Autour de l'approximation diophantienne et de l'ensemble de Cantor

Antoine Pinochet Lobos

25 juin 2011

TIPE effectué sous la direction de M. Boris Adamczewski

Table des matières

Messieurs Adamczewski et Caldero, je tenais à vous présenter mes excuses. Je ne saurais même pas vraiment vous expliquer pourquoi je n'ai pas bien suivi les règles du jeu. Je me sens vraiment très bête de n'en avoir fait qu'à ma tête, et vous demande pardon. Je vous remercie de l'attention que vous m'avez accordée.

1 Introduction

L'approximation diophantienne est la branche de la théorie des nombres qui étudie des inégalités de la forme :

$\phi(q) < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \psi(q)$. Selon les fonctions ϕ et ψ, et le nombre de couples (p, q) vérifiant cette inégalité, on obtient des informations sur le nombre α. Celles-ci peuvent permettre de déterminer si α est rationnel, algébrique, transcendant... Nous parlerons de quelques résultats de cette théorie dans une première partie.

L'ensemble de Cantor est un célèbre ensemble, qui est un des premiers ensembles que l'on peut qualifier, rétrospectivement, de fractals. Il possède un certain nombre de propriétés étonnantes. Nous en détaillerons deux dans une seconde partie.

Le but du mémoire est de rendre compte de mon travail de compréhension d'un article [5] que M. Yann Bugeaud a récemment publié, qui résout un problème d'approximation diophantienne, dans l'ensemble de Cantor. Il a été posé par Kurt Mahler, de nombreuses années plus tôt. Les troisième et quatrième parties seront donc consacrées au problème, à sa difficulté, puis à sa résolution.

2 Quelques idées à propos de l'approximation diophantienne

2.1 Exposant d'irrationalité

Lorsque que Liouville montre l'existence d'un nombre transcendant en 1844, il s'appuie sur un de ses théorèmes, dont l'énoncé motive la définition suivante, qui raffine la notion d'irrationalité.

Définition 1. ***(Exposant d'irrationalité)***
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On appelle exposant d'irrationalité de α et on note :

$$\mu(\alpha) = \ sup \ \left\{ \mu \in \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe une infinité de couples } (p, q) \text{ avec } |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\mu} \right\}.$$

On dispose de plusieurs résultats concernant cette nouvelle notion. En voici deux :

Proposition 1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $\mu(\alpha) \geq 2$.*

Théorème 1. ***(Roth, 1955)***
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ algébrique. Alors $\mu(\alpha) = 2$.

Ce théorème valut à son auteur la médaille Fields.

Cependant, la définition assez complexe de l'exposant d'irrationalité rend le calcul de celui-ci, pour un nombre quelconque, assez ardu (on connaît par exemple celui de e mais pas celui de π).

Les mathématiciens se sont donc intéressés au problème d'un point de vue différent, en s'appuyant sur la théorie de la mesure. Un résultat important dans ce domaine est le

Théorème 2. ***(Khinchin)*** *L'ensemble des nombres d'exposant d'irrationalité strictement supérieure à 2 est de mesure nulle.*

Cela veut dire qu'en prenant "au hasard" un nombre, on devrait s'attendre à ce que son exposant d'irrationalité soit 2.

2.2 De la force des fractions continues

Je fournis, en annexe, un petit formulaire sur les fractions continues, dans lequel je puiserai tout au long du mémoire.

Pour attarder le regard du lecteur sur la puissance de cet outil, voici un exemple, qui permet de résoudre très facilement un petit problème d'approximation diophantienne.

Fixons-nous $\psi : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{>0}$. Existe-il un nombre α tel qu'il existe une infinité de rationnels vérifiant :
$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \psi(q)$?

Oui, il en existe, et nous allons en construire un, selon une méthode fournie par Khinchin dans [1], que nous appellerons affectueusement "méthode de Khinchin".

La théorie des fractions continues offre un résultat important en approximation diophantienne :

si $\frac{p_n}{q_n}$ est une réduite de α, alors on a :

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

On choisit un a_0 entier, sans restriction, et il suffit alors, une fois que l'on a construit $a_0, a_1 ... a_n$, de choisir a_{n+1} tel que :

$a_{n+1} > \dfrac{1}{q_n^2\psi(q_n)}$.

