête de  $E(\mathbf{i})$  apparaît exactement deux fois. Cela signifie que chaque couple d'arcs qui correspondent à la même arête de  $\tilde{E}(\mathbf{i})$  est de la forme

$\{(i_p, i_{p+1}), (i_{p+1}, i_{p+2})\}$ . Donc  $G(\mathbf{i})$  peut être considéré comme un arbre double où chaque arête de  $\tilde{G}(\mathbf{i})$  est maintenant double. On peut spécifier une racine pour  $G(\mathbf{i})$ , par exemple l'arc  $(i_1, i_2)$ . Et alors cet arbre est orienté selon l'ordre naturel des indices. Tout cela implique que pour que  $P(\mathbf{i}) > 0$ ,  $\mathbf{i}$  doit être tel que  $G(\mathbf{i})$  soit un arbre double qui est parcouru en partant de la racine suivant l'ordre des indices. Chaque arête est parcourue deux fois et on retourne à la racine après  $k$  pas. En effet, pour ces indices,

$$P(\mathbf{i}) = \prod_{e \in \tilde{E}(\mathbf{i})} \mathbb{E} [|B_e^N|^2] = \prod_{e \in \tilde{E}(\mathbf{i})} \mathbb{E} [|\sqrt{N}A_e^N|^2] = 1$$

On a regroupé ainsi les indices en couples comme on a fait pour les arcs de  $E(\mathbf{i})$  en arêtes de  $\tilde{E}(\mathbf{i})$ . Pour ces indices  $P(\mathbf{i}) = 1$  parce que il est le produit des variances de  $B_e$  et sa variance vaut 1.

Regardons maintenant  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right]$ .

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N N^{-\frac{k}{2}-1} P(\mathbf{i}) \quad (2.8)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} N^{-\frac{k}{2}-1} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N 1 \quad (2.9)$$

On peut calculer cette dernière somme en ayant à l'esprit qu'elle est non nulle pour les couples d'indices qui sont arêtes de l'arbre  $\tilde{G}$ . Il y a  $\frac{k}{2}$  couples d'indices et  $\frac{k}{2} + 1$  indices à choisir parmi  $\{1, \dots, N\}$ . Donc le premier choix s'effectue parmi  $N$ , le deuxième parmi  $(N-1)$  et le  $(\frac{k}{2} + 1)^{\text{me}}$  parmi  $(N - \frac{k}{2})$ . Donc pour chaque  $\mathbf{i}$  tel que  $\tilde{G}$  est un arbre il y a  $N(N-1)\dots(N - \frac{k}{2})$  manières de choisir les indices.

Combien y a-t-il de manières différentes de former un arbre avec  $\frac{k}{2}$  arêtes? Combien de  $\mathbf{i}$  différents? D'après le corollaire 1.2.2 il y en a  $C_{\frac{k}{2}}$ .

On scinde la somme en  $C_{\frac{k}{2}}$  sommes et chaque somme vaut :

$$\frac{N(N-1)\dots(N - \frac{k}{2})}{N^{\frac{k}{2}+1}} \rightarrow 1$$

La somme  $N^{-\frac{k}{2}-1} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N 1$  tend vers 1 parce que  $N(N-1)\dots(N - \frac{k}{2}) \sim_{+\infty} N^{\frac{k}{2}+1}$ . Le nombre de sommes est compté par  $C_{\frac{k}{2}}$ , ce qui signifie qu'on compte  $C_{\frac{k}{2}}$  1 et

finalement on obtient la convergence en espérance :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] = C_{\frac{k}{2}}$$

