# CHIFFRES NON NULS DANS LE DÉVELOPPEMENT EN BASE ENTIÈRE D'UN NOMBRE ALGÉBRIQUE IRRATIONNEL

*par*

Boris Adamczewski & Colin Faverjon

***Résumé.*** — Dans cette note, nous donnons une minoration effective du nombre de chiffres non nuls parmi les $N$ premiers chiffres du développement dans une base entière d'un nombre algébrique irrationnel. La démonstration de ce résultat reprend pour l'essentiel les arguments de [**BBCP04**], mais a l'avantage d'être rendue à la fois totalement élémentaire et effective. Elle étend également ces arguments au cas de toute base entière.

## 1. Introduction

Étant donné un entier $b \geq 3$, nous ne sommes malheureusement toujours pas capables de prouver que tous les chiffres $0, 1, \ldots, b-1$, apparaissent dans le développement en base $b$ de tout nombre réel, algébrique et irrationnel. Notons qu'une réponse positive à cette question permettrait de résoudre une conjecture bien connue de Mahler [**Ma84**] concernant l'absence de tels nombres dans l'ensemble triadique de Cantor. Plus généralement, on s'attend à ce que ces nombres, comme d'autres constantes classiques, soient des nombres normaux (voir par exemple [**Ad10, AB07, ABL04**] pour une discussion et des résultats complémentaires sur ce sujet).

Contrairement au cas d'une base $b \geq 3$, il est évident que les deux chiffres 0 et 1 apparaissent infiniment souvent dans le développement binaire de tout nombre irrationnel. Une conséquence de la normalité des nombres algébriques irrationnels serait que leur développement binaire aurait la même proportion d'occurrences du chiffre 0 et du chiffre 1. Plus précisément, si $\mathcal{P}(x, 2, N)$ désigne le nombre de 1 parmi les $N$ premiers chiffres du développement binaire du nombre algébrique irrationnel $x$, on devrait avoir

$$\mathcal{P}(x, 2, N) \sim \frac{N}{2} \cdot$$

Ce résultat semble hors d'atteinte pour le moment et minorer la quantité $\mathcal{P}(x, 2, N)$, lorsque $x$ est un nombre algébrique irrationnel, est un problème délicat.

Afin d'étudier cette question, une approche naturelle, et un peu naïve, repose sur l'idée suivante : si le développement binaire d'un nombre réel $x$, algébrique et irrationnel, contenait trop de zéros, les sommes partielles du développement fourniraient une infinité de « trop bonnes » approximations rationnelles de $x$. Plus concrètement, on peut raisonner comme suit. Soit $x = \sum_{i \geq 0} 1/2^{n_i}$ un nombre algébrique irrationnel binaire. Alors, il existe des entiers $p_k$ tels que

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^{n_i}} = \frac{p_k}{2^{n_k}} \quad \text{et} \quad \left| x - \frac{p_k}{2^{n_k}} \right| < \frac{2}{2^{n_{k+1}}} \cdot$$

D'autre part, puisque $x$ est un nombre algébrique irrationnel, si $\varepsilon > 0$ est un nombre réel, alors le théorème de Ridout [**Rid57**] implique que

$$\left|x - \frac{p_k}{2^{n_k}}\right| > \frac{1}{2^{(1+\varepsilon)n_k}},$$

pour tout entier $k$ assez grand. Cela implique que $n_{k+1} > (1+\varepsilon)n_k - 1$ pour de tels $k$, propriété dont découle aisément la minoration

$$\mathcal{P}(x, 2, N) > \frac{\log N}{\log(1+\varepsilon)} + O(1)\,. \tag{1}$$

En 2004, les auteurs de [**BBCP04**] ont obtenu une amélioration substantielle de l'inégalité (1) en suivant une approche assez originale[(1)].

***Théorème BBCP.*** *Soient $x$ un nombre réel algébrique irrationnel de degré $d$, $\varepsilon > 0$. Posons*

$$c := \left(\frac{1}{(2+\epsilon)A_d}\right)^{1/d},$$

*où l'entier $A_d$ est défini comme dans l'égalité (3). Alors, on a*

$$\mathcal{P}(x, 2, N) > cN^{1/d}\,, \tag{2}$$

*pour tout entier $N$ assez grand.*

Ce théorème offre en particulier une nouvelle preuve de plusieurs résultats classiques comme la transcendance des nombres

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2^n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{F_n}},$$

où $F_n$ désigne le $n$-ième nombre de Fibonacci. En outre, il implique la transcendance du nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{\lfloor n^{\log\log n}\rfloor}},$$

pour lequel aucune autre démonstration ne semble connue.

La preuve proposée par les auteurs de [**BBCP04**] combine astucieusement des idées provenant de la théorie additive des nombres avec le théorème de Roth [**Ro55**]. De façon un peu surprenante, le fait de remplacer le théorème de Roth par sa version $p$-adique (le théorème de Ridout) produit seulement une amélioration marginale : le terme $2+\varepsilon$ dans la définition de la constante $c$ peut être remplacée par $1+\varepsilon$. Notons toutefois que pour certaines classes particulières de nombres algébriques, il est possible d'obtenir une constante plus grande (voir à ce propos [**BBCP04, Ri08**]). Une lacune du théorème BBCP est son ineffectivité : il ne permet pas de déterminer un entier $N$ à partir duquel la minoration (2) est valable.

Dans cette note, nous choisissons une direction opposée, préférant substituer au théorème de Roth un résultat beaucoup plus rudimentaire : l'inégalité de Liouville. Nous obtenons un résultat légèrement plus faible, puisque la contante $c$ est remplacée dans le théorème 2.1 par une constante $C$ plus petite. L'intérêt de ce travail est de proposer une démonstration totalement élémentaire qui a l'avantage de fournir un résultat effectif. Nous étendons également cette approche au cas de toute base entière.

[(1)] Notons qu'on trouve dans cette approche des réminiscences de l'article de Knight [**Kn91**].

