T.I.$\mathbb{P}$.E

La répartition des nombres Premiers

Gaël ALBORGHETTI

Printemps 2011

Sommaire

I La fonction π **4**

1 L'infinité des nombres premiers **4**

2 Une minoration de la fonction π **5**

2.1 Quelques formules utiles 5

2.2 Minoration de Δ_n 8

2.3 Minoration de $\pi(n)$ 12

3 Une majoration de la fonction π **15**

3.1 Majoration de $\prod_{p \leqslant n} p$ 15

3.2 Majoration de $\pi(n)!$ 18

3.3 Majoration de $\pi(n)$ 19

4 Le Postulat de Bertrand **23**

5 Théorèmes sur les nombres premiers **25**

Introduction

L'arithmétique étant un des domaines les plus anciens des mathématiques, la théorie des nombres fit très vite son apparition dans le monde mathématiques. En particulier, les mathématiciens ce sont très vite intéressés aux nombres premiers, dont leur répartition parmi les entiers naturels garde encore aujourd'hui une certaine part de mystère. C'est depuis que *Adrien-Marie Legendre* et *Johann Carl Friedrich Gauss* ont conjecturé une répartition harmonieuse des nombres premiers (à savoir que le n-ième nombre premier est approximativement égal à $n \log n$), alors que leur apparition semblait aléatoire, que les théoriciens des nombres s'intéressèrent de plus prêt à l'étude de ces nombres.

Ainsi, quelques dizaines d'années plus tard, *Pafnouti Lvovitch Tchebychev* amène quelques idées sur l'étude de la répartition des nombres premiers en s'intéressant à la fonction π, qui donne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Il essaya d'en trouver des encadrements en cherchant deux nombres A et B, les plus proches de 1, tels que

$$A\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n) \leqslant B\frac{n}{\ln n} \ ,$$

pour $n \geqslant n_0$, n_0 fixé. Cette recherche montra ainsi l'existence d'un lien fort entre le comportement de la suite $(\pi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{n}{\ln n})_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui constitua un argument de plus en faveur de la conjecture de Gauss et Legendre.

Le premier objectif de ce TIPE [1] est de donner un encadrement « à la Tchebychev » de la fonction $\pi(n)$, avec, pour valeurs de A et B, $\ln 2$ et e. Les méthodes utilisées pour arriver à ce résultat s'inspire du problème de CAPES [2] de l'année 2008. Ensuite, nous nous intéresserons au lien entre le *postulat de Bertrand* et les inégalités de Tchebychev. Et enfin, nous terminerons par quelques résultats importants sur les nombres premiers.

Nous noterons $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Travail d'Initiative Personnelle Encadré
2. Certificat d'Aptitude Professionnelle à l'Enseignement Secondaire

Première partie

La fonction π

1 L'infinité des nombres premiers

Pour tout entier naturel n on définit le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n par la fonction π de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\pi(n) &= \mathrm{Card}\,\{p \in \mathbb{N} \mid p \leqslant n \text{ et } p \text{ est premier}\}\\ &= \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathbb{P}}} 1.\end{aligned}$$

Nous avons donc naturellement $\pi(0) = \pi(1) = 0$; $\pi(2) = 1$; $\pi(3) = \pi(4) = 2$; etc. Une des premières questions que l'on peut se poser sur cette fonction, dont la réponse nous semble assez naturelle aujourd'hui, est son comportement lorsque n tend vers l'infini.

Théorème 1.
Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration.
Supposons qu'il existe une quantité n finie de nombres premiers.
Notons $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ l'ensemble de ces nombres, avec $p_i < p_{i+1}$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$.
Posons maintenant $N = p_1.p_2...p_n + 1$. On a naturellement que $N > p_n > 1$, donc N n'est pas premier, et il est divisible par au moins un nombre premier $p_k \in \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Mais p_k divise également $p_1.p_2...p_n$, donc p_k divise 1, et donc $p_k = 1$, ce qui est absurde puisque 1 n'est pas premier. Donc l'hypothèse de départ est fausse, et il existe une infinité de nombres premiers.

□

Nous devons cette démonstration à Euclide, il y a plus de 2000 ans maintenant. Depuis beaucoup de mathématiciens se sont amusés à trouver d'autres démonstrations, par diverses méthodes.
Nous pouvons immédiatement déduire le corollaire suivant :

Corollaire 1.
Le suite $(\pi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

---

2 Une minoration de la fonction π

Dans cette partie, p désignera un nombre premier.
Nous commencerons l'étude de l'encadrement de la fonction π par une minoration.
Pour cela nous allons nous intéresser au nombre $\Delta_n = \text{PPCM}(1, 2, ..., n)$, définit pour tout entier $n \geqslant 1$. En effet, ce nombre est par définition le plus petit entier naturel qui soit un multiple de tous les entiers compris entre 1 et n, c'est-à-dire qu'il est divisible par chacun d'entre eux. Il contient donc dans sa décomposition en produit de facteurs premiers, tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

2.1 Quelques formules utiles

Le but de ce premier paragraphe et de trouver une minoration de Δ_n, pour en déduire un peu plus tard une minoration de $\pi(n)$.
Pour cela intéressons nous à l'intégrale [3]

$$I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}dx,$$

définie pour tout $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant b \leqslant a$.
Commençons par établir quelques formules qui nous seront utiles par la suite. Nous avons d'une part le résultat suivant :

Proposition 1.
Pour tout $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant b \leqslant a$,

$$I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}dx = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}.$$

Démonstration. Calculons simplement l'intégrale :

$$\begin{aligned} I(b, a) &= \int_0^1 x^{b-1} \sum_{k=0}^{a-b} \binom{a-b}{k} (-x)^k dx \quad \text{(Formule du Binôme de Newton)} \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{a-b} \binom{a-b}{k} (-1)^k x^{b+k-1} dx = \sum_{k=0}^{a-b} \binom{a-b}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{b+k-1} dx \\ &= \sum_{k=0}^{a-b} \binom{a-b}{k} (-1)^k \left[\frac{x^{b+k}}{b+k}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{b+k}. \end{aligned}$$

3. Cette approche de la fonction π à été élaborée par Mohan Nair en 1982.

$\square$

D'autre part, nous pouvons expliciter le résultat de $I(b,a)$ par quelques calculs :