Donc on vient de prouver la convergence en espérance.  $\square$  *2. Convergence presque sûre* Pour cette partie de la preuve, il y a besoin de la variance de la variable aléatoire  $\frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right)$ . Elle est donnée par l'expression :

$$\mathbb{V} \left( \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N^2} \left( \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right]^2 \quad (2.10)$$

$$= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N^2} \left( \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^k B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1} \right)^2 \right] \quad (2.11)$$

$$- \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^k B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1} \right]^2 \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{N^{k+2}} \mathbb{E} \left[ \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \sum_{i'_1, \dots, i'_k=1}^N B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1} B_{i'_1 i'_2} B_{i'_2 i'_3} \dots B_{i'_k i'_1} \right] \quad (2.13)$$

$$- \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \sum_{i'_1, \dots, i'_k=1}^N \mathbb{E} [B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1}] \mathbb{E} [B_{i'_1 i'_2} B_{i'_2 i'_3} \dots B_{i'_k i'_1}] \quad (2.14)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_k=1, i'_1, \dots, i'_k=1}^N [P(\mathbf{i}, \mathbf{i}') - P(\mathbf{i})P(\mathbf{i}')] \quad (2.15)$$

On note  $P(\mathbf{i}, \mathbf{i}') = \mathbb{E} [B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1} B_{i'_1 i'_2} B_{i'_2 i'_3} \dots B_{i'_k i'_1}]$ .  
 Soit  $G(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  le graphe qui a pour sommets l'ensemble

$$S(\mathbf{i}, \mathbf{i}') = \{i_1, \dots, i_k = 1, i'_1, \dots, i'_k = 1\}$$

et comme arcs l'ensemble

$$E(\mathbf{i}, \mathbf{i}') = \left\{ (i_p, i_{p+1})_{1 \leq p \leq k}, (i'_p, i'_{p+1})_{1 \leq p \leq k} \right\}$$

Pour que les indices  $(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  contribuent à la somme il faut que

$$P(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \neq P(\mathbf{i})P(\mathbf{i}')$$

On a

$$P(\mathbf{i}, \mathbf{i}') = P(\mathbf{i})P(\mathbf{i}')$$

si  $E(\mathbf{i}) \cap E(\mathbf{i}') = 0$  par indépendance entre les variables  $B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1}$  et  $B_{i_k i_1} B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_k i_1}$ . Comme pour la convergence en espérance,  $P(\mathbf{i}, \mathbf{i}') > 0$  si chaque arête de  $E(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  apparaît au moins deux fois, donc si

$$|E(\mathbf{i}, \mathbf{i}')| \leq k$$

Cela pose comme condition que  $G(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  soit connexe parce que  $G(\mathbf{i})$  et  $G(\mathbf{i}')$  sont connexes et  $E(\mathbf{i}) \cap E(\mathbf{i}') \neq 0$ . Soit  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  le squelette de  $G(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  dans le même sens que l'on l'a défini dans la convergence en espérance. Alors en appliquant le lemme 1.1.8 :

$$|S(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{i}}')| \leq |E(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{i}}')| + 1 \leq k + 1$$

Trouvons une borne sup pour la variance afin de prouver la convergence p.s. Pour cela montrons que on ne peut pas avoir égalité dans l'équation ci-dessus. S'il y a égalité, selon le lemme 1.1.8,  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  est un arbre et  $|E(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{i}}')| = k$ . Ainsi chaque arête de  $G(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  apparaît exactement deux fois comme indice dans  $B_{ij}$ . Pour que  $P(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \neq P(\mathbf{i})P(\mathbf{i}')$  il faut en outre que dans ces indices  $(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  qui contribuent à la somme, il n'y ait pas que des indices qui apparaissent exactement deux fois dans  $G(\mathbf{i})$  et  $G(\mathbf{i}')$ . Il faut en revanche qu'il y ait au moins un élément en commun entre les intersections  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \cap G(\mathbf{i})$  et  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \cap G(\mathbf{i}')$ . On aboutit ainsi à une contradiction avec le fait que  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  est un arbre car :

Si on choisit une racine de  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$ , par exemple  $(i_1, i_2)$ , et si on choisit comme orientation l'ordre naturel des indices, alors on peut parcourir un chemin sur  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \cap G(\mathbf{i})$  qui nous emmène de nouveau à la racine. Donc soit il parcourt 2 fois chaque arête de  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \cap G(\mathbf{i})$  comme pour les arbres doubles, ce qui est à exclure car  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \cap G(\mathbf{i})$  et  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \cap G(\mathbf{i}')$  ont un élément commun. Soit il y a un cycle dans l'intersection, donc dans  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  ce qui ne peut pas arriver car  $\tilde{G}(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$  est un arbre, donc par définition il ne contient pas de cycles.