## 2. Enoncé du résultat

Dans toute la suite, $x$ est un nombre algébrique irrationnel de degré $d$ et $b$ est un entier supérieur ou égal à 2, tous deux fixés. Notons

$$(x)_b := x_{-r}x_{-r+1}\cdots x_{0\bullet}x_1x_2\cdots$$

le développement de $x$ en base $b$, de sorte que les chiffres $x_i$ appartiennent tous à l'ensemble $\{0,\ldots,b-1\}$. Nous nous intéressons à la quantité

$$\mathcal{P}(x,b,N) := \mathrm{Card}\,\{1 \le i \le N \mid x_i \neq 0\}\ .$$

Posons $\alpha := x - \lfloor x \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x$, de sorte que

$$(\alpha)_b = 1_\bullet x_1x_2\cdots\ .$$

Notons qu'il existe un unique polynôme $P$ à coefficients entiers de degré $d$ tel que

$$P(\alpha) = A_d\alpha^d + \cdots + A_1\alpha + A_0 = 0\,, \tag{3}$$

avec $A_d > 0$. Notons

$$H := \max\{|A_i| \mid 0 \le i \le d\}$$

la hauteur naïve du nombre algébrique $\alpha$. Dans la suite, étant donné un nombre réel strictement positif $x$, $\log x$ désigne le logarithme en base $b$ de $x$.

Notre objectif est de donner une preuve élémentaire du résultat suivant.

***Théorème 2.1.*** — *Nous conservons les notations précédentes. Soit $\varepsilon$ un nombre réel tel que $0 < \varepsilon \le 1/2$. Posons*

$$C := \frac{1}{b-1}\left(\frac{1-\varepsilon}{d(A_d+1)}\right)^{1/d}\ .$$

*Alors, on a*

$$\mathcal{P}(x,b,N) \ge CN^{1/d}\,,$$

*pour tout entier $N$ vérifiant*

$$N > d(4(b-1)H)^{d+1}\,, \tag{4}$$

$$N > \left(\frac{4d^2}{\varepsilon(b-1)^{d-1}}\log^2\left(\frac{4d^2}{\varepsilon(b-1)^{d-1}}\right)\right)^d\ . \tag{5}$$

En conservant la même approche, il est en fait possible d'obtenir une constante $C$ légèrement plus petite, ainsi que d'infléchir les conditions (4) et (5). Le souci de clarté, et une certaine paresse, nous ont conduit à opter pour le compromis que représente le théorème 2.1.

## 3. Démonstration du théorème

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{P}(\alpha,b,N) = \mathcal{P}(x,b,N)$ pour tout entier $N$. Dans toute la suite, $N$ désigne un entier fixé vérifiant les inégalités (4) et (5). Nous raisonnons par l'absurde en supposant désormais que

$$\mathcal{P}(\alpha,b,N) < CN^{1/d} \tag{6}$$

et nous cherchons à établir une contradiction. La démonstration qui suit met en évidence les principales étapes que l'on trouve dans une preuve de transcendance classique.

**3.1. Notations.** — Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\alpha_{1,n} := x_n$. On pose également $\alpha_{1,0} := 1$, de sorte que

$$(\alpha)_b = \alpha_{1,0\bullet}\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\cdots .$$

On définit alors par récurrence l'entier $\alpha_{k,n}$ par la formule

$$\alpha_{k,n} = \sum_{r=0}^{n} \alpha_{k-1,r}\alpha_{1,n-r} .$$

Notons que d'après la définition du produit de Cauchy des séries formelles, si

$$f(X) := 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{1,n} X^{-n} \in \mathbb{Z}[[1/X]] ,$$

alors on a $f^k(X) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{k,n} X^{-n}$, de sorte que

$$\alpha^k = f(b)^k = \sum_{m \geq 0} \frac{\alpha_{k,m}}{b^m} .$$

Ainsi, l'entier $\alpha_{k,n}$ correspond au $n$-ième chiffre dans une « écriture brute » de $\alpha^k$, c'est-à-dire dans laquelle on aurait élever $\alpha$ à la puissance $k$ sans abaisser les retenues. L'idée principale de cette démonstration est de travailler avec ces écritures brutes afin de contourner les problèmes posés par la présence des retenues dans ce contexte.

Il est également utile de remarquer que, puisque $\alpha$ a été choisi de sorte que $\alpha_{1,0} = 1$, on a pour tout entier $n$

$$\alpha_{d-1,n} = 0 \implies \alpha_{k,n} = 0, \quad \forall k, 1 \leq k \leq d-1 . \tag{7}$$

**3.2. Fonction auxiliaire.** — Pour tout entier $k$, $1 \leq k \leq d$, posons

$$T_k(\alpha, R) := \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,R+m}}{b^m} .$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} T_k(\alpha, R) &= b^R \left( \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,R+m}}{b^{R+m}} \right) \\ &= b^R \left( \sum_{m=R+1}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m}}{b^m} \right) \\ &= b^R \alpha^k - \sum_{m=0}^{R} \alpha_{k,m} b^{R-m} . \end{aligned}$$

Pour chaque entier $R$, on pose

$$T(\alpha, R) := \sum_{k=1}^{d} A_k T_k(\alpha, R) .$$

Une remarque importante est que $T(\alpha, R)$ est toujours un entier relatif. En effet, on a

$$\begin{aligned} T(\alpha, R) &= \sum_{k=1}^{d} A_k T_k(\alpha, R) \\ &= b^R \sum_{k=1}^{d} A_k \alpha^k - \sum_{k=1}^{d} A_k \sum_{m=0}^{R} \alpha_{k,m} b^{R-m} \\ &= -b^R A_0 - \sum_{k=1}^{d} A_k \sum_{m=0}^{R} \alpha_{k,m} b^{R-m} . \end{aligned}$$

La quantité auxiliaire à laquelle nous allons nous intéresser dans cette démonstration est

$$S(\alpha, N) := \sum_{R=1}^{N-K} |T(\alpha, R)| ,$$

où $K = \lfloor d \log N \rfloor$.

