

Stratégies mixtes en théorie des jeux

Supervisé par Filippo Santambrogio

Table des matières

1	Introduction	2
2	Équilibre de Nash	3
2.1	Jeux à n joueurs	3
2.2	Jeux en stratégies mixtes	3
3	Applications	5
3.1	Pierre-feuille-ciseaux	5
3.2	Généralisation à n objets	6
3.2.1	Jeu cyclique	6
3.2.2	Jeu décomposable en blocs cycliques	7
3.2.3	Le cas général	9
4	Mise en œuvre théorique	12
4.1	Un peu de combinatoire	12
4.2	Théorème du point fixe de Brouwer	13
4.3	Théorème du point fixe de Kakutani	14

1 Introduction

La théorie des jeux étudie des situations où plusieurs agents prennent des décisions en même temps. Chaque joueur cherche à choisir la meilleure stratégie possible en tenant compte des choix des autres. Parmi les notions importantes de cette théorie, l'équilibre de Nash occupe une place centrale : il correspond à une situation stable où aucun joueur n'a intérêt à changer seul de stratégie.

Dans ce travail, nous nous intéressons plus particulièrement aux équilibres en stratégies mixtes dans des jeux de type *pierre-feuille-ciseaux* généralisés à un nombre arbitraire d'objets. L'étude de ces jeux met en évidence des phénomènes de symétrie et de structure cyclique, ce qui rend les stratégies mixtes nécessaires pour comprendre le comportement optimal des joueurs.

Afin de replacer ces résultats dans un cadre théorique plus général, nous démontrons également le théorème du point fixe de Kakutani, un outil essentiel pour établir le théorème d'existence des équilibres de Nash dans les jeux finis. Cette approche met en évidence le lien entre la théorie des jeux et des domaines tels que l'analyse convexe et la topologie, tout en donnant une interprétation plus profonde des résultats obtenus dans les exemples étudiés.

"Et les fruits passeront la promesse des fleurs."
— François de Malherbe

2 Équilibre de Nash

2.1. Jeux à n joueurs

Définition. Un jeu à N joueur est la donnée d'un triplet $\Gamma := (N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$ où

- (i) A^i est l'ensemble d'actions du joueur i .
- (ii) $g^i : \prod_{j \in N} A^j \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de paiement de joueur i .

On pose $A := \prod_{j \in N} A^j$ l'ensemble des actions jointes et on notera $a = (a^1, \dots, a^N)$ un profil d'actions (i.e un élément de A). Enfin a^{-i} est le $n - 1$ -uplet privé de a^i c'est à dire $(a^1, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^N)$.

Définition. Un équilibre de Nash en stratégie pure est un profil d'actions $a \in A$ tel que pour tout joueur i , l'action a^i soit une meilleur réponse au profil a^{-i} . En termes mathématiques,

$$\forall i, \forall b^i \in A^i, g^i(a^i, a^{-i}) \geq g(b^i, a^{-i}).$$

Ainsi a est un équilibre de Nash si chaque joueur est content de son action à posteriori.

2.2. Jeux en stratégies mixtes

Nous permettons désormais aux joueurs de choisir leur action de manière aléatoire. Pour cela, il faut définir un nouveau modèle.

Définition. Soit $\Gamma := (N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$ un jeu. Pour tout i on suppose A^i fini et on note $X^i := \Delta(A^i)$ l'ensemble des probabilités sur A^i . On écrit un élément X^i comme $x^i = \sum_{a^i \in A^i} x^i(a^i) a^i$ et on étend multilinéairement chaque g^i :

$$g^i(x^1, \dots, x^N) = \sum_{a \in A} x^1(a^1) \cdots x^N(a^N) g^i(a^1, \dots, a^N).$$

On note $X = \prod X^i$ l'ensemble des profils de stratégies mixtes et X^{-i} l'ensemble des profils de stratégies mixtes des joueurs autres que i .

Définition. Un équilibre de Nash en stratégies mixtes de Γ et un équilibre de Nash en stratégie pure de $\Gamma_\Delta := (N, (X_i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$.