Donc  $|E(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{i}}')| < k$  et  $|S(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{i}}')| \leq k$ .

Il y a alors au maximum  $k$  indices qui contribuent à la somme. Ces indices on les choisit parmi  $\{1, \dots, N\}$ , donc il y a  $N^k$  choix possibles et on peut remplacer la double somme sur les indices dans 2.10 par  $N^k$ . On peut ensuite trouver une borne sup pour  $P(\mathbf{i}, \mathbf{i}') - P(\mathbf{i})P(\mathbf{i}')$  en appliquant l'inégalité de Hölder.

$$|P(\mathbf{i}, \mathbf{i}') - P(\mathbf{i})P(\mathbf{i}')| \leq P(\mathbf{i}, \mathbf{i}') + P(\mathbf{i})P(\mathbf{i}') \quad (2.16)$$

$$\leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{ij \in \{1, \dots, N\}^2} \mathbb{E} \left[ |\sqrt{N} A_{ij}^N|^{2k} \right] + B_k \times B_k \quad (2.17)$$

$$\leq B_{2k} + B_{2k} \quad (2.18)$$

$$= 2B_{2k} \quad (2.19)$$

On a ainsi une borne sup pour la variance.

$$\mathbb{V} \left( \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right) \leq \frac{2B_{2k}}{N^2}$$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable  $\frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right)$  on a pour tout  $\delta > 0$  :

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] \right| > \delta \right) \leq \frac{\mathbb{V} \left( \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right)}{\delta^2 N^2} \quad (2.20)$$

$$= \frac{2B_{2k}}{\delta^2 N^2} \longrightarrow 0 \quad (2.21)$$

Soit  $A_n$  l'événement

$$A_n = \left\{ \left| \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] \right| > \delta \right\}$$

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements. Par (2.21)

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] \right| > \delta \right)$$

est le terme général d'une série convergente.

On est dans les conditions d'application du lemme de Borel-Cantelli à  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . D'après ce lemme,  $A_n$  est faux  $\mathbb{P}$  p.s. pour  $N \longrightarrow +\infty$ . Par ailleurs, si on pose

$$u_N = \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right]$$

le fait que la suite  $u_N$  converge vers 0 s'écrit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N = 0 \iff \forall \delta > 0, \exists \varepsilon \text{ tel que } \forall N \geq \varepsilon, |u_N| < \delta$$

Comme l'événement

$$A_n = \left\{ \left| \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] \right| > \delta \right\}$$

est faux pour  $N$  assez grand, il résulte que l'événement complémentaire

$$\left\{ \left| \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] \right| < \delta \right\}$$

est vrai pour  $N$  assez grand, et alors  $u_N$  converge p.s.  $u_N$  est à termes positif donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) \right] \right| = 0 \text{ p.s.}$$

Le théorème de Wigner est ainsi démontré.  $\square$

**Corollaire 2.1.2** *La distribution des valeurs propres d'une matrice  $\mathbf{A}^N$  de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  aléatoire de taille  $N \times N$  est de la forme d'un demi-cercle pour  $N \rightarrow \infty$ . Plus précisément,  $\forall P$  polynôme,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int P(x) d\mu_{A_N} = \int P(x) f(x) dx$$

*Preuve*

Toute matrice symétrique ou hermitienne  $A$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles (preuves en annexe).

Donc  $A$  s'écrit

$$A = PDP^{-1}$$

où  $D$  est une matrice diagonale qui a comme coefficients de la diagonale les valeurs propres de  $A$  et  $P$  est la matrice de passage dans la base où  $A$  est diagonalisable. On a :

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

et

$$\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(D^k) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^k$$

où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{A}^N$  prises avec multiplicités éventuelles. Cela vient du fait que la trace d'une matrice est stable par changement de base.

$$\frac{1}{N} \text{Tr} (\mathbf{A}^N)^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \tag{2.22}$$

$$= \int x^k d\mu_{A_N} \tag{2.23}$$

où  $\mu_{A_N} = \frac{1}{N} \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A_N)} \delta_{A_N}$ .