**3.3. Majoration.** — Dans cette seconde étape, nous allons majorer la somme $S(\alpha, N)$ comme suit.

***Proposition 3.1.*** — *On a*

$$S(\alpha, N) \leq C^d (A_d + 1)(b-1)^d N .$$

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin d'établir deux résultats auxiliaires.

***Lemme 3.2.*** — *Pour tout entier $k$, $1 \leq k \leq d$, et tout entier $R$, $1 \leq R \leq N$, on a*

$$T_k(\alpha, R) \leq \frac{(N+k)^k (b-1)^k}{(k-1)!(N+1)} .$$

*Démonstration.* — Commençons par majorer les $\alpha_{k,n}$. On a par définition

$$\alpha_{k,n} = \sum_{r=0}^{n} \alpha_{k-1,r} \alpha_{1,n-r}$$

et une simple récurrence donne alors

$$\alpha_{k,n} = \sum_{i_1 + \cdots + i_k = n} \alpha_{1,i_1} \cdots \alpha_{1,i_k} .$$

Il vient donc

$$\alpha_{k,n} \leq \binom{n+k-1}{k-1} (b-1)^k$$

puisque les $\alpha_{1,j}$ sont tous majorés par $b-1$. Il suit

$$T_k(\alpha, R) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} b^{-m} \binom{R+m+k-1}{k-1} (b-1)^k . \tag{8}$$

Posons à présent $S_k(\alpha, R) := \sum_{m=1}^{+\infty} b^{-m} \binom{R+m+k-1}{k-1} (b-1)^k$ et montrons que $S_k(\alpha, R)$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$S_k(\alpha, R) = b S_{k-1}(\alpha, R) + (b-1)^{k-1} \binom{R+k-1}{k-1} .$$

En effet, la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ implique que

$$\begin{aligned}
S_k(\alpha,R) &= \sum_{m=1}^{+\infty} b^{-m}\binom{R+m+k-1}{k-1}(b-1)^k \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} b^{-m}\binom{R+m+k-2}{k-2}(b-1)^k + \sum_{m=1}^{+\infty} b^{-m}\binom{R+m+k-2}{k-1}(b-1)^k \\
&= (b-1)S_{k-1}(\alpha,R) + \sum_{m=2}^{+\infty} b^{-m}\binom{R+m+k-2}{k-1}(b-1)^k \\
&\quad +\binom{R+k-1}{k-1}\frac{(b-1)^k}{b} \\
&= (b-1)S_{k-1,R}(\alpha,R) + \sum_{m=1}^{+\infty} b^{-(m+1)}\binom{R+m+k-1}{k-1}(b-1)^k \\
&\quad +\binom{R+k-1}{k-1}\frac{(b-1)^k}{b} \\
&= (b-1)S_{k-1}(\alpha,R) + \binom{R+k-1}{k-1}\frac{(b-1)^k}{b} + \frac{1}{b}S_k(\alpha,R)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit alors par récurrence sur l'entier $k$ la majoration

$$S_k(\alpha,R) \leq (b-1)^k \sum_{j=0}^{k-1}\binom{R+k}{j}\,. \tag{9}$$

En effet, le résultat est immédiat pour $k=1$ et en le supposant vrai au rang $k-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_k(\alpha,R) &= bS_{k-1}(\alpha,R) + (b-1)^{k-1}\binom{R+k-1}{k-1} \\
&\leq b(b-1)^{k-1}\sum_{j=0}^{k-2}\binom{R+k-1}{j} + (b-1)^{k-1}\binom{R+k-1}{k-1} \\
&= \frac{b(b-1)^{k-1}}{2}\left(2\sum_{j=0}^{k-2}\binom{R+k-1}{j} + \binom{R+k-1}{k-1} - (1-\frac{2}{b})\binom{R+k-1}{k-1}\right) \\
&\leq \frac{b(b-1)^{k-1}}{2}\left(\binom{R+k-1}{0} + \sum_{j=0}^{k-2}\binom{R+k-1}{j} + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{R+k-1}{j}\right) \\
&\leq \frac{b(b-1)^{k-1}}{2}\left(\binom{R+k-1}{0} + \sum_{j=0}^{k-2}\left[\binom{R+k-1}{j} + \binom{R+k-1}{j+1}\right]\right) \\
&= \frac{b(b-1)^{k-1}}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{R+k}{j} \\
&\leq (b-1)^k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{R+k}{j}\,,
\end{aligned}$$

comme souhaité. Remarquons d'autre part que

$$\sum_{j=0}^{k-1}\binom{R+k}{j} \leq \frac{(R+k)^k}{(k-1)!(R+1)}. \tag{10}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1}\binom{R+k}{j} &= \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(R+k)!}{j!(R+k-j)!}\\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(R+k)^j}{j!}\\
&= (R+k)^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!(R+k)^{k-1-j}}\\
&= (R+k)^{k-1}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{(k-1-n)!(R+k)^n}\\
&\leq (R+k)^{k-1}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(k-1)^n}{(k-1)!(R+k)^n}\\
&\leq \frac{(R+k)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{k-1}{R+k}\right)^n\\
&= \frac{(R+k)^k}{(k-1)!(R+1)}.
\end{aligned}$$

D'après les inégalités (8), (9) et (10), et en notant que $R \leq N$, on obtient finalement

$$T_k(\alpha, R) \leq \frac{(R+k)^k(b-1)^k}{(k-1)!(R+1)} \leq \frac{(N+k)^k(b-1)^k}{(k-1)!(N+1)},$$

ce qui termine la démonstration du lemme. □

Nous allons maintenant utiliser le lemme 3.2 pour démontrer notre second résultat auxiliaire.