Proposition 2.
Pour tout $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant b \leqslant a$,

$$I(b,a) = \frac{1}{b\binom{a}{b}} = \frac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}.$$

Démonstration. Premièrement, supposons $1 \leqslant b < a$ c'est-à-dire $2 < b+1 \leqslant a$, nous avons :

$$\begin{aligned} I(b+1,a) &= \int_0^1 x^b(1-x)^{a-b-1}dx = \left[\frac{-x^b(1-x)^{a-b}}{a-b}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{bx^{b-1}(1-x)^{a-b}}{a-b}dx \\ &= \frac{b}{a-b}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}dx \\ &= \frac{b}{a-b}I(b,a). \end{aligned}$$

Par une simple récurrence sur l'entier b nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} I(b,a) &= \frac{b-1}{a-(b-1)}I(b-1,a) = \frac{(b-1)(b-2)}{(a-(b-1))(a-(b-2))}I(b-2,a) \\ &= \ldots = \frac{(b-1)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{(a-(b-1))\ldots(a-2)(a-1)}I(1,a). \end{aligned}$$

Or,

$$I(1,a) = \int_0^1 (1-x)^{a-1}dx = \left[\frac{-(1-x)^a}{a}\right]_0^1 = \frac{1}{a}.$$

Nous avons donc finalement :

$$I(b,a) = \frac{(b-1)!}{\frac{(a-1)!}{(a-b)!}} \times \frac{1}{a} = \frac{b}{b} \times \frac{(b-1)!(a-b)!}{a!} = \frac{1}{b\frac{a!}{(a-b)!b!}} = \frac{1}{b\binom{a}{b}}.$$

Ensuite, considérons pour un réel $y \in [0,1[$ l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}dx.$$

D'une part, nous avons le résultat suivant (en utilisant la formule du binôme de Newton) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}dx &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1}(1-x)^{a-k}(xy)^{k-1}dx \\ &= \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{a-k}dx \\ &= \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k,a).\end{aligned}$$

D'autre part, en calculant directement une primitive, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}dx &= \left[\frac{(1-x+xy)^a}{a(y-1)}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{a} \times \frac{1}{y-1}(y^a-1) \\ &= \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}.\end{aligned}$$

Par double égalité, nous avons donc que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k,a) &= \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}, \\ \text{donc } \sum_{k=1}^{a} \frac{y^{k-1}}{a} - \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k,a) &= 0 \\ \text{et ainsi } \sum_{k=1}^{a} y^{k-1}\left(\frac{1}{a} - \binom{a-1}{k-1} I(k,a)\right) &= 0.\end{aligned}$$

Soit $P(X) = \sum_{k=1}^{a} X^{k-1}\left(\frac{1}{a} - \binom{a-1}{k-1} I(k,a)\right)$ un polynôme à coefficients réels de degré $a-1$. On sait que $y \in [0,1[\subset \mathbb{R}$ est racine de P d'après le résultat précédent. Par conséquent, si l'on fixe $a \geqslant 1$, P a une infinité de racine dans $[0,1[$. Par conséquent, P est forcément le polynôme nul. Donc tous les coefficients de P sont nuls. On a donc :

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } k \in [\![1,a]\!], \quad \frac{1}{a} - \binom{a-1}{k-1} I(k,a) &= 0 \\ \text{donc } \quad I(k,a) &= \frac{1}{\frac{a(a-1)!}{(k-1)!(a-k)!}} \\ \text{et } \quad I(k,a) &= \frac{1}{a\binom{a-1}{k-1}}.\end{aligned}$$

Ce résultat est valable pour tout $k \in [\![1, a]\!]$, et l'on a supposé que $b \in [\![1, a]\!]$, on peut donc choisir $k = b$ et nous obtenons le résultat.

$\square$

Maintenant nous pouvons donner un premier résultat sur Δ_a. Dans l'égalité $I(b,a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$, on a $k \in [\![0,\ a-b]\!]$, c'est-à-dire que $k+b \in [\![b, a]\!]$. Or, Δ_a est un multiple de tout entier $l \in [\![1, a]\!]$, en particulier de tout entier $l \in [\![b, a]\!]$, et donc de $l = k+b$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Delta_a = (k+b)m$ et ainsi nous avons :

$$I(b,a)\Delta_a = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{(k+b)m}{k+b} \quad = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} m.$$

Nous savons que pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, $\binom{a}{b} \in \mathbb{N}$, et que $\Delta_a \in \mathbb{N}$. Nous avons donc que $I(b,a)\Delta_a$ est un entier relatif, en tant que somme d'entiers relatifs. Mais d'après la proposition 2, $I(b,a) = \frac{1}{b\binom{a}{b}} > 0$ car $b > 0$.
Donc $I(b,a)\Delta_a$ est un entier naturel.

Lemme 1.
Pour tout $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant b \leqslant a$,

$$b\binom{a}{b} \quad \textit{divise} \quad \Delta_a.$$

Démonstration.
Par calculs : $I(b,a)\Delta_a = \frac{\Delta_a}{b\binom{a}{b}} \in \mathbb{N}$ et donc $b\binom{a}{b} \mid \Delta_a$. $\square$

2.2 Minoration de Δ_n

Le but de cette partie est de montrer que $\Delta_n \geqslant 2^n$ pour tout $n \geqslant 7$. Pour cela nous allons distinguer les cas selon la parité de n.

Si n est impair :

Si n est supposé impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. On veut donc montrer que $\Delta_{2k+1} \geqslant 2^{2k+1} = 2^{2k} \times 2 = 2 \times 4^k$. Nous allons montrer plus généralement le lemme suivant :

Lemme 2.

Pour tout $n \geqslant 2, \quad \Delta_{2n+1} \geqslant n4^n$.

Pour démontrer ce Lemme nous aurons besoin du résultat de la proposition suivante :

Proposition 3.

Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$ *on a*

$$\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

Démonstration. *(Proposition 3)*

– Pour $k \leqslant n$, on veut montrer

$$\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{k!(2n-k)!} \leqslant \frac{1}{(n!)^2} \Leftrightarrow \frac{(2n-k)!}{n!} \geqslant \frac{n!}{k!}.$$

On a d'une part : $\dfrac{(2n-k)!}{n!} = (n+1) \times ... \times (2n-k)$ (Produit de $(n-k)$ termes).
Et d'autre part : $\dfrac{n!}{k!} = (k+1) \times ... \times n$ (Produit de $(n-k)$ termes également).
De plus nous avons $(k \leqslant n) \Rightarrow (k+1 \leqslant n+1) \Rightarrow ... \Rightarrow (n \leqslant 2n-k)$. En prenant le produit de ces $(n-k)$ inégalités, on obtient :

$$\begin{array}{lrcl} & (k+1) \times ... \times n & \leqslant & (n+1) \times ... \times (2n-k) \\ \text{donc} & \dfrac{n!}{k!} & \leqslant & \dfrac{(2n-k)!}{n!} \\ \text{et ainsi} & \dbinom{2n}{k} & \leqslant & \dbinom{2n}{n}. \end{array}$$

– Pour $2n \geqslant k > n$, on sait que pour tout $0 \leqslant j \leqslant 2n$, $\dbinom{2n}{j} = \dbinom{2n}{2n-j}$. Donc :

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} \leqslant \binom{2n}{n},$$

car $(2n-k) < n$.

□

Démonstration. *(Lemme 2)*

D'après le lemme 1, en prenant $b = n$ et $a = 2n$, on a bien $1 \leqslant b \leqslant a$ et donc $n\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n}. Or Δ_{2n+1} est le plus petit multiple de tous les entiers compris entre 1 et $2n+1$, il est donc divisible par chaqu'un d'entre eux, en particulier par les entiers

compris entre 1 et $2n$. Δ_{2n} étant le plus petit multiple commun de ces $2n$ entiers, il est donc un diviseur de Δ_{2n+1}. Donc $n\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n} qui divise Δ_{2n+1}, donc $n\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.
D'autre part, on sait que $I(b,a)\Delta_a \in \mathbb{N}$. En utilisant l'égalité $I(b,a) = \dfrac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}$ avec $a = 2n+1$ et $b = n+1$, ($1 \leqslant b \leqslant a$ étant bien vérifiée) on a que $\dfrac{\Delta_{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \in \mathbb{N}$ et donc $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.
Donc nous avons l'existence d'un entier x tel que $\Delta_{2n+1} = xn\binom{2n}{n}$.
$(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}, donc $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise $xn\binom{2n}{n}$, c'est-à-dire $(2n+1)$ divise xn. Or $2n+1$ et n sont premiers entre eux (en effet il est facile de montrer que leur $PGCD$ est 1), donc d'après le Lemme de Gauss, $(2n+1)$ divise x. Il existe un entier x' tel que $x = (2n+1)x'$. Finalement on a donc

$$\Delta_{2n+1} = xn\binom{2n}{n} = x'n(2n+1)\binom{2n}{n}, \text{ donc } n(2n+1)\binom{2n}{n} \text{ divise } \Delta_{2n+1}.$$

Montrons à présent que $(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 4^n$.
Nous avons

$$\begin{aligned} 4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} &\leqslant \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{n} \text{ (d'après la proposition 3)} \\ &= \binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{2n} 1 \\ &= (2n+1)\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant conclure :

$$\begin{aligned} &\text{Puisque } (2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 4^n, \text{ alors } n(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant n4^n, \\ &\qquad \text{et } \Delta_{2n+1} \geqslant n4^n \qquad \left(\text{car } \Delta_{2n+1} \geqslant n(2n+1)\tbinom{2n}{n}\right). \end{aligned}$$

□

Grâce à ce résultat, nous savons donc que pour tout $k \geqslant 2$, c'est-à-dire pour tout $n \geqslant 5$ impair,

$$\Delta_n = \Delta_{2k+1} \geqslant k4^k \geqslant 2 \times 4^k = 2^{2k+1} = 2^n.$$

Si n est pair :

De la même manière que précédemment, si n est supposé pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 2$. On veut donc montrer que $\Delta_{2k+2} \geqslant 2^{2k+2} = 4^k \times 2^2 = 4 \times 4^k$.
Dans la démonstration du Lemme 2 nous avons vu que pour tout $l \geqslant 1$, Δ_l divise Δ_{l+1}. En prenant $l = 2k + 1$ on a donc Δ_{2k+1} divise Δ_{2k+2}, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $\Delta_{2k+1} \leqslant \Delta_{2k+2}$.
Mais $2k + 1$ est impair, donc d'après le Lemme 2 nous avons pour $k \geqslant 2$,
$k4^k \leqslant \Delta_{2k+1}$, et donc $\Delta_{2k+2} \geqslant k4^k$.
Nous avons enfin $k4^k \geqslant 4 \times 4^k$ si et seulement si $k \geqslant 4$.
On en conclut directement que pour tout $k \geqslant 4$, c'est-à-dire pour $n \geqslant 10$:

$$\Delta_n = \Delta_{2k+2} \geqslant 4 \times 4^k = 2^{2k+2} = 2^n.$$

Nous avons donc montré que $\Delta_n \geqslant 2^n$, pour tout $n \geqslant 9$, et pour $n = 7$. Montrons que cette inégalité reste vraie pour $n = 8$ et nous aurons la minoration recherchée. Par définition, Δ_n est le plus petit multiple commun à tous les entiers de 1 à n. Il est donc divisible par chaqu'un d'entre eux. Plus précisemment, il est divisible par leur décomposition en facteurs premiers. Donc pour calculer Δ_n, il suffit de prendre le produit de tous les nombres premiers distincts trouvés dans ces décompositions, tous élevés à l'exposant maximum trouvé parmi la décomposition de chaque nombre. Ainsi, pour calculer $\Delta_8 = \text{PPCM}(1, ..., 8)$ commençons par trouver la décomposition en facteurs premiers de ces 8 premiers entiers. Nous savons déjà que 2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers. Et l'on a $4 = 2^2$, $6 = 2^1 \times 3^1$ et $8 = 2^3$. L'exposant maximum trouvé pour 2 est 3, et celui de 3, 5 et 7 est 1. Nous avons donc $\Delta_8 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$. Or $2^8 = 256$, on a donc bien $\Delta_8 \geqslant 2^8$.