Remarquons cette équivalence :

$\mu_{A_N}$  suit asymptotiquement la loi du demi-cercle  $\iff \forall k \lim_{N \rightarrow \infty} \int x^k d\mu_{A_N} = m_k = C_{\frac{k}{2}}$

D'après le théorème de Wigner on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) = C_{\frac{k}{2}}$$

pour  $k$  pair. Pour  $k$  impair

$$m_k = \int_{-2}^2 x^k f(x) dx = 0$$

car intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique.

Donc pour  $k$  impair aussi on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Tr} \left( (\mathbf{A}^N)^k \right) = m_k$$

Donc  $\mu_{A_N}$  suit asymptotiquement la loi du demi-cercle et la distribution des valeurs propres de  $\mathbf{A}^N$  est de la forme d'un demi-cercle  $\forall k$ .

Pour prouver que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int P(x) d\mu_{A_N} = \int P(x) f(x) dx$$

il faut remarquer que pour  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int x^k d\mu_{A_N} = \int x^k f(x) dx$$

Comme un polynôme de degré  $n$  est de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

On a pour chaque terme du polynôme :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int a_k x^k d\mu_{A_N} = \int a_k x^k f(x) dx$$

Ainsi :

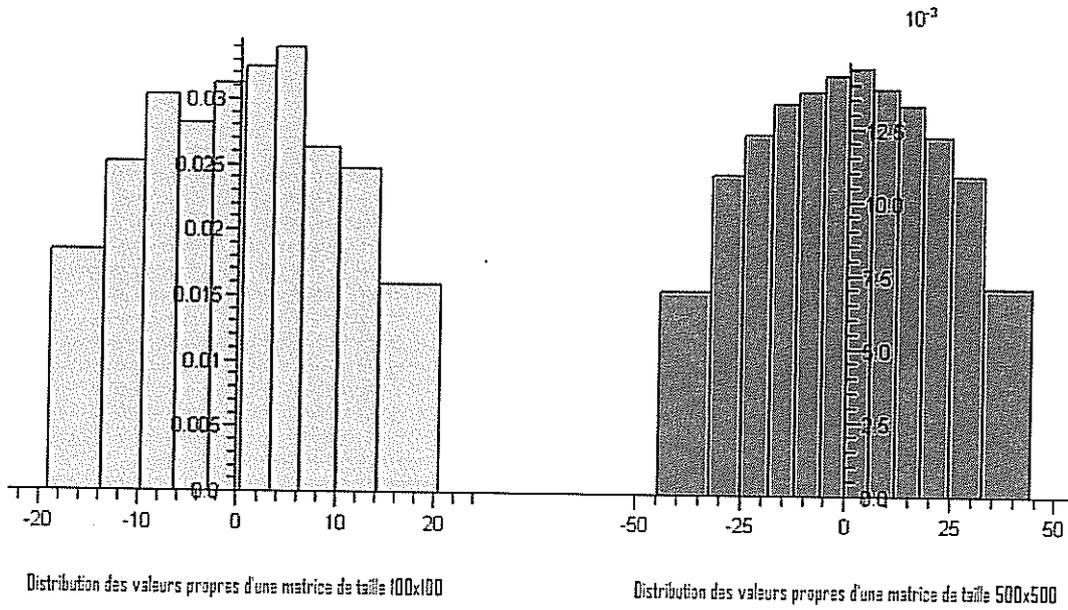
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int P(x) d\mu_{A_N} = \int P(x) f(x) dx$$

□

## 2.2 Expérience

On a testé le théorème de Wigner pour des matrices de taille  $100 \times 100$  et  $500 \times 500$  dont les coefficients sont tirés de la loi normale centrée-réduite. Cela a été fait sous le logiciel MAPLE.

Voilà l'histogramme de la distribution des valeurs propres pour une réalisation de ces matrices aléatoires.



On voit que la distribution des valeurs propres de la matrice de taille  $500 \times 500$  ressemble plus à un demi-cercle. Cela prouve bien le théorème de Wigner et le fait qu'il est vrai pour des matrices dont la taille tend vers l'infini.