***Lemme 3.3.*** — *Pour tout entier $k$, $1 \leq k \leq d$, on a*

$$\sum_{R=1}^{N-K} T_k(\alpha, R) \leq (b-1)^k(\mathcal{P}(\alpha, b, N)^k + b).$$

*Démonstration.* — La définition de $T_k(\alpha, R)$ implique que

$$\begin{aligned}
\sum_{R=1}^{N-K} T_k(\alpha, R) &= \sum_{R=1}^{N-K}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\alpha_{k,R+m}}{b^m}\\
&= \sum_{R=1}^{N-K}\sum_{m=1}^{K}\frac{\alpha_{k,R+m}}{b^m} + \frac{1}{b^K}\sum_{R=1}^{N-K}\sum_{m=K+1}^{+\infty}\frac{\alpha_{k,R+m}}{b^{m-K}}\\
&\leq \sum_{m=1}^{K}\frac{1}{b^m}\sum_{R=1}^{N}\alpha_{k,R} + \frac{b}{b^{d\log N}}\sum_{R=1}^{N-K} T_k(\alpha, R+K).
\end{aligned}$$

On déduit alors du lemme 3.2 que

$$\sum_{R=1}^{N-K} T_k(\alpha, R) \leq \sum_{R=1}^{N} \alpha_{k,R} + \frac{b(N - d\log N + 1)(N+k)^k (b-1)^k}{N^d (k-1)!(N+1)} \,. \tag{11}$$

D'autre part, on peut montrer par récurrence sur l'entier $k$ que

$$\sum_{R=1}^{N} \alpha_{k,R} \leq (b-1)^k \mathcal{P}(\alpha, b, N)^k \,. \tag{12}$$

Pour $k = 1$, cela revient simplement à dire que les $\alpha_{1,R}$ appartiennent à l'ensemble $\{0, \ldots, b-1\}$. Supposons l'inégalité vraie pour l'entier $k-1$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{R=1}^{N} \alpha_{k,R} &= \sum_{R=1}^{N} \sum_{i=0}^{R} \alpha_{k-1,i}\alpha_{1,R-i} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \sum_{R=i}^{N} \alpha_{k-1,i}\alpha_{1,R-i} \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} \alpha_{k-1,i} \sum_{R=0}^{N} \alpha_{1,R} \\
&\leq (b-1)^k \mathcal{P}(\alpha, b, N)^k \,.
\end{aligned}$$

D'après les inégalité (11) et (12), il vient :

$$\sum_{R=1}^{N-K} T_k(\alpha, R) \leq (b-1)^k \left( \mathcal{P}(\alpha, b, N)^k + \frac{b(N - d\log N + 1)(N+k)^k}{N^d (k-1)!(N+1)} \right) \,. \tag{13}$$

Il nous reste donc à montrer que

$$\frac{(N - d\log N + 1)(N+k)^k}{N^d (k-1)!(N+1)} \leq 1 \,,$$

pour tout entier $k$, $1 \leq k \leq d$. Puisque le rapport $\frac{(N+k)^k (b-1)^k}{(k-1)!(N+1)}$ croît avec l'entier $k$, il suffit en fait d'obtenir la majoration suivante :

$$\frac{(N - d\log N + 1)(N+d)^d}{N^d (d-1)!(N+1)} \leq 1 \,.$$

Supposons dans un premier temps que $d = 2$. D'après (4), on a $N \geq b^2 \geq 4$ et un rapide calcul montre que

$$\left(1 + \frac{2}{N}\right)^2 \left(1 - \frac{2\log N + 1}{N}\right) \leq 1 \,,$$

ce qui implique que

$$\frac{N - 2\log N + 1}{N} \cdot \frac{(N+2)^2}{N(N+1)} \leq 1 \,,$$

ou encore

$$\frac{(N - d\log N + 1)(N+d)^d}{N^d (d-1)!(N+1)} \leq 1 \,, \tag{14}$$

ce qui est la majoration souhaitée.

Supposons à présent que $d \geq 3$. Comme la quantité $(d-1)!^{1/d}$ croît avec $d$, on obtient que

$$\frac{d}{(d-1)!^{1/d} - 1} \leq \frac{d}{2^{1/3}} \leq 4d \,.$$

Ainsi, puisque l'inégalité (4) garantit que $N \geq 4d$, il vient :

$$N \geq \frac{d}{(d-1)!^{1/d} - 1},$$

c'est-à-dire

$$\left(1 + \frac{d}{N}\right)^d \leq (d-1)!\,.$$

Cette dernière inégalité implique facilement que

$$\frac{(N - d\log N + 1)(N+d)^d}{N^d(d-1)!(N+1)} \leq 1\,, \tag{15}$$

pour tout entier $d \geq 3$, comme souhaité.

D'après (13), (14) et (15), on obtient que

$$\sum_{R=1}^{N-K} T_k(\alpha, R) \leq (b-1)^k(\mathcal{P}(\alpha, b, N)^k + b)\,,$$

ce qui termine la démonstration. □

Nous pouvons à présent démontrer la proposition 3.1.

*Démonstration de la proposition 3.1.* — Nous cherchons ici à majorer la somme

$$S(\alpha, N) := \sum_{R=1}^{N-K} |T(\alpha, R)|\,.$$

D'après le Lemme 3.3, il vient :

$$\begin{aligned} S(\alpha, N) &\leq \sum_{R=1}^{N-K} \sum_{k=1}^{d} |A_k| T_k(\alpha, R) \\ &\leq \sum_{k=1}^{d} |A_k| \sum_{R=1}^{N-K} T_k(\alpha, R) \\ &\leq \sum_{k=1}^{d} |A_k|(b-1)^k(\mathcal{P}(\alpha, b, N)^k + b)\,. \end{aligned}$$

Puisque par hypothèse, nous avons $\mathcal{P}(\alpha, b, N) \leq CN^{1/d}$, il suit :

$$S(\alpha, N) \leq A_d(C^d N + 1)(b-1)^d + H \sum_{k=1}^{d-1}((CN^{1/d})^k + b)(b-1)^k$$

et donc

$$S(\alpha, N) \leq A_d(C^d N + b)(b-1)^d + HCN^{1/d}(b-1)\cdot \frac{C^{d-1}N^{1-1/d}(b-1)^{d-1} - 1}{CN^{1/d}(b-1) - 1} + bH\sum_{k=1}^{d-1}(b-1)^k\,. \tag{16}$$