Ainsi, pour **toutes** les réduites $\frac{p_n}{q_n}$:
$\left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{a_{n+1}q_n^2} < \psi(q_n)$,
et le problème est déjà résolu.

Notons qu'il existe une autre inégalité, vraie pour toutes les réduites, qui permettrait d'obtenir une minoration :
$\left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| > \dfrac{1}{q_n^2(a_{n+1}+2)}$.
Cette méthode, fournit un résultat puissant, sans aucun calcul. Elle servira de référence pour mieux comprendre l'article.

3 L'ensemble de Cantor

3.1 Définitions

Définition 2. ***(Ensemble de Cantor)***
On définit la fonction :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{P}([0;1]) &\longrightarrow \mathcal{P}([0;1]) \\ K &\longmapsto (\frac{1}{3}K) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}K) \end{aligned}$$

puis la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{aligned} K_0 &= [0;1] \\ K_{n+1} &= \mathcal{T}(K_n) \end{aligned}$$

*Enfin, on appelle **ensemble de Cantor**, ou encore **poussière de Cantor**, et on note K l'intersection :*
$K = \bigcap\limits_{n\in N} K_n$

Proposition 2. *L'ensemble de Cantor est (aussi) l'ensemble des nombres entre 0 et 1 qui admettent un développement en base 3 dont les chiffres après la virgule sont des 0 ou des 2.*

3.2 Propriétés

Proposition 3. *L'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable.*

Démonstration. On va construire une bijection entre K et $[0;1]$.

On considère un nombre $x = 0{,}_3\, a_1a_2a_3...$ où tous les a_i sont 0 ou 2.

On va changer tous les 2 par des 1, et lire le nombre obtenu en base 2.

Comme tous les réels de $[0;1]$ admettent un développement en base 2 qui ne contient bien sûr que des 0 ou des 1, il suffit de constater que l'on peut renverser ce processus (remplacer les 1 par des 2 et lire en base 3) pour vérifier qu'il s'agit bien d'une bijection. □

Proposition 4. *L'ensemble de Cantor est de mesure nulle.*

Démonstration. Si $\mathfrak{M}$ désigne la mesure de Lebesgue, alors on a $\mathfrak{M}(K_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathfrak{M}(K_n)$.

Donc $\forall n\ \mathfrak{M}(K_n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Et enfin, $\mathfrak{M}(K) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$. □

4 Le problème de Mahler

Le théorème 2 et la proposition ci-dessus assurent que K et l'ensemble des nombres d'exposant d'irrationalité τ (si $\tau > 2$) sont tous deux de mesure nulle.

Mahler se demanda donc si l'intersection de ces deux ensembles pouvait être non-vide.

4.1 Une première approche

Liouville, dont j'ai évoqué le nom en introduction, s'intéressa tout particulièrement au nombre suivant :

$\xi := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$.

Pour en démontrer la transcendance, il procéda en tronquant la série, et majora $\left|\xi - \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{10^{n!}}\right| = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{10^{n!}}$ par une série géométrique, et put prouver que l'exposant d'irrationalité de ce nombre était $+\infty$, pour ensuite conclure avec un théorème plus faible mais ressemblant au théorème de Roth.

L'idée qu'il faut retenir de cette démonstration-ci est que pour une série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{u_n}}$, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît suffisamment vite, les séries tronquées fournissent de bonnes approximations, que l'on peut maîtriser sans trop de problèmes, avec le calcul.

Levesley et al. ont donc pu conclure, dans [4], à propos du nombre $\xi_\tau = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{[\tau^n]}}$, qu'il appartenait à l'ensemble de Cantor, et que son exposant d'irrationalité était τ, seulement si $\tau \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Malheureusement, cette limite les empêcha d'aller plus loin.

4.2 La réponse apportée par Bugeaud

Voici le théorème démontré par Bugeaud dans [5].

On note $\mathcal{K}(\psi) := \left\{ \xi \in \mathbb{R} : \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \psi(q) \text{ pour une infinité de rationnels } \frac{p}{q} \right\}$.

Théorème 3. *Soit* $\Psi : [1; +\infty[\to]0; +\infty[$*, telle que* $x \mapsto x^2\Psi(x)$ *soit décroissante tendant vers 0. Alors pour tout* $c > \frac{1}{3}$*,*

$(\mathcal{K}(\Psi) \setminus \mathcal{K}(c\Psi)) \cap K$

est non dénombrable.