# Chapitre 3

## Annexes

### 3.1 Pour la preuve du théorème de Wigner

Dans cette partie on présentera quelques définitions et quelques théorèmes dont on a fait appel pour la preuve du théorème de Wigner.

**Lemme 3.1.1** Soient  $A$  une matrice de taille  $n \times n$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  . et

$k \in \mathbb{N}$ . La trace de  $A^k$  est :

$$Tr(A^k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1}$$

*Preuve* Montrons le résultat par récurrence. Pour  $k=2$  on a :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{kn} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} a_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk} a_{kn} \end{pmatrix}$$

Le coefficient  $(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$ . Donc

$$Tr(A^2) = \sum_{i_1, i_2=1}^n a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_1}$$

Supposons que :

$$(A^{k-1})_{ij} = \sum_{i_1 \dots i_{k-2}=1}^n a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k-2} j}$$

Que vaut  $(A^k)_{ij}$  ?

$$\begin{aligned} (A^k)_{ij} &= \sum_{i_{k-1}=1}^n a_{i_1 i_{k-1}} (A^{k-1})_{i_{k-1} j} \\ &= \sum_{i_{k-1}=1}^n a_{i_1 i_{k-1}} \sum_{i_1 \dots i_{k-2}=1}^n a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k-2} j} \\ &= \sum_{i_1 \dots i_{k-1}=1}^n a_{ii_{k-1}} \dots a_{i_{k-2} j} \end{aligned}$$

Les coefficients de la diagonale sont tels que  $i = j$ .

$$(A^k)_{ii} = \sum_{i_1 \dots i_{k-1}=1}^n a_{ii_{k-1}} \dots a_{i_{k-2} i}$$

La trace est égale à la somme des coefficients de la diagonale ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} Tr(A^k) &= \sum_{i_k=1}^n (A^k)_{i_k i_k} \\ &= \sum_{i_1 \dots i_k=1}^n a_{i_k i_{k-1}} a_{i_{k-1} i_1} \dots a_{i_{k-2} i_k} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1} \end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Définition 3.1.2 (Norme)** Soit  $(S, \Sigma, P)$  un espace mesuré et soit  $1 \leq p \leq \infty$  un nombre réel. Soit  $f$  une fonction mesurable sur  $S$ . La norme d'ordre  $p$  de la fonction  $f$  se note  $\|f\|_p$  et elle vaut :

$$\|f\|_p = \left( \int_S |f|^p d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Définition 3.1.3 (Norme infinie)** Soit  $(S, \Sigma, \mathbb{P})$  un espace mesuré. Soit  $f$  une fonction mesurable sur  $S$ . La norme infinie de la fonction  $f$  se note  $\|f\|_\infty$  et elle vaut :

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M \text{ tels que } |f| \leq M \text{ } \mathbb{P} \text{ presque partout } \}$$

**Proposition 3.1.4 (Inégalité de Young)** Soit  $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $0 \leq p, q \leq \infty$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On a alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

*Preuve* Si  $a = 0$  ou  $b = 0$  alors le résultat est évident. Supposons pour la suite que  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

La fonction du logarithme népérien est concave car sur son domaine de définition  $]0, +\infty[$ ,  $(\ln a)'' = -\frac{1}{a^2} < 0$ . Donc nous avons :

$$p \ln a + q \ln b \leq \ln(pa + qb) \text{ pour } \forall p, q \geq 0 \text{ si } p + q = 1$$

Par les propriétés de la fonction logarithmique, nous avons :

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \leq \ln \left( \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right) \text{ pour } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

La fonction logarithmique est une fonction croissante, donc

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

**Proposition 3.1.5 (Inégalité de Hölder)** Soit  $(S, \Sigma, \mathbb{P})$  un espace mesuré et soient  $0 \leq p \leq q \leq \infty$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . alors pour toute fonction mesurable sur  $S$ ,  $f$  et  $g$  on a :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

On prend comme convention :

$$0 \times +\infty = 0$$

*Preuve*

Si  $\|f\|_p = 0$  alors  $f = 0$   $\mathbb{P}$  presque partout (p.p.) et  $fg = 0$  donc  $\|fg\|_1 = 0$  et on peut raisonner de la même façon dans le cas où  $\|g\|_q = 0$ . Donc l'inégalité est vrai dans ces cas.