Supposons dans un premier temps que $b = 2$. On vérifie aisément que l'inégalité (4) implique que $N \geq (2/C)^d$. On a donc

$$\frac{C^{d-1}N^{1-1/d} - 1}{CN^{1/d} - 1} \leq \frac{2C^{d-1}N^{1-1/d}}{CN^{1/d}}$$

et ainsi

$$\sum_{R=1}^{N-K} |T(\alpha, R)| \leq A_d(C^d N + 2) + 2HC^{d-1}N^{1-1/d} + 2dH\,,$$

ou encore
$$\sum_{R=1}^{N-K} |T(\alpha,R)| \leq C^d N \left( A_d + \frac{2H}{C^d N} + \frac{2H}{CN^{1/d}} + \frac{2dH}{C^d N} \right) .$$
D'autre part, on peut vérifier aisément que (4) garantit que $N \geq \left(\frac{4H}{C}\right)^d$, et un rapide calcul donne alors

$$S(\alpha,N) \leq C^d N(A_d+1) , \tag{17}$$

ce qui est précisément la majoration souhaitée dans ce cas.

Supposons à présent que $b \geq 3$. Puisque (4) assure que $N \geq C^{-d}$, on a $CN^{1/d}(b-1) \geq 2$ et donc
$$\frac{C^{d-1}N^{1-1/d}(b-1)^{d-1}-1}{CN^{1/d}(b-1)-1} \leq \frac{2C^{d-1}N^{1-1/d}(b-1)^{d-1}}{CN^{1/d}(b-1)} .$$
De même, puisque $b \geq 3$, on a
$$\sum_{k=1}^{d-1}(b-1)^k \leq 2(b-1)^{d-1} .$$
L'inégalité (16) implique alors que

$$S(\alpha,N) \leq C^d N(b-1)^d \left( A_d + \frac{bA_d}{C^d N} + \frac{2H}{CN^{1/d}} + \frac{2bH}{C^d N} \right) . \tag{18}$$

Il nous reste donc à montrer que
$$\frac{bA_d}{C^d N} + \frac{2H}{CN^{1/d}} + \frac{2bH}{C^d N} \leq 1 .$$
Là encore, un rapide calcul à partir de l'inégalité (4) montre que
$$\frac{2H}{CN^{1/d}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3bH}{C^d N} \leq \frac{1}{2} .$$
On en déduit immédiatement la majoration souhaitée, à savoir
$$S(\alpha,N) \leq C^d N(A_d+1)(b-1)^d .$$
D'après (17), cela achève la démonstration. □

**3.4. Non nullité.** — Dans cette partie, nous cherchons à montrer l'existence d'entiers $R$ compris entre 1 et $N-K$ tels que $T(\alpha,R) \neq 0$.

*3.4.1. Océans de zéros.* — Comme, par hypothèse, nous avons supposé que le nombre de chiffres non nuls de $\alpha$ est

$$\mathcal{P}(\alpha,b,N) \leq CN^{1/d} , \tag{19}$$

nous pouvons en déduire une majoration du nombre d'entiers $n$ inférieurs à $N$ pour lesquels $\alpha_{d-1,n}$ n'est pas nul. Plus précisément, on obtient que

$$Q := \mathrm{Card}\,\{0 \leq n \leq N \mid \alpha_{d-1,n} \neq 0\} \leq C^{d-1}N^{1-1/d} . \tag{20}$$

En effet, il suffit d'utiliser (19) et de montrer par récurrence sur l'entier $k$ que
$$\mathrm{Card}\,\{0 \leq n \leq N \mid \alpha_{k,n} \neq 0\} \leq \mathcal{P}(\alpha,b,N)^k .$$
Cette dernière inégalité se déduit facilement à partir de l'observation suivante :

$$\alpha_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{k-1,i}\alpha_{1,n-i} \neq 0 \iff \exists i,\, 0 \leq i \leq n \mid \alpha_{k-1,i}\alpha_{1,n-i} \neq 0 . \tag{21}$$

Nous pouvons donc désigner par $0 = R_1 < \cdots < R_Q$ la suite ordonnée de façon croissante des entiers $n$ pour lesquels $\alpha_{d-1,n} \neq 0$. Nous posons également $R_{Q+1} := N$. Notons que lorsque $R_{i+1} - R_i$ est « grand », on obtient d'après (7) un véritable « océan de zéros »[(2)], dans le sens où

$$\alpha_{k,n} = 0, \qquad \forall (k,n) \mid 1 \leq k \leq d-1, R_i < n < R_{i+1}\,. \tag{22}$$

Le lemme suivant traduit, d'une certaine façon, l'omniprésence de tels océans de zéros.

***Lemme 3.4***. — *Posons*

$$I_\varepsilon := \left\{ 1 \leq i \leq Q \mid R_{i+1} - R_i \geq \frac{\varepsilon C^{1-d} N^{1/d}}{2} \right\}.$$

*Alors,*

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} (R_{i+1} - R_i) \geq (1 - \varepsilon/2) N\,.$$

*Démonstration.* — Notons d'abord que par définition de $I_\varepsilon$, on a

$$\sum_{i \notin I_\varepsilon} (R_{i+1} - R_i) \leq \frac{Q \varepsilon C^{1-d} N^{1/d}}{2}\,.$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I_\varepsilon} (R_{i+1} - R_i) &= \sum_{m=1}^{Q} (R_{m+1} - R_m) - \sum_{m \notin I_\varepsilon} (R_{m+1} - R_m) \\
&\geq \sum_{m=1}^{Q} (R_{m+1} - R_m) - \frac{Q \varepsilon C^{1-d} N^{1/d}}{2} \\
&\geq N - \frac{C^{d-1} N^{1-1/d} \varepsilon C^{1-d} N^{1/d}}{2} \\
&= (1 - \varepsilon/2) N.
\end{aligned}$$

□

*3.4.2. La possibilité d'une île.* — La prochaine étape consiste à montrer l'existence d'une « île », c'est-à-dire d'un entier $R$ appartenant à l'intervalle $]R_i, R_{i+1} - K[$, le plus grand possible, et tel que $\alpha_{d,R}$ n'est pas nul. Plus précisément, nous allons montrer le résultat suivant.