Définition. Pour tout jeu Γ et pour tout joueur $i \in N$. On définit la correspondance de meilleure réponse du joueur i (en stratégies mixtes) $BR^i : X^{-i} \rightrightarrows X^i$ par

$$BR^i(x^{-i}) = \left\{ y^i \in X^i \mid g^i(y^i, x^{-i}) = \max_{z^i \in X^i} g^i(z^i, x^{-i}) \right\}.$$

Théorème (Nash). *Tout jeu fini admet un équilibre en stratégies mixtes.*

Preuve. Soit X l'ensemble des profils de stratégies mixtes. On introduit la correspondance de meilleure réponse $BR : X \rightrightarrows X$ définie par

$$BR(x) = \{y \in X \mid \forall i \in N, y^i \in BR^i(x^{-i})\} = \prod_{i \in N} BR^i(x^{-i}).$$

$BR(x)$ est l'ensemble des profils y tels que pour chaque joueur i , la composante y^i constitue une meilleure réponse à x^{-i} .

Un point fixe de BR est donc un profil x vérifiant, pour tout joueur i , que x^i est une meilleure réponse à x^{-i} . Autrement dit, un tel profil correspond exactement à un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Il suffit donc de montrer que la correspondance BR vérifie les hypothèses du théorème de Kakutani ¹.

1. Cf théorème 3.3

3 Applications

3.1. Pierre-feuille-ciseaux

Illustrons désormais la théorie générale des équilibres de Nash sur un exemple classique : le jeu *Pierre-Feuille-Ciseaux*. Ce jeu constitue l'exemple paradigmatique d'un équilibre en stratégies mixtes.

Définition. Le jeu *Pierre-Feuille-Ciseaux* est un jeu à deux joueurs défini par :

$$A^1 = A^2 = \{P, F, C\},$$

où P désigne la pierre, F la feuille et C les ciseaux. Les règles sont les suivantes :

- la pierre bat les ciseaux ;
- les ciseaux battent la feuille ;
- la feuille bat la pierre ;
- deux actions identiques donnent une égalité.

On définit la fonction de gain du joueur 1 par $g^1(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ bat } b, \\ 0 & \text{si } a = b, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$ Le jeu est à

somme nulle, ainsi $g^2(a, b) = -g^1(a, b)$.

Le tableau des gains du joueur 1 est donc donné par

	P	F	C
P	0	-1	1
F	1	0	-1
C	-1	1	0

Proposition. *Le jeu Pierre-Feuille-Ciseaux ne possède aucun équilibre de Nash en stratégies pures.*

Preuve. Supposons qu'un profil (a, b) soit un équilibre de Nash.

- Si $a = b$, alors chacun obtient le gain 0. Mais chaque joueur peut changer d'action afin de battre l'autre et obtenir le gain 1.
- Si $a \neq b$, alors l'un des deux joueurs perd et peut changer d'action afin de ne plus perdre.

Dans tous les cas, un des joueurs possède une déviation profitable, ce qui contredit la définition d'un équilibre de Nash.

Proposition. *Le jeu Pierre-Feuille-Ciseaux possède un unique équilibre de Nash en stratégies mixtes donné par*

$$x^* = y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Preuve. Soit $x = (p, f, c)$ une stratégie mixte du joueur 1 et $y = (q_1, q_2, q_3)$ une stratégie mixte du joueur 2. Le gain espéré du joueur 1 vaut

$$g(p, f, c) = p(q_3 - q_2) + f(q_1 - q_3) + c(q_2 - q_1).$$

À l'équilibre de Nash, la stratégie x doit maximiser le gain du joueur 1 sous les contraintes $p + f + c = 1$. et $p, f, c \geq 0$. Si $pfc \neq 0$ d'après le théorème des extréma liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} q_3 - q_2 - \lambda = 0, \\ q_1 - q_3 - \lambda = 0, \\ q_2 - q_1 - \lambda = 0. \end{cases}$$