Sinon, si  $\|f\|_p = +\infty$  ou  $\|g\|_q = +\infty$  alors  $\|f\|_p \|g\|_q = +\infty$  (sauf pour  $p = 0$  et

$q = \infty$  ou l'inverse) donc l'inégalité est vrai. Supposons maintenant que  $p = +\infty$  et  $q = 1$ . Alors

$$|fg| \leq \|f\|_\infty |g| \text{ p.p.}$$

car

$$|fg| = |f||g| \leq M|g| = \|f\|_\infty |g| \text{ p.p.}$$

où  $M$  est tel que

$$\|f\|_\infty = \inf \{M \text{ tel que } |f| \leq M \text{ p.p.}\}$$

On raisonne de manière identique pour  $p = 1$  et  $q = +\infty$ . Donc faisons la preuve pour  $1 < p, q < +\infty$ .

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \int_S \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \quad (3.1)$$

$$= \int_S \frac{|f|}{\|f\|_p} \times \frac{|g|}{\|g\|_q} \quad (3.2)$$

$$\leq \frac{1}{p} \int_S \left( \frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \int_S \left( \frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^q \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (3.4)$$

Le passage de (3.2) à (3.3) est fait en appliquant l'inégalité de Young.

**Proposition 3.1.6 (Généralisation de l'inégalité de Hölder)** Soit  $(S, \Sigma, \mathbb{P})$  un espace mesuré et soient  $1 < r < \infty$  et  $1 < p_1, \dots, p_n \leq +\infty$  tels que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$ . Alors pour des fonctions  $f_1, \dots, f_n$  mesurables sur  $S$  :

$$\left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_r \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{p_k}$$

*Preuve*

On procède par récurrence.

Pour  $n = 1$  c'est trivial.

Supposons que ce soit vrai à l'ordre  $n - 1$  et prouvons que cela reste vrai à l'ordre  $n$ .

-Si  $p_n = +\infty$  alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$$

En appliquant l'inégalité à  $(f_1 \dots f_{n-1})$  et  $f_n$  et ensuite l'hypothèse de récurrence on a :

$$\|f_1 \dots f_n\|_r \leq \|f_1 \dots f_{n-1}\|_r \|f_n\|_\infty \quad (3.5)$$

$$\leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_{n-1}\|_{p_{n-1}} \|f_n\|_\infty \quad (3.6)$$

- Pour  $p < +\infty$  on pose  $p = \frac{p_n}{p_n - r}$  et  $q = \frac{p_n}{r}$

$$\| |f_1 \dots f_{n-1}|^r |f_n|^r \|_1 \leq \| |f_1 \dots f_{n-1}|^r \|_p \| |f_n|^r \|_q \quad (3.7)$$

$$= \left( \int |f_1 \dots f_{n-1}|^{rp} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |f_n|^{rq} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.8)$$

On élève à la puissance  $\frac{1}{r}$  et on a :

$$\|f_1 \dots f_{n-1} f_n\|_r \leq \|f_1 \dots f_{n-1}\|_{rp} \|f_n\|_{rq} \quad (3.9)$$

$$= \|f_1 \dots f_{n-1}\|_{rp} \|f_n\|_{p_n} \quad (3.10)$$

$$= \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_{n-1}\|_{p_{n-1}} \|f_n\|_{p_n} \quad (3.11)$$

On obtient (3.10) car on avait posé  $q = \frac{p_n}{r}$  et (3.11) car

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p_n} = \frac{p_n - r}{rp_n} = \frac{1}{pr}$$

□

**Corollaire 3.1.7** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires et  $1 < p_1, \dots, p_n \leq +\infty$  et telles que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ . En remarquant que  $\mathbb{E}(|X_i|^p) = \|X_i\|_p$ , l'inégalité de Hölder s'écrit aussi :

$$\mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^n |X_i|^{p_i} \right) \leq \prod_{i=1}^n (\mathbb{E} |X_i|^{p_i})^{\frac{1}{p_i}}$$

**Lemme 3.1.8** Soit  $M$  une matrice réelle symétrique. Alors toutes ses valeurs propres sont réelles.

*Preuve*

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ . Alors  $\lambda \in \mathbb{C}$  et il existe un vecteur propre  $X \in \mathbb{C}^n$ ,  $X \neq 0$ , tel que  $MX = \lambda X$ .