***Lemme 3.5***. — *Soit $i$ un entier appartenant à $I_\varepsilon$. Alors, il existe un entier $R$ tel que :*

(i) $R_{i+1} - R \geq K$,

(ii) $R - R_i \geq \frac{R_{i+1} - R_i - K - \log(4^d H (b-1))}{d}$,

(iii) $\alpha_{d,R} \neq 0$.

La preuve du lemme 3.5 repose sur l'inégalité de Liouville dont la démonstration élémentaire n'est pas rappelée ici. La version donnée ci-dessous est extraite de **[Bu04]**[(3)].

***Lemme 3.6* (Inégalité de Liouville)**. — *Soient $\xi$ un nombre algébrique de degré $d$ et de hauteur $H$ et $p$ et $q$ deux entiers relatifs non nuls. Alors, on a*

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{2^{d-1} H \max(|p|, |q|)^d}\,.$$

(2) Cette dénomination fait référence à la note de Knight **[Kn91]**.

(3) L'inégalité donnée dans **[Bu04]** est en réalité un peu meilleure, mais cela n'a pas d'intérêt pour les calculs qui vont suivre.

*Preuve du lemme 3.5.* — Notons $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \cdots$ la suite croissante des entiers $r$ tels que $\alpha_{1,r} \neq 0$. On a alors

$$\alpha - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{1,p_i} b^{-p_i} = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_{1,p_i} b^{-p_i} - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{1,p_i} b^{-p_i} = \sum_{i=k}^{+\infty} \alpha_{1,p_j} b^{-p_i} \leq \frac{b-1}{b^{p_k}} \cdot$$

D'autre part, il existe un entier $A$ tel que

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{1,p_i} b^{-p_i} = \frac{A}{b^{p_{k-1}}} \cdot$$

On peut de plus remarquer que $|A| \leq 2b^{p_{k-1}}$ puisque par définition $\alpha$ appartient à l'intervalle $[1,2]$. D'après l'inégalité de Liouville (lemme 3.6), on obtient que

$$b^{p_k} < (b-1)4^d H b^{dp_{k-1}} .$$

Ainsi, il vient :

$$p_k < dp_{k-1} + \log(4^d H(b-1)) .$$

Il suit que tout intervalle de la forme $\left[\frac{l-\log(4^d H(b-1))}{d}, l\right]$, avec $l - \log(4^d H(b-1)) \geq 0$, contient au moins un terme de la suite $p_k$. Notamment si l'on montre que

$$R_{i+1} - R_i - K - \log(4^d H(b-1)) \geq 0 , \tag{23}$$

on en déduira l'existence d'un entier $p_k$ dans l'intervalle

$$\left[\frac{R_{i+1} - R_i - K - \log(4^d H(b-1))}{d}, R_{i+1} - R_i - K\right] .$$

Supposons que l'inégalité (23) soit vérifiée. En choisissant $p_k$ dans l'intervalle ci-dessus, puisque par définition $\alpha_{1,p_k} > 0$ et $\alpha_{d-1,R_i} > 0$, on obtient d'après (21) que

$$\alpha_{d,R_i+p_k} > 0 .$$

En posant $R := R_i + p_k$, on obtient alors le résultat recherché.

Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer que l'inégalité (23) est bien vérifiée. Puisque $i$ appartient à $I_\varepsilon$, on sait que $R_{i+1} - R_i \geq \varepsilon C^{1-d} N^{1/d}$. Comme d'autre part $K \leq d \log N$, il nous suffit de montrer que

$$\varepsilon C^{1-d} N^{1/d} \geq d \log N + \log(4^d H(b-1)) ,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{N^{1/d}}{\log N} \geq \frac{C^{d-1}}{\varepsilon} \left(d + \frac{\log(4^d H(b-1))}{\log N}\right) .$$

D'après (4), $N$ est suffisamment grand pour que $\frac{\log(4^d H(b-1))}{\log N} \leq d$, et il suffit donc de montrer que

$$\frac{N^{1/d}}{\log N} \geq \frac{2C^{d-1}d}{\varepsilon} \cdot$$

D'après (5), on peut vérifier que

$$N \geq \left(\left(\frac{4C^{d-1}d^2}{\varepsilon}\right) \log^2 \left(\frac{4C^{d-1}d^2}{\varepsilon}\right)\right)^d$$

puisque $C \leq 1/(b-1)$. On en déduit alors aisément que

$$\frac{N^{1/d}}{\log N^{1/d}} \geq \frac{4C^{d-1}d^2}{\varepsilon}$$

et donc

$$\frac{N^{1/d}}{\log N} \geq \frac{4C^{d-1}d}{\varepsilon} \cdot \tag{24}$$

Cela montre que (23) est bien vérifiée et termine la démonstration du lemme. □

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le résultat suivant.

***Proposition 3.7***. — *Soit $R$ un entier vérifiant les conditions du lemme 3.5. Alors, on a $T(\alpha, R-1) > 0$.*

*Démonstration.* — Si $R$ vérifie les conditions du lemme 3.5, on a

$$\begin{aligned} T(\alpha, R-1) &= \sum_{k=1}^{d} A_k T_k(\alpha, R-1) \\ &= A_d \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{d,R-1+m}}{b^m} + \sum_{k=1}^{d-1} A_k \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,R'-1+m}}{b^m} \\ &\geq A_d b^{-1} - \sum_{k=1}^{d-1} |A_k| \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,R'-1+m}}{b^m} . \end{aligned}$$