Ceci démontre donc le résultat suivant :

Proposition 4.
Pour tout $n \geqslant 7$,

$$\Delta_n \geqslant 2^n.$$

2.3 Minoration de $\pi(n)$

Pour commencer la minoration voulue, nous allons devoir manipuler les exposants des nombres premiers dans la décomposition en facteurs premiers d'un nombre. Pour cela nous utiliserons la notion de « *Valuation p-adique* », définie comme suit :

Définition 1.
*Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit pour un nombre premier $p \in \mathbb{P}$ la **valuation p-adique** de n comme le nombre entier $v_p(n)$, désignant l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n.*

Le but de cette partie est de montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\pi(n) \geqslant (\ln 2)\frac{n}{\ln n}$. Pour $n \geqslant 7$ cela revient à montrer :

$$\pi(n) \geqslant (\ln 2)\frac{n}{\ln n} \quad \Leftrightarrow \quad \pi(n)\ln n \geqslant n\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln n^{\pi(n)} \geqslant \ln 2^n$$
$$\Leftrightarrow \quad \underline{n^{\pi(n)} \geqslant 2^n}$$

Or la proposition 4 que nous avons démontré précédemment nous dit que pour $n \geqslant 7$, $\Delta_n \geqslant 2^n$. Nous allons donc montrer que $n^{\pi(n)} \geqslant \Delta_n$.

Lemme 3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $$\Delta_n = \prod_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathbb{P}}} p^{v_p(\Delta_n)}.$$

Démonstration. On peut restreindre l'ensemble des nombres premiers nécessaires à la décomposition en facteurs premiers d'un entier k, à l'ensemble des nombres premiers p dont la valuation p-adique de k est strictement positive.
En effet si $v_p(k) = 0$ alors $p^{v_p(k)} = 1$, et p n'intervient donc pas dans la décomposition.

Nous avons déjà la décomposition en facteurs premiers de Δ_n qui nous donne :

$$\Delta_n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(\Delta_n)}.$$

Or Δ_n est le plus petit multiple commun au n premiers entiers non nuls, il n'admet donc aucun diviseur supérieur à n. Donc, sa décomposition en facteurs premiers ne contient que les nombres premiers nécessaires à la décomposition des n premiers entiers. Or pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, tous les nombres premiers nécessaires à la décomposition de k en facteurs premiers sont inférieurs à k. Donc l'ensemble des nombres premiers nécessaire à toutes les décompositions en facteurs premiers des entiers $k \in [\![1, n]\!]$ ne contient pas de nombres premiers supérieurs à n. Donc la décomposition de Δ_n ne contient pas non plus de nombre premiers supérieurs à n.

On peut donc écrire : $$\Delta_n = \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathbb{P}}} p^{v_p(\Delta_n)} \ .$$

□

Le nombre $\pi(n)$ nous donne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Nous avons donc $n^{\pi(n)} = \underbrace{n \times n \times ... \times n}_{\pi(n)} = \prod_{p \leqslant n} n$.
Maintenant, l'inégalité que nous voulons montrer devient donc :

$$\prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant \prod_{p \leqslant n} n.$$

Lemme 4.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $p \in \mathbb{P}$, $\quad p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n.$

Démonstration. Tout d'abord, $v_p(\Delta_n)$ est l'exposant du nombre premier p dans la décomposition en facteurs premiers de Δ_n. Ce nombre p peut apparaitre dans la décomposition de plusieurs entiers parmi $[\![1, n]\!]$, avec divers exposant. Mais Δ_n devant être divisible par tous les entiers de $[\![1, n]\!]$, il doit nécessairement être divisible par p à l'exposant maximum trouvé.
C'est-à-dire que $p^{\max\{v_p(1),\ldots,v_p(n)\}}$ doit diviser Δ_n.
De plus, $p^{\max\{v_p(1),\ldots,v_p(n)\}+1}$ ne doit pas diviser Δ_n, puisqu'il est le plus petit multiple commun.
On a donc $p^{v_p(\Delta_n)} = p^{\max\{v_p(1),\ldots,v_p(n)\}}$ et ainsi :

$$v_p(\Delta_n) = \max\left\{v_p(i) \ \mid \ i \in [\![1, n]\!]\right\}.$$

Donc il existe un entier $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que $v_p(\Delta_n) = v_p(k)$, et ainsi nous avons directement :

$$p^{v_p(\Delta_n)} = p^{v_p(k)} \leqslant k \leqslant n.$$

□

Grâce à ce Lemme, nous avons le résultat suivant :

$$p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n \ \text{ donc } \ \prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant \prod_{p \leqslant n} n$$
$$\text{et } \ \Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}.$$

Avec la Proposition 4 cela démontre de théorème suivant :

Théorème 2 [1].
Pour tout $n \geqslant 3$,

$$(\ln 2)\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n).$$

Démonstration.
Pour $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ **:**
Il suffit de vérifier par calculs :

- $n = 3$: $\ln 2\frac{3}{\ln 3} \approx 1.89 < 2 = \pi(3)$
- $n = 4$: $\ln 2\frac{4}{\ln 4} = 2 = \pi(4)$
- $n = 5$: $\ln 2\frac{5}{\ln 5} \approx 2.15 < 3 = \pi(5)$
- $n = 6$: $\ln 2\frac{6}{\ln 6} \approx 2.32 < 3 = \pi(6)$

De plus pour $n = 2$ l'inégalité n'est plus vraie : $\ln 2\frac{2}{\ln 2} = 2 \neq 1 = \pi(2)$, et pour $n = 1$ elle n'a pas de sens à cause de la division par 0.

$\square$

3 Une majoration de la fonction π

Dans cette partie, p désignera un nombre premier.
Le but de ce paragraphe est de majorer $\pi(n)$ par e. Nous allons procéder en deux parties : premièrement nous allons majorer le produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à n, puis nous majorerons $\pi(n)!$. Enfin nous déduirons de ces résulats la majoration voulue.

3.1 Majoration de $\prod_{p\leqslant n} p$

Nous allons montrer ici que $\prod\limits_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n$. Cette majoration se fera également en deux parties : nous allons montrer dans un premier temps que le produit des nombres premiers p compris entre $m+1$ et $2m+1$, pour $m \geqslant 1$, est majoré par 4^m, puis nous généraliserons pour tout $p \leqslant n$ (avec $n \geqslant 1$).