Ce théorème est fort : le seul exposant d'irrationalité d'un nombre n'apporte pas autant d'informations. Si $\mu(\xi) = \tau$, alors pour tout ϵ, il n'existe qu'un nombre fini de solutions à $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\tau+\epsilon}}$, mais si l'on remplace $\frac{1}{q^{\tau+\epsilon}}$ par $\frac{1}{q^\tau ln(q)}$, on ne connaît pas le nombre de solutions. Le théorème affirme l'existence de nombres, dans l'ensemble de Cantor, dont le **meilleur** ordre d'approximation est Ψ.

On déduit donc de ce théorème le

Corollaire 1. *Pour tout* $\tau \geq 2$*,* $\exists \xi \in K$ *tel que* $\mu(\xi) = \tau$*.*

qui résout le problème de Mahler.

5 Etude de la démonstration

La démonstration s'articule autour de trois idées.

Dans un premier temps, on va s'atteler à un travail comparable à celui que fournissent Levesley et al. dans [4] : on va construire une série dont on tirera des inégalités.

Ensuite, on va se rapprocher un peu à la méthode de Khinchine, pour renforcer les inégalités que l'on vient d'obtenir.

Finalement, on va essayer de montrer que ces inégalités permettent bien à répondre au problème.

5.1 Le Folding Lemma...

Shallit s'intéressa, dans [3], au développement en fraction continue du nombre :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^n}}.$$

Il se rendit compte que le développement n'était pas chaotique, comme on pouvait s'y attendre ; il y trouva des motifs intéressants, et put finalement expliciter le développement en fraction continue d'autres nombres limites de séries similaires à celle-ci.

Voilà donc un lemme très utile, qui s'inspire des découvertes de Shallit.

Lemme 1. ***(Folding Lemma)***

Soit $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n]$, *alors*

si $t \geq 2$,

$$\frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{tq_n^2} = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n, t-1, 1, a_{n-1}, ..., a_2, a_1]$$

et si $t = 1$,

$$\frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{q_n^2} = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n + 1, a_n - 1, a_{n-1}, ..., a_2, a_1].$$

Démonstration. La démonstration du deuxième cas est très similaire à la première, c'est pourquoi nous ne montrerons que cette dernière.

Rappelons tout d'abord deux formules très générales :

$$\begin{aligned}
\frac{p_n}{q_n} &= [a_0; a_1, ..., a_n] \\
\frac{r_m}{s_m} &= [b_0; b_1, ..., b_m] \\
\frac{p_{n-1}s_m + p_n r_m}{q_{n-1}s_m + q_n r_m} &= [a_0; a_1, ..., a_n, b_0, ..., b_m]
\end{aligned}$$

et

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, ..., a_1]$$

Tout d'abord,

$$[a_0; a_1, ..., a_n, t-1] = \frac{(t-1)p_n + p_{n-1}}{(t-1)q_n + q_{n-1}},$$

$$[a_0; a_1, ..., a_n, t-1, 1] = \frac{tp_n + p_{n-1}}{tq_n + q_{n-1}}.$$

D'autre part, grâce à la deuxième formule,

$$[a_n - 1; a_{n-1}, ..., a_1] = \frac{q_n - q_{n-1}}{q_{n-1}}$$

Enfin, on concatène les deux développements grâce à la première formule :

$$[a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n, t-1, 1, a_n - 1, a_{n-1}, ..., a_2, a_1]$$

$$= \frac{((t-1)p_n + p_{n-1})\, q_{n-1} + (tp_n + p_{n-1})\,(q_n - q_{n-1})}{((t-1)q_n + q_{n-1})\, q_{n-1} + (tq_n + q_{n-1})\,(q_n - q_{n-1})}$$

$$= \frac{((t-1)p_n + p_{n-1})\, q_{n-1} - (tp_n + p_{n-1})q_{n-1} + q_n(tp_n + p_{n-1})}{((t-1)q_n + q_{n-1})\, q_{n-1} - (tq_n + q_{n-1})q_{n-1} + q_n(tq_n + q_{n-1})}$$

$$= \frac{q_n p_{n-1} - q_{n-1}p_n + tp_n q_n}{tq_n 2}$$

$$= \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{tq_n^2}$$

□

Remarques 1. *Si* $a_1 = a_2 = 1$*,*

$$\begin{aligned}&[a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n, t-1, 1, a_n - 1, a_{n-1}, ..., a_2, a_1]\\ =&[a_0; 1, 1, ..., a_{n-1}, a_n, t-1, 1, a_n - 1, a_{n-1}, ..., a_3, 2].\end{aligned}$$

1) $[a_0; \underbrace{1, 1, ..., a_{n-1}, a_n}_{n}, \underbrace{t-1, 1}_{2}, \underbrace{a_n - 1, a_{n-1}, ..., a_3, 2}_{n-1}]$.