D'après (22), on a $\alpha_{k,n} = 0$ pour tous les entiers $k$ et $n$ tels que $1 \leq k \leq d-1$ et $R_i < n < R_{i+1}$. Comme de plus $R_{i+1} - R \geq \lfloor d \log N \rfloor$, il vient :

$$\begin{aligned} T(\alpha, R-1) &\geq \frac{A_d}{b} - \sum_{k=1}^{d-1} |A_k| \sum_{m=R_{i+1}+1-R}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,R-1+m}}{b^m} \\ &\geq \frac{A_d}{b} - \frac{1}{b^{R_{i+1}-R}} \sum_{k=1}^{d-1} |A_k| \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,R_{i+1}-1+m}}{b^m} \\ &\geq \frac{A_d}{b} - \frac{b}{b^{d \log N}} \sum_{k=1}^{d-1} |A_k| T_k(\alpha, R_{i+1}-1) \\ &\geq \frac{A_d}{b} - \frac{b}{N^d} \sum_{k=1}^{d-1} |A_k| \frac{(N+k)^k (b-1)^k}{(k-1)!(N+1)} , \end{aligned}$$

où le passage de troisième à la quatrième ligne s'obtient en utilisant le lemme 3.2. Il nous reste donc à montrer que

$$\frac{b}{N^d} \sum_{k=1}^{d-1} |A_k| \frac{(N+k)^k (b-1)^k}{(k-1)!(N+1)} < \frac{A_d}{b} .$$

C'est en effet le cas car

$$\begin{aligned} \frac{b}{N^d} \sum_{k=1}^{d-1} |A_k| \frac{(N+k)^k (b-1)^k}{(k-1)!(N+1)} &\leq \frac{bH}{N^{(d+1)}} \sum_{k=0}^{d-1} (N+d-1)^k (b-1)^k \\ &= \frac{bH}{N^{(d+1)}} \frac{[(N+d-1)(b-1)]^d - 1}{[(N+d-1)(b-1)] - 1} \\ &\leq \frac{2H(b-1)^{d-1}}{N} \cdot \frac{b(N+d-1)^{d-1}}{N^d} \\ &\leq \frac{2H(b-1)^{d-1}}{N} . \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne dans les inégalités ci-dessus vient simplement du fait que $N > 2$, tandis que celui de la troisième à la quatrième ligne est assuré par l'inégalité (4). D'autre part, l'inégalité (4) garantit également que

$$\frac{2H(b-1)^{d-1}}{N} < \frac{1}{b} ,$$

ce qui permet de conclure. □

**3.5. Minoration.** — Dans cette partie, nous allons minorer la somme $S(\alpha, N)$. Plus précisément, nous allons montrer le résultat suivant.

***Proposition 3.8.*** — *On a*

$$S(\alpha, N) > \frac{1-\varepsilon}{d} N\,.$$

Nous montrons dans un premier temps le résultat auxiliaire suivant.

***Lemme 3.9.*** — *Soient $r_0$ et $r_1$ deux entiers tels que $r_0 < r_1$, $\alpha_{d-1,r} = 0$ pour tout $r$ appartenant à $[r_0, r_1]$, et $T(\alpha, r_1) > 0$. Alors, on a*

$$T(\alpha, r) > 0, \quad \forall r \in [r_0, r_1]\,.$$

*Démonstration.* — Soit $r \in [r_0, r_1]$. Puisque par hypothèse $\alpha_{k,r} = 0$ si $k < d$, on obtient :

$$\begin{aligned} T(\alpha, r) &= \sum_{k=1}^{d} A_k \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,r+m}}{b^m} \\ &= \sum_{k=1}^{d} bA_k \left( \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,r-1+m}}{b^m} - \frac{\alpha_{k,r}}{b} \right) \\ &= bT(\alpha, r-1) - A_d \alpha_{d,r}\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$T(\alpha, r-1) = \frac{1}{b}(T(\alpha, r) + A_d \alpha_{d,r})\,.$$

Ainsi, $T(\alpha, r-1) > 0$ puisque par hypothèse $T(\alpha, r) > 0$. L'itération de ce procédé permet de conclure. □

*Démonstration de la proposition 3.8.* — D'après la proposition 3.7, on peut appliquer le lemme 3.9 avec $r_0 = R_i$ et $r_1 = R - 1$. On obtient ainsi que $T(\alpha, r) \neq 0$ pour tout $r \in [R_i, R - 1]$. Donc, dans chaque intervalle $[R_i, R_{i+1}]$ tel que $i$ appartient à $I_\varepsilon$, on a au moins

$$\left\lfloor \frac{R_{i+1} - R_i - K - \log(4^d H(b-1))}{d} \right\rfloor$$

entiers $r$ tels que $T(\alpha, r) \neq 0$. Rappelons d'autre part que les nombres $T(\alpha, r)$ sont des entiers et donc que

$$T(\alpha, r) \neq 0 \implies |T(\alpha, r)| \geq 1\,.$$

Ainsi, en utilisant le lemme 3.4 et l'inégalité (20), il vient :

$$\begin{aligned} S(\alpha, N) = \sum_{R=1}^{N-K} |T(\alpha, R)| &> \sum_{i \in I_\varepsilon} \left( \frac{R_{i+1} - R_i - K - \log(4^d H(b-1))}{d} - 1 \right) \\ &\geq \sum_{i \in I_\varepsilon} \frac{R_{i+1} - R_i}{d} - \sum_{i \in I_\varepsilon} \frac{d \log N + \log(4^d H(b-1)) + d}{d} \\ &\geq \frac{1 - \varepsilon/2}{d} N - C^{d-1} N^{1-1/d} \left( \log N + \frac{\log(4^d H(b-1)) + d}{d} \right)\,. \end{aligned}$$

On peut facilement déduire de (4) que

$$\frac{\log(4^{d-1} H(b-1)) + d}{d \log N} \leq 1$$

et donc

$$S(\alpha, N) \geq N\left(\frac{1-\varepsilon/2}{d} - 2C^{d-1}\frac{\log N}{N^{1/d}}\right).$$

D'autre part, d'après (24), on a

$$\frac{\log N}{N^{1/d}} < \frac{\varepsilon}{4dC^{d-1}},$$

ce qui implique que

$$S(\alpha, N) > \frac{1-\varepsilon}{d}N,$$

comme souhaité. □

**3.6. Contradiction.** — Nous somme à présent en mesure de conclure la démonstration du théorème.

*Démonstration du théorème 2.1.* — D'après les propositions 3.1 et 3.8, on a

$$\frac{1-\varepsilon}{d} < C^d(A_d+1)(b-1)^d,$$

c'est-à-dire

$$C > \frac{1}{b-1}\left(\frac{1-\varepsilon}{d(A_d+1)}\right)^{1/d},$$

ce qui contredit la définition de $C$. □

## 4. Une mesure de transcendance de séries lacunaires

Comme nous l'avons déjà noté dans l'introduction, il découle immédiatement du théorème BBCP que certains nombres binaires lacunaires comme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{\lfloor n^{\log\log n}\rfloor}}$$

sont transcendants, alors qu'aucune démonstration de ce résultat n'était connue auparavant. La version effective que nous en avons donnée permet d'aller un peu plus loin en obtenant une mesure de transcendance pour ces nombres. Plus précisément, on déduit aisément du théorème 2.1 le résultat suivant.