Lemme 5.
Pour tout entier $m \geqslant 1$, on a

$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant \binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m.$$

Démonstration.

- **Inégalité de gauche** :
  Montrons que pour tout entier a et b tels que $0 < \frac{b}{2} \leqslant a < b$, $\prod\limits_{a<p\leqslant b} p$ divise $\binom{b}{a}$.
  Soit a et b deux nombres entiers respectant les conditions précédentes. Nous avons déjà :

$$\binom{b}{a} = \frac{b!}{a!(b-a)!} = \frac{(1\times 2\times ...\times a)\times(a+1)\times(a+2)\times ...\times b}{(1\times 2\times ...\times a)\times(1\times 2\times ...\times(b-a))}$$
$$= \frac{(a+1)\times(a+2)\times ...\times b}{(b-a)!}.$$

  C'est-à-dire $(b-a)!\binom{b}{a} = (a+1)\times(a+2)\times ...\times b$.
  Parmi $\{(a+1), ..., b\}$ se trouve tous les nombres premiers p tels que
  $a < p \leqslant b$.

Par conséquent il existe un nombre entier N tel que

$$(b-a)!\binom{b}{a} = (a+1)\times(a+2)\times ... \times b = N \times \prod_{a<p\leqslant b} p.$$

Donc $\prod_{a<p\leqslant b} p$ divise $(b-a)!\binom{b}{a}$.

Ainsi tous les entiers p de ce produit divise $(b-a)!\binom{b}{a}$. Par ailleurs on a supposé que $\frac{b}{2} \leqslant a$ c'est à dire $b \leqslant 2a \;\Leftrightarrow\; b-a \leqslant a$. Donc $(b-a)!$ ne contient dans sa décomposition en facteurs premiers, que des nombres premiers inférieurs ou égaux à a.

Or, $\prod_{a<p\leqslant b} p$ ne contient que des nombres premiers strictement supérieurs à a, donc chaqu'un de ces nombres ne peut pas diviser $(b-a)!$ (C'est-à-dire que tous ces nombres sont premiers avec $(b-a)!$).

Dès lors, $\prod_{a<p\leqslant b} p$ divise $\binom{b}{a}$ (d'après le Lemme de Gauss).

Maintenant posons simplement pour un entier $m \geqslant 1$: $b = 2m+1$ et $a = m+1$.

Les entiers a et b vérifient bien les conditions requises pour dire que $\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$ divise $\binom{2m+1}{m+1}$.

Enfin, nous avons le résultat suivant :

$$\binom{2m+1}{m+1} = \frac{(2m+1)!}{(m+1)!m!} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} = \binom{2m+1}{m}.$$

On en déduit que $\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$, et nous avons donc finalement :

$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant \binom{2m+1}{m}.$$

– **Inégalité de droite** :

Nous avons par calcul direct le résultat suivant :

$$
\begin{aligned}
(1+1)^{2m+1} = 2 \times 4^m = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \\
&= \binom{2m+1}{0} + ... + \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} + ... + \binom{2m+1}{2m+1} \\
&= 2 \times \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k},
\end{aligned}
$$

car $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.

Ainsi nous avons bien :

$$
\begin{aligned}
4^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m+1}{k} + \binom{2m+1}{m} \\
&\geqslant \binom{2m+1}{m}.
\end{aligned}
$$

□

Nous pouvons maintenant enchaîner sur le résultat suivant, un peu plus général :

Proposition 5.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, on a

$$\prod_{p \leqslant k} p \leqslant 4^k.$$

Démonstration.

Procédons par récurrence sur l'entier n.

Initialisation : $n = 1$

– $k = 1$: $\prod_{p \leqslant 1} p = 1 \leqslant 4^1 = 4 \quad \checkmark$

– $k = 2$: $\prod_{p \leqslant 2} p = 2 \leqslant 4^2 = 16 \quad \checkmark$

La proposition est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un rang $n \geqslant 1$ fixé. Montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$ suivant, c'est-à-dire que pour tout $k \in [\![1, 2n+2]\!]$, $\prod_{p \leqslant k} p \leqslant 4^k$.

Par hypothèse de récurrence on sait que la propriété est valable pour tout $1 \leqslant k \leqslant 2n$, il nous suffit donc de vérifier qu'elle reste vraie pour $k \in \{2n+1, 2n+2\}$. De plus $2n+2$ est pair, donc n'est pas premier, donc $\prod_{p \leqslant 2n+2} p = \prod_{p \leqslant 2n+1} p$. Il nous suffit donc d'étudier le cas où $k = 2n+1$. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
\prod_{1<p\leqslant 2n+1} p &= \left(\prod_{1<p\leqslant n+1} p\right) \times \left(\prod_{n+1<p\leqslant 2n+1} p\right) \\
&\leqslant 4^{n+1} \times \prod_{n+1<p\leqslant 2n+1} p \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence, car } n+1 < 2n) \\
&\leqslant 4^{n+1} \times 4^n \qquad \text{(d'après le Lemme 5)} \\
&= 4^{2n+1},
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu. Donc la propriété est vérifiée au rang $n+1$. Étant donné qu'elle est vraie depuis le premier rang ($n = 1$), d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$. □

Nous pouvons donc directement conclure par la majoration voulue :

Corollaire 2.
Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n.$$

3.2 Majoration de $\pi(n)!$

Nous allons maintenant chercher à majorer $\pi(n)!$ par 4^n. Dans le paragraphe précédent, nous avons majoré le produit des entiers premiers inférieurs à n par 4^n, il nous suffit donc de montrer que

$$\begin{aligned}
\pi(n)! \quad &\leqslant \quad \prod_{p\leqslant n} p = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i \\
\text{i.e.} \qquad 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times \pi(n) \quad &\leqslant \quad p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_{\pi(n)},
\end{aligned}$$

pour $n \geqslant 2$ et avec $\left\{p_1, \ldots, p_{\pi(n)}\right\}$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Nous pouvons utiliser pour celà le résultat suivant :

Lemme 6.
Pour tout entier $k \geqslant 1$, p_k le k-ième nombre premier, $\qquad k \leqslant p_k$.

Démonstration.