Pour connaître la longueur - notons-la l_m *- de la fraction continue qui est le résultat de* m *applications successives du lemme à la fraction* $[a_0; 1, 1, ..., a_n]$*. On voit que* $l_{m+1} = 2l_m + 1$*, et bien sûr* $l_0 = n$*.*

On prouve très facilement par récurrence que $l_m = 2^m(n+1) - 1$*.*

2) On en déduit qu'après une application du Folding Lemma, la longueur de la fraction continue obtenue est impaire. Donc, si on lui applique encore le lemme, le "n" de la formule est impair, ce qui résout le problème de la manipulation du $(-1)^n$ *; cette propriété s'avérera cruciale dans la suite ; il n'est en effet pas aisé de trouver le développement en base 3 de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{a_n}}{3^{b^n}}$*.*

3) Remarquons que le seul terme "nouveau" du résultat est $t-1$*.*

De plus, si l'on a appliqué le lemme avec t *prenant les valeurs de la suite* $(u_i)_{i\geq 1}$*, on a :*

$u_{i+1} - 1 = a_{l_i+1} = a_{2^i(n+1)}$, ce qui nous permet de localiser les $u_i - 1$ dans la fraction continue.

En outre, si t est suffisament grand, $t - 1$ dépasse tous les a_i.

4) On passe d'une fraction dont le dénominateur est q, à une fraction dont le dénominateur est tq^2, et c'est un moyen de contrôler le développement en base 3 des nombres que nous allons manipuler.

5) Le nom anglais signifie "Lemme du Pliage". Il faut s'imaginer que ce n'est plus une tache d'encre comme en primaire, mais la fraction continue que nous avons posée sur le papier, et qui s'inscrit de l'autre côté de la feuille de manière symétrique, une fois celle-ci pliée.

5.2 ... et son usage

Tout d'abord, soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On définit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite qui simplifiera les notations par la suite : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = u_k + 2 * v_{k-1}$. $v_0 = v$ sera choisi plus tard, et si $\frac{r}{b^v} = [0; 1, 1, ...a_h]$:

$$\xi_u = \frac{r}{3^v} + \frac{(-1)^h}{3^{u1+2v}} - \sum_{n\geq 2} \frac{1}{3^{v_n}}.$$

Comme convenu, travaillons d'abord sur ξ_u sans se soucier de (u). Pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\left|\xi_u - \frac{d_k}{b^{v_k}}\right| &= \sum_{n\geq k+1} \frac{1}{3^{v_n}} \\ &> \frac{1}{b^{v_{k+1}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k+1} \frac{1}{3^{v_n}} &= \frac{1}{3^{v_{k+1}}}\left(\sum_{n\geq k+1} \frac{1}{3^{v_n - v_{k+1}}}\right) \\ &= \frac{1}{3^{v_{k+1}}}\left(1 + \sum_{n\geq k+2} \frac{1}{3^{v_n - v_{k+1}}}\right) \\ &= \frac{1}{3^{v_{k+1}}}\left(1 + 3^{-v_k} \sum_{n\geq k+2} \frac{1}{3^{v_n - v_{k+1} - v_k}}\right) \\ &< \frac{1}{3^{v_{k+1}}}\left(1 + 3^{-v_k} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{3^{v_{k+2} - v_{k+1} - v_k}}\right)\frac{1}{3^n}\right) \\ &< \frac{1 + 3^{-v_k}}{3^{v_{k+1}}}\end{aligned}$$

Ici, d_k est simplement le numérateur de la fraction obtenue quand on met tous les termes de la somme $\dfrac{r}{3^v} + \dfrac{(-1)^h}{3^{u1+2v}} - \displaystyle\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{3^{v_n}}$ au même dénominateur.