On obtient donc $q_3 - q_2 = q_1 - q_3 = q_2 - q_1$, en additionnant les trois égalités, on en déduit que $q_1 = q_2 = q_3$ puis la condition $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ impose $q_1 = q_2 = q_3 = \frac{1}{3}$. Les joueurs 1 et 2 ayant des rôles symétriques, on obtient directement $p = f = c = \frac{1}{3}$. Réciproquement le triplet $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est bien un maximum local de g (qui est la fonction nulle). Désormais supposons que parmi p, f, c un seul est nul, disons $p = 0$ alors les extréma liés donnent $2q_1 = q_2 + q_3 = 1 - q_1$ donc $q_1 = \frac{1}{3}$. On a $q_1 q_2 q_3 = 0$ sinon on obtiendrait $p = \frac{1}{3} \neq 0$; si $q_2 = 0$ alors $q_3 = \frac{2}{3}$ et $g(p, f, c) < g(f, p, c)$, absurde. Ainsi $q_3 = 0$ et $q_2 = \frac{2}{3}$ mais alors, $g(p, f, c) < g(0, 0, 1)$, absurde. Enfin le cas où deux des trois paramètres sont nuls est trivialement impossible; il vient alors qu'il existe un unique équilibre de Nash et que ce dernier est donné par

$$x^* = y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

3.2. Généralisation à n objets

3.2.1 Jeu cyclique

Définition. Soit $n \geq 3$. Un jeu cyclique à n objets est un jeu à deux joueurs défini par :

$$A^1 = A^2 = \{1, \dots, n\}.$$

Chaque action bat exactement les $\frac{n-1}{2}$ actions suivantes modulo n lorsque n est impair. Plus précisément, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$g^1(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j - i \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\} \pmod{n}, \\ 0 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cas $n = 3$ correspond exactement à *Pierre-Feuille-Ciseaux*.

Proposition. *Lorsque n est impair, le jeu possède un unique équilibre de Nash en stratégies mixtes donné par*

$$x^* = y^* = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

Preuve. Notons A la matrice de la fonction de gain (où la coordonnée i, j est donnée par $g(i, j)$) ; on se donne x et y deux stratégies mixtes qui réalisent un équilibre de Nash. Le gain du joueur 2 est donné par $y^T Ax$ et celui du joueur 1 est l'opposé de cette quantité. On a d'office $y^T Ax = 0$ puisque $y^T Ax \geq y^T Ay = 0$ et $-y^T Ax \geq -x^T Ax = 0$.

Ensuite, y possède des coordonnées non nulles exactement où les coordonnées de Ax sont maximales, d'où

$$0 = y^T Ax = \sum_{i=1}^n y_i^T (Ax)_i = \max_{1 \leq i \leq n} (Ax)_i \sum_{i=1}^n x_i = \max_{1 \leq i \leq n} (Ax)_i$$

Ainsi, le vecteur Ax ne possède que des coordonnées négatives, ceci entraîne

$$\begin{aligned} x_i + \dots + x_{i+\frac{n-3}{2}} &\geq x_{i+\frac{n-1}{2}} + \dots + x_{i+n-2} \\ &\geq x_{i-1} + \dots + x_{i+\frac{n-5}{2}} \\ &\geq x_{i+\frac{n-3}{2}} + \dots + x_{i-3} \\ &\geq x_{i-2} + \dots + x_{i+\frac{n-7}{2}} \end{aligned}$$

pour tout i , en prenant les indices modulo n ; en particulier $x_i \geq x_{i+2}$ et $x_i \geq x_{i+3}$. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on peut trouver deux entiers a et b tels que $2a + 3b = 1 \pmod{n}$, quitte à remplacer a, b par $a + kn, b + kn$ on peut les supposer positifs, on a alors, en utilisant les deux inégalités précédentes, $x_i \geq x_{i+2a+3b} = x_{i+1}$ pour tout i . Il en résulte que les x_i sont tous égaux ; puis par symétrie on obtient la même chose pour les y_i , ces vecteurs étant de somme 1, on obtient :

$$x = y = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

Réciproquement $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in \ker(A)$ donc x et y forment bien un équilibre en stratégie mixte.

3.2.2 Jeu décomposable en blocs cycliques

Cette fois-ci, on ne suppose plus le jeu cyclique mais on demande que chaque objet gagne et perd contre exactement $\frac{n-1}{2}$ objets, cette hypothèse entraîne bien évidemment n impair. De plus, on suppose n non premier, on écrit $n = pq$ et on suppose que l'on peut écrire le jeu sous la forme suivante :

On peut ranger les pq objets en q groupes de p objets formant tous un jeu cyclique, de

plus si on regarde le jeu où les nouveaux objets sont les groupes de p objets, alors ce jeu est cyclique. En d'autres termes, la matrice du jeu est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} C & J & J & \cdots & -J \\ -J & C & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & J \\ -J & -J & \cdots & J & C \end{pmatrix}$$

où $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice de jeu cyclique et $J = [1]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$.