Nous allons procéder par récurrence sur k.

Initialisation : $k = 1$ Nous avons sans effort $p_1 = 2 > 1$. $\surd$
La proposition est donc vraie au rang $k = 1$.

Hérédité : Supposons $k \leqslant p_k$ pour un rang $k \geqslant 1$ fixé. Montrons que ce résultat reste vrai au rang $k+1$.

On sait que les nombres premiers forment une suite strictement croissante, par conséquent pour tout entier $k \geqslant 1$, $p_{k+1} > p_k$, c'est-à-dire $p_{k+1} \geqslant p_k + 1$. Mais d'après l'hypothèse de récurrence $p_k \geqslant k$, donc $p_{k+1} \geqslant p_k + 1 \geqslant k + 1$. $\surd$

La propriété est vérifiée au rang $k+1$. Puisqu'elle est vraie au rang $k = 1$, d'après le principe de récurrence, elle est bien vraie pour tout entier $k \geqslant 1$.

$\square$

Avec ce Lemme, nous avons pour tout $i \in [\![1, \pi(n)]\!]$, $i \leqslant p_i$, et en faisant le produit de ces inégalités nous pouvons conclure simplement :

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 \times ... \times \pi(n) &\leqslant p_1 \times p_2 \times p_3 \times ... \times p_{\pi(n)} \\ \text{soit} \qquad \pi(n)! &\leqslant \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i. \end{aligned}$$

Ceci démontre directement la propriété suivante :

Proposition 6.
Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\pi(n)! \leqslant 4^n.$$

3.3 Majoration de $\pi(n)$

Nous allons entamer la majoration que nous recherchons. Pour la démontrer nous allons simplement utiliser un raisonnement par l'absurde, mais pour y parvenir nous aurons besoin des quelques résultats suivants.

Lemme 7.
Pour tout entier $m \geqslant 1$, $\qquad m! > \left(\frac{m}{\mathrm{e}}\right)^m$.

Démonstration.

Nous avons tout d'abord le développement en série entière de la fonction exponentielle suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

En appliquant ce résultat à un entier $m \geqslant 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^m &= 1 + m + \frac{m^2}{2} + ... + \frac{m^m}{m!} + ... \\ \text{soit} \qquad \mathrm{e}^m - \frac{m^m}{m!} &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{m^k}{k!}. \end{aligned}$$

Or si $m \geqslant 1 > 0$ et $k \geqslant 0$, les termes $\frac{m^k}{k!}$ sont strictement positifs. Par conséquent on peut écrire

$$\mathrm{e}^m - \frac{m^m}{m!} > 0, \quad \text{soit} \quad \mathrm{e}^m > \frac{m^m}{m!}, \quad \text{ou encore} \quad m! > \left(\frac{m}{\mathrm{e}}\right)^m.$$

$\square$

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $\pi(n) \geqslant 1$, on peut donc appliquer le Lemme 7 à $m = \pi(n)$. On obtient ainsi $\mathrm{e}^{\pi(n)} \times \pi(n)! > \pi(n)^{\pi(n)}$. Nous pouvons appliquer la fonction logarithme népérien de chaque côté de l'inégalité, puisque tous les facteurs sont non nuls et positifs. Celà nous donne $\pi(n) + \ln(\pi(n)!) > \pi(n)\ln(\pi(n))$, ou encore

$$\ln(\pi(n)!) > \pi(n)\ln(\pi(n)) - \pi(n).$$

D'autre part, en utilisant la proposition 6, nous avons que $\ln(\pi(n)!) \leqslant n\ln(4)$. De ces deux inégalités nous pouvons conclure que

$$n\ln(4) \geqslant \pi(n)\ln(\pi(n)) - \pi(n).$$

Il est intéressant de remarquer (surtout pour la suite) que cette inégalité peut s'écrire sous la forme $f(\pi(n)) \leqslant n\ln(4)$ avec $f(x) = x\ln x - x$, car $\pi(n) \geqslant 1$ et f est définie pour tout $x \in [1; +\infty[$. De plus notons que f est strictement croissante sur cette intervalle. (En effet la dérivée de f est simplement la fonction logarithme népérien, qui est strictement positive sur $]1; +\infty[$).

Avec ces quelques résultats, nous pouvons maintenant démontrer la seconde partie de l'encadrement de $\pi(n)$.

Théorème 2 [2].
Pour tout $n \geqslant 3$,

$$\pi(n) \leqslant \mathrm{e}\frac{n}{\ln n}.$$

Démonstration.

Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 3$ tel que

$$\pi(n_0) > \mathrm{e}\frac{n_0}{\ln n_0}.$$

Sur $]1;+\infty[$, $\ln x \leqslant x$ par conséquent, puisque $n_0 \geqslant 3$, on a $\frac{n_0}{\ln(n_0)} \geqslant 1$ et donc $\pi(n_0) > \mathrm{e}\frac{n_0}{\ln n_0} \geqslant \mathrm{e} > 1$. On peut donc appliquer la fonction f définie précédemment.

$$\begin{array}{ll}
 & f(\pi(n_0)) > f\left(\mathrm{e}\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}\right) \\
\text{soit} & \pi(n_0)\ln\pi(n_0) - \pi(n_0) > \mathrm{e}\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}\left(\ln\left(\mathrm{e}\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}\right) - 1\right) \\
\text{ou encore} & \pi(n_0)\ln\pi(n_0) - \pi(n_0) > \mathrm{e}\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}\left(1 + \ln n_0 - \ln\ln(n_0) - 1\right) \\
\text{i.e.} & \pi(n_0)\ln\pi(n_0) - \pi(n_0) > \mathrm{e}n_0 - \mathrm{e}n_0\dfrac{\ln\ln(n_0)}{\ln(n_0)}.
\end{array}$$

De plus, d'après le résultat précédent, on sait que $n_0\ln(4) \geqslant \pi(n_0)\ln(\pi(n_0)) - \pi(n_0)$. Donc on en déduit :

$$\begin{array}{lrcl}
 & n_0\ln(4) & > & \mathrm{e}n_0 - \mathrm{e}n_0\dfrac{\ln\ln(n_0)}{\ln(n_0)} \\
\text{c.a.d.} & \ln(4) & > & \mathrm{e} - \mathrm{e}\dfrac{\ln\ln(n_0)}{\ln(n_0)} \\
\text{ou encore} & \dfrac{\mathrm{e} - \ln(4)}{\mathrm{e}} & < & \dfrac{\ln\ln(n_0)}{\ln(n_0)}.
\end{array}$$