Notons  $'M$  la transposée de ma matrice  $M$ . On a :

$$M\bar{X} = \bar{M}\bar{X} = \bar{M}X = \lambda\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}.$$

On a  $'XM\bar{X} = 'X(\bar{\lambda}\bar{X}) = \bar{\lambda}('X\bar{X})$  et

$$'XM\bar{X} = '(XM\bar{X}) \tag{3.12}$$

$$= ' \bar{X}MX = ' \bar{X}\lambda X \tag{3.13}$$

$$= \lambda (' \bar{X}X) = \lambda ('X\bar{X}) \tag{3.14}$$

On a (3.12) parce que  $'(XM\bar{X})$  est un vecteur de dimension  $1 \times 1$ . On a :

$$'X\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0$$

car  $X \neq 0$ . Alors  $'X = \lambda'X\bar{X}$ .

Donc  $\bar{\lambda} = \lambda$  et donc  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Théorème 3.1.9 (Théorème spectral)** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ . Soit  $f$  un endomorphisme auto-adjoint de  $E$ , c'est-à-dire  $f = f^*$ . Alors  $E$  admet une base orthonormée  $B$  telle que la matrice de  $f$  dans la base  $B$  est diagonale.

*Preuve* Par récurrence sur  $n$ . Soit  $B_0$  une base orthonormée quelconque. Alors la matrice de  $f$  dans la base  $B_0$  est symétrique et admet par le lemme 3.0.8 une valeur propre réelle  $\lambda$ .  $\lambda$  est donc une valeur propre de  $f$ , et il existe un vecteur propre  $v_1 \in E$  et  $v_1 \neq 0$  tel que  $f(v_1) = \lambda v_1$ .

Comme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est définie positive, c'est-à-dire  $\langle v_1, v_1 \rangle > 0$ , on peut poser :

$$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} \neq 0$$

et

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Alors

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle = \frac{\langle v_1, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} = 1$$

En outre on a toujours

$$f(e_1) = \lambda e_1$$

Posons

$$H = \text{Vect}(e_1)^\perp = \{x \in E, \langle e_1, x \rangle = 0\}$$

Comme  $H$  est défini par une unique équation linéaire :  $\dim H \geq n - 1$

D'autre part si  $x \in H \cap \text{Vect}(e_1)$  alors

$$x = \alpha e_1 \text{ et } 0 = \langle x, e_1 \rangle = \alpha \langle e_1, e_1 \rangle = \alpha$$

D'où  $H \cap \text{Vect}(e_1) = \{0\}$  et  $H \oplus \text{Vect}(e_1) \subseteq E$ . Donc  $\dim H \leq n - 1$ . Finalement,

$$\dim H = n - 1 \text{ et } H \oplus \text{Vect}(e_1) = E$$

Démontrons que  $f(H) \subseteq H$ .

Soit  $x \in H$ , alors  $x \perp e_1$ .

$$\begin{aligned} \langle f(x), e_1 \rangle &= \langle x, f^*(e_1) \rangle \\ &= \langle x, f(e_1) \rangle \\ &= \langle x, \lambda e_1 \rangle \\ &= \lambda \langle x, e_1 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $f(x) \perp e_1$  et  $f(x) \in H$ . Donc  $f(H) \subseteq H$  et on peut considérer alors  $f$  restreinte à  $H$  comme un endomorphisme de  $H$ .

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  la restriction de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à  $H$ .

Alors  $\forall x, y \in H$  on a  $f(x), f(y) \in H$  et

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle_H &= \langle f(x), y \rangle \\ &= \langle x, f^*(y) \rangle \\ &= \langle x, f(y) \rangle \\ &= \langle x, f(y) \rangle_H \end{aligned}$$

Donc  $f$  restreint à  $H$  est un endomorphisme auto-adjoint.