On se donne $x = (x_1(1), \dots, x_1(p), x_2(1), \dots, x_2(p), \dots, x_q(1), \dots, x_q(p))$ et $y = (y_1(1), \dots, y_1(p), y_2(1), \dots, y_2(p), \dots, y_q(1), \dots, y_q(p))$ deux stratégies en équilibre mixte.

Proposition. Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, s'il existe $\ell_1, \ell_2 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tels que $x_j(\ell_1), y_j(\ell_2) > 0$ alors $X = \frac{1}{\sum_i x_j(i)}(x_j(1), \dots, x_j(p))$ et $Y = \frac{1}{\sum_i y_j(i)}(y_j(1), \dots, y_j(p))$ sont deux stratégies en équilibre mixte pour le jeu $A_p := [A]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Preuve. Donnons nous un tel j , si $Y_i > 0$ on doit vérifier que $(A_p X)_i = \max_{1 \leq k \leq p} (A_p X)_k$ est maximal. Dans ce cas, on a $y_j(i) > 0$ et alors $(Ax)_{j(i)} = \max_{(a,b) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} (Ax)_{a(b)}$, or pour $1 \leq k \leq p$ on a $(Ax)_{j(k)} = (A_p X)_k + S$ avec S une constante qui ne dépend que de j , en particulier si $(Ax)_{j(i)}$ est maximal sur $\llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ il l'est aussi sur $\llbracket 1, p \rrbracket$ d'où la conclusion.

Le raisonnement est analogue pour montrer que si $X_i > 0$ alors $(Y^T A_p)_i$ est minimal. Ceci achève la preuve.

Corollaire. Dans ce cas, on a donc $X = Y = \left(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right)$.

Remarque. Supposons l'existence de j tel que $x_j(i) = 0$ pour tout i et par exemple $y_j(1) > 0$. L'équilibre reste inchangé si l'on remplace $(y_j(1), \dots, y_j(p))$ par $\left(\frac{\sum_i y_j(i)}{p}, \dots, \frac{\sum_i y_j(i)}{p}\right)$. Faisons le donc en vu d'énoncer la prochaine proposition.

Proposition. Notons A_q la matrice du jeu où les nouveaux objets sont les q groupes de p objets. Les vecteurs $X = \left(\sum_j x_1(j), \dots, \sum_j x_q(j)\right)$ et $Y = \left(\sum_j y_1(j), \dots, \sum_j y_q(j)\right)$ sont deux stratégies en équilibre mixte pour le jeu A_q .

Preuve. La proposition précédente établie, il n'est pas difficile d'observer que si $\sum_j y_i(j)$ est strictement positif, alors $(A_q X)_i$ est maximal. D'où la conclusion.

Théorème. *L'équilibre de Nash est unique et est donné par $x = y = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.*

Preuve. Cela découle immédiatement des deux propositions.

Remarque. Il serait utile de savoir si les deux types de jeux que l'on vient de voir sont bien distincts. Autrement, on a travaillé pour rien.

Proposition. *Soit $n = pq$ où p et q sont deux entiers impairs strictement positifs. Considérons A la matrice du jeu cyclique et B la matrice qui se décompose en un p -cycle de q -cycle. Alors A et B représentent deux graphes distincts.*

Preuve. Supposons le contraire, on peut se donner un ensemble X de sommets de G_A tel que $1 < |X| < V(G_A)$ et ayant la propriété suivante : si $x \notin X$ alors $A_{x,j} = 1$ pour tout $j \in X$ ou $A_{x,j} = -1$ pour tout $j \in X$.

Si $x \notin X$ alors $X \subset \{x+1, \dots, x+\frac{n-1}{2}\}$ où $X \subset \{x-1, \dots, x-\frac{n-1}{2}\}$ en regardant modulo n . On se place par exemple dans le premier cas, on a alors $x-1 \notin X$. L'intersection de $\{x+1, \dots, x+\frac{n-1}{2}\}$ et de $\{x-2, \dots, x-\frac{n+1}{2}\}$ est de cardinal 1 ; et puisque $|X| > 1$ on en déduit $X \subset \{x+1, \dots, x+\frac{n-3}{2}\}$. On continue le procédé jusqu'à obtenir $X \subset \{x+1\}$, c'est absurde.