Mais ce résultat est faux. En effet, posons la fonction $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ définie pour tout $x \in [1;+\infty[$. Cette fonction est strictement croissante sur $[1;\mathrm{e}]$ et strictement décroissante sur $[\mathrm{e};+\infty[$ (on peut rapidement vérifier celà en étudiant le signe de sa dérivée). La fonction g étant continue, elle admet un maximum global en $x = \mathrm{e}$, de valeur $g(\mathrm{e}) = \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{e} = \mathrm{e}^{-1}$. Autrement dit, pour tout $x \in [1;+\infty[$, $g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

En particulier, $\ln \pi(n_0) \geqslant \ln 3 > 1$, donc

$$\begin{array}{llcrcl} & & & g(\ln(n_0)) & \leqslant & \mathrm{e}^{-1} \\ \text{et} & \dfrac{\mathrm{e}-\ln(4)}{\mathrm{e}} & < & \dfrac{\ln\ln(n_0)}{\ln(n_0)} & \leqslant & \mathrm{e}^{-1} \\ \text{soit} & & & \dfrac{\mathrm{e}-\ln(4)}{\mathrm{e}} & < & \mathrm{e}^{-1} \\ \text{c.a.d.} & & & \mathrm{e}-\ln(4) & < & 1. \end{array}$$

Or $\mathrm{e}-\ln(4) \approx 2.718-1.386 \approx 1.332 > 1$. Nous avons donc contradiction sur l'existence de n_0.

$\square$

Par conséquent, le Théorème 2 nous affirme que pour tout $n \geqslant 3$,

$$\ln 2 \,\frac{n}{\ln n} \;\leqslant\; \pi(n) \;\leqslant\; \mathrm{e}\,\frac{n}{\ln n}.$$

.

4 Le Postulat de Bertrand

Nous allons ici regarder une application de l'encadrement de la fonction π.

En 1845, *Joseph Louis François Bertrand* énonça la conjecture suivante :

Théorème 3. ***(Postulat de Bertrand)***
Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe toujours au moins un nombre premier p tel que

$$n < p < 2n.$$

Cette conjecture, pourtant démontrée en 1850 par Tchebychev, est toujours connue sous le nom de « Postulat de Bertrand ». Remarquons qu'avec un bon encadrement de la fonction π, cette conjecture est facilement démontrable.
En effet, la fonction π donne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Ainsi, dire qu'il existe toujours un nombre premier entre n et $2n$, revient à dire que le nombre $\pi(2n) - \pi(n)$ est toujours supérieur ou égal à un, ou encore strictement positif (puisque c'est une différence d'entier). Ainsi, muni d'un bon encadrement, il est facile de montrer que $\pi(2n) - \pi(n) > 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

Nous n'allons pas donner de démonstration de ce postulat, mais simplement trouver une condition suffisante sur les nombres A et B de l'encadrement de Tchebychev pour qu'il soit vérifié.

Proposition 7.
Soit un entier $n_0 \geqslant 2$, et A et B les constantes de l'encadrements de Tchebychev de la fonction π.
L'inégalité

$$2A > B\left(1 + \frac{\ln 2}{\ln n_0}\right) \qquad [*]$$

est une condition suffisante pour que le postulat de Bertrand soit vérifié pour tout $n \geqslant n_0$.

Démonstration.

Plutôt que de vérifier simplement que c'est une condition suffisante, nous allons directement établir [*]. Soit un entier $n \geqslant n_0$. Nous avons :

$$A\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n) \leqslant B\frac{n}{\ln n} \quad \text{et} \quad A\frac{2n}{\ln 2n} \leqslant \pi(2n) \leqslant B\frac{2n}{\ln 2n}.$$

Nous pouvons en déduire directement l'inégalité suivante :

$$\pi(2n) - \pi(n) \geqslant A\frac{2n}{\ln 2n} - B\frac{n}{\ln n}.$$

Ainsi, pour que le postulat soit vérifié pour n, nous devons avoir $\pi(2n) - \pi(n) > 0$. Nous allons donc trouver une condition sur A et B pour que

$$\pi(2n) - \pi(n) \geqslant A\frac{2n}{\ln 2n} - B\frac{n}{\ln n} > 0.$$

Nous cherchons donc à montrer que $A\frac{2n}{\ln 2n} - B\frac{n}{\ln n} > 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & A\frac{2n}{\ln 2n} > B\frac{n}{\ln n} \\ \text{soit} \qquad & 2A > B\frac{\ln 2n}{\ln n} = B\frac{\ln 2 + \ln n}{\ln n} \\ \text{ou encore} \qquad & 2A > B\left(1 + \frac{\ln 2}{\ln n}\right). \end{aligned}$$

Mais cette condition dépend encore de n et n'est pas valable. Cependant, nous avons $n \geqslant n_0$, donc $\ln n \geqslant \ln n_0$ et $\frac{1}{\ln n_0} \geqslant \frac{1}{\ln n}$, et enfin $B\left(1 + \frac{\ln 2}{\ln n_0}\right) \geqslant B\left(1 + \frac{\ln 2}{\ln n}\right)$.

Ainsi, si $2A > B\left(1 + \frac{\ln 2}{\ln n_0}\right)$, alors $2A > B\left(1 + \frac{\ln 2}{\ln n}\right)$ pour tout $n \geqslant n_0$ et il suffit de remonter les calculs pour voir que le postulat est bien vérifié.

□

Ainsi, pour démontrer le postulat de Bertrand, il suffit de trouver un encadrement de la fonction π avec A et B tels que $2A > B\left(1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}\right)$. Bien sûr, un tel encadrement n'est pas facile à déterminer, et il est préférable de trouver un moins bon encadrement, qui démontrerait le postulat pour tout $n \geqslant n_0$ (n_0 fixé), et de vérifier ensuite à l'aide d'un logiciel de calcul que le postulat reste vrai pour tous les entiers inférieurs à n_0.