Le lecteur aura sûrement compris que ξ_u est le nombre $\dfrac{r}{b^v}$ auquel on a appliqué le Folding Lemma avec le paramètre t prenant les valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'ailleurs, qui est donc $\dfrac{r}{3^v}$? Le r et le v sont juste choisis de manière à ce que $\dfrac{r}{3^v} = [0; 1, 1, ...a_h]$. La présence de ce rationnel est uniquement technique, en effet, c'est la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{3^{v_n}}$ qui nous intéressera vraiment, à la fin.

On a construit un nombre ξ_u qui vérifie des inégalités qui dépendent de la suite (u). La première partie est donc finie.

On va maintenant choisir les termes de la suite (u) un peu comme dans la méthode de Khinchin.

Si $u_1, u_2, ..., u_n$ ont déjà été construits, alors u_{n+1} est l'unique entier qui vérifie :

$1 + 3^{-v_n} < 3^{u_{n+1}} 3^{2v_n} \Psi(3^{v_n}) \leq 3 + 3^{1-v_n}$.

(u) n'est pas bornée, puisque $x \mapsto x^2\Psi(x)$ tend vers 0.

Remarque 1. *Dans l'article, Bugeaud affirme que (u) est croissante. Après mûre réflexion, il me semble cependant qu'il pourrait arriver, avec une fonction Ψ bien particulière, que le suite (u) ne soit croissante que la plupart du temps, et que parfois, $u_{k+1} = u_k - 1$. Dans ce cas, on corrige ceci en posant $u_{k+1} := u_k$. Cela n'affecte pas trop le reste de la démonstration, et cela changerait, dans l'énoncé du théorème, $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{b^2}$, ce qui n'enlèverait toutefois rien à sa force. Comme le détail n'est pas significatif, on peut supposer que Ψ est telle que (u) est croissante.*

En combinant les inégalités de la première partie avec celles-ci, il vient que, pour tout $k \geq 1$:

$\dfrac{\Psi(b^{v_n})}{3 + 3^{1-v_n}} \leq \left|\xi_u - \dfrac{d_k}{3^{v_n}}\right| \leq \Psi(b^{v_n})$.

On touche au but : on a construit un nombre et une suite de rationnels qui approchent ce nombre selon les conditions que l'on s'est fixées dans l'énoncé du théorème (on a déjà que $\xi_u \in \mathcal{K}(\Psi)$). Et nous en avons ainsi fini pour cette partie.

Cependant, il faut s'assurer qu'il n'existe pas de rationnels vérifiant une minoration meilleure, c'est-à-dire qu'il nous reste à montrer que $\xi_u \notin \mathcal{K}(c\Psi)$.

Pour cela, on a un résultat fort à disposition : les meilleures approximations d'un nombre réel sont ses réduites, c'est-à-dire les nombres $\dfrac{p_n}{q_n}$ du développement en fraction continue.

Voilà la formule explicite, l'inégalité de Legendre :

S'il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $\left|\xi - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{2q^2}$, alors c'est une réduite de ξ.

Comme $x \mapsto x^2\Psi(x)$, pour un q assez grand, $\Psi(q) < \frac{1}{2q^2}$, on est donc certain que les rationnels dont on redoute l'apparition, s'ils existent, sont des réduites de ξ_u.

Nous allons nous servir d'une inégalité bien utile :

$\dfrac{1}{q_n^2(a_{n+1}+2)} < \left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right|$.

Prenons une réduite $\frac{p_j}{q_j}$, et soit m tel que $2^{m-1}(n+1) < j < 2^m(n+1)$.

Que le lecteur se souvienne du Folding Lemma : parmi les dénominateurs partiels (c'est le nom des a_i), il y a ceux qui proviennent de la fraction continue initiale, et ceux que l'on a ajouté sous la forme de $t-1$. Comme (u) est - presque - croissante, il existe un moment à partir duquel $3^{u_{m-1}}$ aura dépassé tous les dénominateurs partiels de la fraction continue initiale. On a donc, si m est assez grand :

$\left|\xi_u - \dfrac{p_{j-1}}{q_{j-1}}\right| \leq \dfrac{1}{q_{j-1}^2(a_j+2)} \geq \dfrac{1}{(3^{u_{m-1}}+1)q_{j-1}^2}$.