Proposition. (i) *Si n est premier égal à 5 alors il existe un unique jeu équilibré, c'est le jeu cyclique.*

(ii) *Si n est premier supérieur à 7, ce n'est plus le cas.*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ un jeu équilibré. Quitte à échanger des objets on peut supposer que $L_1 = (0, 1, 1, -1, -1)$. L'antisymétrie impose $L_2 = (-1, 0, a, b, c)$; si $c = -1$ c'est bon, si $b = -1$ on peut échanger les objets 4 et 5 et cela ne change rien à la première ligne. On est donc ramené au cas $L_2 = (-1, 0, -1, 1, 1)$ et alors on peut échanger l'objet 2 et l'objet 3 pour imposer à la matrice d'avoir $L_3 = (-1, -1, 0, 1, 1)$. Enfin, antisymétrie de A impose toutes les autres valeurs et on obtient bien un jeu cyclique.

En revanche si $n \geq 7$, en notant $x_1, \dots, x_n$ les objets, on peut demander à x_1, x_2, x_3 de réaliser un 3-cycle, ce qui empêche le jeu d'être cyclique.

3.2.3 Le cas général

Plus généralement, un jeu à n objets est défini par une matrice A antisymétrique avec des -1 et des 1 en dehors de la diagonale principale. Sous les mêmes notations que le cas précédent, si x et y sont deux stratégies qui réalisent un équilibre de Nash, on a

$$0 = y^T A x = \sum_{i=1}^n y_i^T (A x)_i$$

Or, chaque terme de cette somme est négatif : tous les termes sont nuls. En particulier on peut remarquer que si x est à coordonnées strictement positives, alors y est dans le noyau de A ; sinon alors on peut assurer qu'un des objets sera choisi avec une probabilité de 0 par le joueur 1. Il semble alors intéressant de regarder à quoi ressemble le noyau d'une telle matrice.

Proposition. *Si n est pair alors $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et si n est impair, $\dim(\ker(A)) = 1$.*

Preuve. Plaçons nous dans le corps $\mathbb{F}_2$ à 2 éléments. Il est clair que $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$; dès lors

$$\begin{aligned} \det(\overline{A}) &= \det(J - I_n) \\ &= \prod_{\lambda \in \text{Sp}(J - I_n)} \lambda \\ &= \prod_{\lambda \in \text{Sp}(J)} (\lambda - 1) \\ &= (n - 1)(-1)^{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi ce déterminant est non nul lorsque n est pair. Si n est impair, en considérant la sous matrice extraite en ayant retiré la n -ième ligne et la n -ième on en déduit, de ce que l'on vient de montrer, qu'elle est inversible. Ceci prouve que $\dim(\ker(A)) \leq 1$; puis A est antisymétrique donc $\det(A) = \det(A^T) = (-1)^n \det(A)$ entraînant $\det(A) = 0$ d'où l'inégalité dans l'autre sens.

On peut aussi procéder ainsi : on constate que dans $\mathbb{F}_2$ on a, $\overline{A}^2 = \overline{A} \cdot \overline{A} = (n - 2)I_n + (n - 1)A = I_n$ lorsque n est pair. Ceci donne l'inversibilité de $\overline{A}$ et à fortiori $\det(A) \neq 0$ car impair.

Corollaire. *Soit x et y deux stratégies qui réalisent l'équilibre.*

- (i) *Si n est impair et qu'aucun objet n'est choisi avec une probabilité de 0, on a $x = y$.*
- (ii) *Si n est pair il existe $1 \leq i \leq j \leq n$ tel que $x_i = y_j = 0$. Autrement dit, les joueurs délaissent au moins un objet.*

Preuve. On prouve seulement le premier point ; dans ce cas, x et y appartiennent au noyau de A , ce dernier étant de dimension 1 : les deux vecteurs sont proportionnels. Soit λ ce facteur de proportionnalité,

$$1 = \sum_{i=1}^n x_i = \lambda \sum_{i=1}^n y_i = \lambda$$

d'où le résultat.