Remarquons au passage que l'encadrement que nous avons trouvé dans les paragraphes précédents n'est pas suffisant pour démontrer le postulat. En effet, il est facile de voir que $\ln 2\frac{2n}{\ln 2n} - \mathrm{e}\frac{n}{\ln n}$ est toujours strictement négatif (avec une simple étude de fonction) quelque soit n.

5 Théorèmes sur les nombres premiers

Après avoir trouvé des encadrements, Tchebychev allat plus loin dans l'étude de la fonction π, toujours guidé par la conjecture de Gauss et Lengendre, et démontra le théorème suivant :

Théorème 4.
S'il existe un réel $c > 0$ tel que $\pi(n) \sim c\dfrac{n}{\ln n}$, alors nécessairement $c = 1$.

Ce théorème fut une avancée significative dans la recherche sur les nombres premiers, puisqu'il fût un des premiers résultats sur ce sujet.

Et c'est ainsi que quelques années plus tard, en 1896, cette conjecture fût démontrée par *Jacques Hadamard* et *Charles-Jean de La Vallée Poussin*, indépendament l'un de l'autre, et porte aujourd'hui le nom de Théoème des nombres premiers, et s'énnonce comme suit :

Théorème 5. ***(Théorème des nombres premiers)***
Lorsque n tend vers l'infini,

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

La démonstration de ce théorème, que ce soit celle de de La Valléee Poussin, ou celle d'Hadamard, repose sur de nombreux résultats d'analyse complexe. Ils se sont beaucoup appuyés sur les travaux de *Georg Friedrich Bernhard Riemann* sur la fonction Zêta, définie pour tout nombre complexe $s \in \mathbb{C}$, tel que $\Re(s) > 1$, par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Le lien entre cette fonction et la théorie des nombres premiers avait déjà été mis en évidence par *Leonhard Paul Euler* qui avait fournit la formule suivante, aussi appellée *produit Eulérien* :

Proposition 8.
Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$, on a

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Démonstration. Nous ne donnerons ici la preuve seulement dans le cas réel.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$.
Pour tout $p \in \mathbb{P}$, $0 < \frac{1}{p^x} < 1$, donc on a le développement en série entière suivant :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{p^x}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{kx}}.$$

Soit un entier $N > 0$. On peut alors écrire :

$$\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant N}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^x}} = \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant N}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{kx}}$$
$$= \left(1+\frac{1}{p_1^x}+\frac{1}{p_1^{2x}}+...\right) \times \left(1+\frac{1}{p_2^x}+\frac{1}{p_2^{2x}}+...\right) \times ... \times \left(1+\frac{1}{p_{\pi(N)}^x}+\frac{1}{p_{\pi(N)}^{2x}}+...\right)$$

Ce produit donne donc la somme de tous les inverses de nombres entiers (exposant x) dont leur décomposition en facteurs premiers ne contient que des nombres premiers inférieurs à N. Autrement dit, si l'on note $\Omega(N)$ l'ensemble des entiers n qui ne contiennent que des nombres premiers inférieurs à N dans leur décomposition, on a

$$\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant N}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^x}} = \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant N}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{kx}} = \sum_{n\in\Omega(N)} \frac{1}{n^x}$$

Ensuite nous avons l'inégalité suivante :

$$0 \ < \ \zeta(x) - \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant N}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^x}} \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n\in\Omega(N)} \frac{1}{n^x} \ < \ \sum_{n>N}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

En effet, il existe des entiers supérieurs à N qui n'ont que des facteurs premiers inférieurs à N. Donc soustraire la somme de tous les inverses de ces nombres (toujours exposant x), donne un nombre plus petit que la somme des inverses de tous les nombres entiers supérieurs à N.

Par ailleurs,

$$\sum_{n>N}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}.$$

En faisant tendre N vers l'infini, nous avons

$$\sum_{n>N}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \longrightarrow 0$$

Donc par encadrement, nous avons

$$\lim_{N\to+\infty} \zeta(x) - \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant N}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^x}} = 0$$

$$\text{soit} \qquad \zeta(x) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^x}}.$$

□

Cette formule donne donc un lien direct entre la fonction ζ et un produit ne comprenant que des nombres premiers. Cette fonction est aujourd'hui très importante en théorie des nombres.

De meilleurs estimations de la fonction π on été trouvées depuis, par exemple

$$\pi(n) \ \sim \ \mathrm{Li}(n),$$

où Li désigne le logarithme intégrale, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > 2$, par

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Pour terminer, voici un tableau de comparaison entre les valeurs de $\pi(n)$, $\dfrac{n}{\ln n}$, et $\mathrm{Li}(n)$, pour de grandes valeurs de n.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\pi(n)}$	$\boldsymbol{\dfrac{n}{\ln n}}$	$\mathbf{Li}(\boldsymbol{n})$
10	4	4.343	5.12
100	25	21.715	29.1
1 000	168	144.765	176.6
10 000	1 229	1 085.736	1 245.1
100 000	9 592	8 685.890	9 628.8
1 000 000	78 498	72 382.414	78 626.5
10 000 000	664 579	620 420.688	664 917.4
100 000 000	5 761 455	5 428 681.024	5 762 208.3
1 000 000 000	50 847 534	48 254 942.43	50 849 233.9
10 000 000 000	455 052 511	434 294 481.9	455 055 613.5
100 000 000 000	4 118 054 813	3 948 131 654	4 118 066 399.6

TABLE 1 – Comparaison des valeurs de $\pi(n)$, $\dfrac{n}{\ln n}$ et $\mathrm{Li}(n)$

On remarque clairement que pour de grandes valeurs de n, $\mathrm{Li}(n)$ est beaucoup plus proche de $\pi(n)$ que $\dfrac{n}{\ln n}$.

Bibliographie et remerciement

Mis à part quelques lectures personnelles, mon TIPE ce base essentiellement sur le sujet de CAPES externe 2008, qui proposait l'encadrement de la fonction π, et sur l'ouvrage « INTRODUCTION A LA THEORIE DES NOMBRES »de Godfrey Harold Hardy et Edward Maitland Wright, traduit par François Sauvageot.

Je voudrai remercier M. Christophe DELAUNAY et M. Élie MOSAKI, mes encadrants de TIPE, qui m'ont accompagné tout au long du semestre et qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

FIN.