De plus, on a que :

$$\begin{aligned}(3^{u_{m-1}}+1)q_{j-1}^2\Psi(q_{j-1}) &\leq (3^{u_{m-1}}+1)3^{2vm-1}\Psi(3^v m-1)\\ &\leq (3^{u_{m-1}}+1)\frac{b+\epsilon}{b^{u_m}}\\ &\leq 3+2\epsilon\end{aligned}$$

Donc, avec les inégalités précédentes, on a bien, pour tout j suffisamment grand, et $c < \frac{1}{b}$:

$\left|\xi_u - \frac{p_j}{q_j}\right| \leq \dfrac{\Psi(q_j)}{b+2\epsilon} \leq c\Psi(q_j)$.

On a donc montré que $\xi_u \in \mathcal{K}(\Psi) \setminus \mathcal{K}(c\Psi)$.

Notons maintenant $\xi = \dfrac{r}{3^v} + \dfrac{(-1)^h}{b^{v_1}} - \xi_u = \displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{3^{v_n}}$.

$\left|\xi_u - \dfrac{d_k}{b^{v_k}}\right| = \left|\xi - \dfrac{rb^{v_k-v}+(-1)^h b^{v_k-v_1}+dk}{b^{v_k}}\right|$ donc ξ va vérifier les mêmes inégalités que ξ_u. Il en est aussi de même pour $2\xi = 2\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{3^{v_n}}$ qui appartient à l'ensemble de Cantor car $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

En ce qui concerne la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres qui vérifient la même propriété, il s'agit de reprendre le même procédé pour u' définie par $u'_{2k+1} = u_k$, et $u_{2k} = 1$ ou 2.

A Petit formulaire sur les fractions continues

On ne donne pas de démonstrations pour ces propositions, car elles figurent toutes dans [1].

Définitions 1. *Une fraction continue est une fraction, seulement formelle, a priori, de la forme :*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

On la note, par commodité, $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$.

On définit deux suites (p_n) *et* (q_n) *par :*

$$\begin{cases} p_0 & = a_0 \\ q_0 & = 1 \\ p_{n+1} & = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} & = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \end{cases}$$

On a, pour tout k *:*

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k}.$$

D'autre part, si l'on a une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, telle que* $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un réel* α*, alors on écrit et l'on note :*

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{...}}} =: [a_0; a_1, a_2, ...].$$

La proposition suivante règle la question de cette convergence, dans les cas habituels, où les a_i *sont entiers, positifs non nuls.*

Proposition 5. *Si,* $\forall n \geq 1$*,* $a_n \in \mathbb{N}^*$*, alors* $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Cette propriété est utilisée lors de la création de nombres au moyen des fractions continues, comme par exemple dans la méthode de Khinchin.

Proposition 6. *Pour tout* α *réel, il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'entiers positifs ou nuls (sauf éventuellement* a_0*) telle que* $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$.

De plus, cette suite est unique, et on l'appelle développement en fraction continue de α.

Les rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ *sont appelés réduites de* α.

Propriétés 1. *S'il existe un rationnel* $\frac{p}{q}$ *tel que* $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q^2}$*, alors c'est une réduite de* ξ *(Inégalité de Legendre).*

$\forall n \in \mathbb{N}$,
$q_n p_{n-1} - q_{n-1} p_n = (-1)^n$.

$$\frac{1}{q_n^2(a_{n+1}+2)} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}}.$$

Références

[1] Khinchin, A. Y., *Continued Fractions*. University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 3rd Edition, 1962.

[2] Mahler, K., *Some suggestions for further research*. Bull. Austral. Math. Soc. 29, 101-108 1984.

[3] Shallit, J., *Simple continued fractions for some irrational numbers*. J. Number Theory 11, 209-217, 1979.

[4] Levesley, J., Salp, C., Velani, S.L., *On a problem of K Mahler : diophantine approximation and Cantor sets*. Math. Ann. 338, 97-118 2007.

[5] Bugeaud, Y., *Diophantine approximation and cantor sets*. Math. Ann. 341, 677-684 2008.

[6] Descombes, R., *Eléments de Théorie des Nombres*. PUF, 1986.

[7] Duverney, D., *Théorie des Nombres*. Dunod, 2007.

[8] Hardy, G.A., Wright, E.M., *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 6th Edition 2008.