***Théorème 4.1.*** — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante telle que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ et telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait*

$$f^{-1}(x) = o(x^{\varepsilon}).$$

*Alors, pour tout entier $b \geq 2$, le nombre réel*

$$\alpha := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{b^{f(n)}}$$

*est transcendant. En outre, si $d \geq 2$ est un entier, alors pour tout nombre algébrique $\beta$ de degré $d$ et de hauteur $H$ suffisamment grande, on a :*

$$|\alpha - \beta| \geq \frac{1}{b^{f(H)}}. \tag{25}$$

La transcendance de $\alpha$ dans le cas où $b = 2$ correspond au Theorem 8.1 de [**BBCP04**]. La mesure de transcendance obtenue en (25) est bien sûr peu satisfaisante. En particulier, lorsque la suite $f(n)$ a une croissance au moins exponentielle, c'est-à-dire si

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} > 1\,,$$

une mesure de transcendance bien plus fine est donnée dans [**AB11**]. Toutefois, lorsque $f(n)$ a une croissance sous-exponentielle, comme c'est le cas pour $f(n) = \lfloor n^{\log\log n} \rfloor$, il semble qu'aucune autre mesure de transcendance ne soit connue.

Le théorème 4.1 laisse de côté l'approximation du nombre $\alpha$ par des nombres rationnels, mais ce dernier cas peut se traiter indépendamment et de façon un peu plus satisfaisante à l'aide d'une méthode à la fois élémentaire et classique fondée sur l'utilisation d'inégalités triangulaires (voir par exemple [**AB11**]). En particulier, avec les notations du théorème 4.1, si $f$ est une fonction à croissance sous-exponentielle dont la dérivée logarithmique est grande devant $1/x$ à l'infini, ce qui est le cas de la fonction $f(x) = x^{\lfloor \log\log x \rfloor}$, on obtient que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\log q}}\,,$$

pour tout nombre rationnel $p/q$ dont le dénominateur est suffisamment grand.

*Démonstration du théorème 4.1.* — Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $f(1) = 0$, c'est-à-dire que $\alpha \in [1, 2]$. Nous allons utiliser le théorème 2.1 avec $\varepsilon = 1/2$, de sorte que la constante $C$ intervenant dans ce théorème satisfasse à la condition

$$C \geq \frac{1}{b-1} \left( \frac{1}{2d(H+1)} \right)^{1/d}.$$

Soit $\beta \in [1, 2]$ un nombre algébrique de degré $d \geq 2$ et de hauteur $H$. Puisque $f$ croît plus vite que tout polynôme, nous pouvons supposer que l'entier $H$ est suffisamment grand pour que :

(i) la condition (4) soit plus restrictive que la condition (5) ;

(ii) $f(H) > d(4(b-1)H)^{d+1}$ ;

(iii) $f(H) > (H/C)^d$.

D'après (i) et (ii), on peut appliquer le théorème 2.1 à $\beta$ avec $N = f(H)$. On obtient ainsi

$$\mathcal{P}(\beta, b, f(H)) \geq C f(H)^{1/d}\,.$$

En outre, (iii) assure que

$$\mathcal{P}(\beta, b, f(H)) > H\,.$$

D'autre part, la définition de $\alpha$ implique que

$$\mathcal{P}(\alpha, b, f(H)) = H\,.$$

On en déduit l'existence d'un entier $r$, $1 \leq r < f(H)$, tel que les $r$-ièmes chiffres du développement en base $b$ de $\alpha$ et $\beta$ diffèrent. Un rapide calcul permet alors de montrer que

$$|\alpha - \beta| > \frac{1}{b^{f(H)}}\,,$$

comme souhaité. □

## Références

[Ad10] B. Adamczewski, On the expansion of some exponential periods in an integer base, *Math. Ann.* **346** (2010), 107–116.

[AB07] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases, *Annals of Math.* **165** (2007), 547–565.

[AB11] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, Nombres réels de complexité sous-linéaire : mesures d'irrationalité et de transcendance, *J. reine angew. Math*, à paraître.

[ABL04] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, F. Luca, Sur la complexité des nombres algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **339** (2004), 11–14.

[BBCP04] D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall, C. Pomerance, On the binary expansions of algebraic numbers, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16** (2004), 487–518.

[Bu04] Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics **160**, Cambridge University Press, 2004.

[Kn91] M. J. Knight, An "oceans of zeros" proof that a certain non-Liouville number is transcendental, *Amer. Math. Monthly* **98** (1991), 947–949.

[Ma84] K. Mahler, Some suggestions for further research, *Bull. Austral. Math. Soc.* 29 (1984), 101–108.

[Rid57] D. Ridout, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **4** (1957), 125–131.

[Ri08] T. Rivoal, On the bits counting function of real numbers, *J. Aust. Math. Soc.* **85** (2008), 95–111.

[Ro55] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 1–20 ; corrigendum, 169.

---

B. Adamczewski, CNRS, Université de Lyon, Université Lyon 1, Institut Camille Jordan, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex France
*E-mail :* `Boris.Adamczewski@math.univ-lyon1.fr`

C. Faverjon, École Normale Supérieur de Lyon, 15 parvis René Descartes, BP 7000 69342 Lyon Cedex 07 France • *E-mail :* `colin.faverjon@ens-lyon.fr`