Par hypothèse de récurrence,  $H$  admet une base orthonormée  $(e_2, \dots, e_n)$  qui consiste en des vecteurs propres de  $f$  restreint à  $H$  et donc de  $f$ .

$B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$  et chaque  $e_i$  est un vecteur propre de  $f$ .

Notons  $\delta_{ij}$  le coefficient  $ij$  de la matrice identité. Pour  $i, j \geq 2$ ,  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  par hypothèse de récurrence.

$\langle e_1, e_j \rangle = \langle e_j, e_1 \rangle = 0 = \delta_{1j}$  (pour  $j \neq 1$ ) car  $H \perp e_1$ .

Et finalement on a  $\langle e_1, e_1 \rangle = 1 = \delta_{11}$ .

Donc pour  $\forall i, j = 1, \dots, n$ ,  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  et donc  $B$  est orthonormée.  $\square$

**Théorème 3.1.10** Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace hermitien et  $f$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . Alors :

1. Toutes les valeurs propres de  $f$  sont réelles
2.  $f$  est diagonalisable dans une base orthonormée.

*Preuve*

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $f$  c'est-à-dire que  $f(x) = \lambda x$  et  $x \neq 0$ . Alors  $\langle x, x \rangle \neq 0$  et

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle x, \lambda x \rangle \tag{3.15}$$

$$= \langle x, f(x) \rangle \tag{3.16}$$

$$= \langle x, f^*(x) \rangle \tag{3.17}$$

$$= \langle f(x), x \rangle \tag{3.18}$$

$$= \langle \lambda x, x \rangle \tag{3.19}$$

$$= \bar{\lambda} \langle x, x \rangle \tag{3.20}$$

Donc  $\bar{\lambda} = \lambda$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Soit  $e_1$  un vecteur propre de  $f$ . On peut supposer que  $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ . Soit  $F = \text{Vect}(e_1)^\perp$ . Donc  $\text{Vect}(e_1) \oplus F = E$ . Si  $x \in F$  alors  $x \perp e_1$  d'où

$$\langle f(x), e_1 \rangle = \langle x, f(e_1) \rangle = \langle x, \lambda e_1 \rangle = \lambda \langle x, e_1 \rangle = 0$$

Donc  $f(x) \perp e_1$ . Donc  $f(x) \in F$  et  $f(F) \subseteq F$ .  $f$  restreint à  $F$  est donc un endomorphisme auto-adjoint de  $F$ . Par hypothèse de récurrence il existe une base  $B' = (e_2, \dots, e_n)$  de  $F$ , orthonormée, telle que la fonction  $f$  restreinte à  $B'$  soit diagonale.

Soit  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$  et la matrice de  $f$  dans cette base est diagonale.  $\square$

**Lemme 3.1.11 (Lemme de Borel-Cantelli)** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements. Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ . Alors

$$\{n \in \mathbb{N} : w \in A_n\} \text{ est fini } P \text{ p.s.}$$

*Preuve*

Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$  alors

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} \right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$$

et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} < \infty \text{ p.s.}$$

## 3.2 Code programme Maple

```
> matrice := proc (n)
  local i, j, A;
  A := array(1 .. n, 1 .. n);
for i to n do
for j to i
do A[i, j] := (stats[random, normald])(1);
A[j, i] := A[i, j]
end do
end do;
evalm(A)
end proc;

> with(LinearAlgebra):

> with(stats);

> with(Statistics);

> C := matrice(500);
> X := eigenvalues(C);
> S := [X];
>(statplots[histogram])(S)
```

# Bibliographie

- [1] GUIONNET Alice, *Lectures on random matrices : Macroscopic asymptotics*, 2008.
- [2] LOPEZ Pierre, *Cours de graphes*, 2005.
- [3] BAHLOUL Rouchdi, *Cours d'algèbre linéaire*, 2007
- [4] CAPINSKI Marek, KOOP EKKEHARD, *Measure, Integral and Probability*.
- [5] [en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org)