Remarque. Si tous les objets sont choisis avec une probabilité non nulle, cela n'assure pas que toutes les coordonnées soient égales. Par exemple, le vecteur $(3, 1, 1, 1, 3)$ est

dans le noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Mise en œuvre théorique

4.1. Un peu de combinatoire

Dans cette partie, nous démontrons un résultat essentiel pour la preuve des théorèmes de points fixes.

Définition. Si $\mathcal{K}$ est un n -simplexe défini par l'enveloppe convexe de $p_1, \dots, p_{n+1}$, on appelle frontière de $\mathcal{K}$, notée $\partial\mathcal{K}$ l'ensemble $\bigcup_{j=1}^{n+1} \text{Conv}(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_{n+1})$. Cette définition correspond à l'approche intuitive que l'on a de la frontière. Par exemple en dimension 2 la frontière d'un triangle est l'ensemble de ses 3 côtés. En dimension 3 la frontière d'un tétraèdre est l'ensemble de ses faces. On définit également l'intérieur de $\mathcal{K}$ noté $\text{Int}(\mathcal{K})$ par $\text{Int}(\mathcal{K}) := \mathcal{K} \setminus \partial\mathcal{K}$.

Définition. Une triangularisation $\mathcal{T}$ d'un n -simplexe $\mathcal{K}$ est une partition de $\mathcal{K}$ en n -simplexes.

Proposition. Soit $\mathcal{K}$ un n -simplexe et $\mathcal{T}$ une triangularisation de $\mathcal{K}$. Tout $n-1$ -simplexe de $\text{Int}(\mathcal{K})$ est face d'exactly deux n -simplexes de $\mathcal{T}$.

Lemme (Sperner). Soit $\mathcal{K}$ un n -simplexe et $\mathcal{T}$ une triangularisation de ce dernier. On note S l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$. Si $f : S \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$ est un coloriage vérifiant :

1. Les sommets de $\mathcal{K}$ sont colorés de couleurs distinctes
2. Les sommets de $\mathcal{T}$ situés sur une face de $\mathcal{K}$ de dimension k sont coloriés uniquement avec les $k+1$ couleurs des sommets de la face.

Alors il existe un nombre impair de simplexes $\mathcal{T}$, dont les sommets sont coloriés avec les $n+1$ couleurs.

Preuve. On prouve le résultat par récurrence sur n . On donne un exemple de dessin dans le cas $n = 1$.



Puisque les deux extrémités sont deux couleurs différentes, lorsqu'on regarde les points de gauche à droite, on va avoir un nombre impair de changements de couleur. Et chaque changement de couleur donne naissance à un $(1, 2)$ -simplexe, il y en a donc un nombre impair, cela achève l'initialisation.

Prenons désormais n supérieur à 2 et supposons le résultat au rang $n-1$. Pour $\delta \in \mathcal{T}$ notons $F(\delta)$ le nombre de $(1, \dots, n)$ -simplexes sur les $n+1$ faces de δ . Calculons la somme $\sum_{\delta \in \mathcal{T}} F(\delta)$ de deux manières différentes. D'un côté,

$$\sum_{\delta \in \mathcal{T}} F(\delta) = \text{Card}\{(1, \dots, n+1) - \text{simplexes}\} + 2 \sum_{j=1}^n \text{Card}\{(1, \dots, n, j) - \text{simplexes}\}$$

De l'autre, on va distinguer les simplexes de la frontière et ceux de l'intérieur. Par la proposition précédente, il vient

$$\sum_{\delta \in \mathcal{T}} F(\delta) = \text{Card}\{(1, \dots, n)\text{-simplexes} \in \partial\mathcal{K}\} + 2 \times \text{Card}\{(1, \dots, n)\text{-simplexes} \in \text{Int}(\mathcal{K})\}$$

Seulement une face de $\partial\mathcal{K}$ peut contenir un $(1, \dots, n)$ -simplexe, or cette face hérite des hypothèses du coloriage de Sperner, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : elle en contient un nombre impair. Tout compte fait, $\text{Card}\{(1, \dots, n+1)\text{-simplexes}\} \equiv 1 \pmod{2}$ cela conclut.

4.2. Théorème du point fixe de Brouwer

Dans cette partie, nous allons démontrer ce premier théorème de point fixe donc l'énoncé est le suivant :

Théorème. *Soit $\mathcal{C}$ un compact d'intérieur non vide d'un espace euclidien E . Il n'y existe pas de rétraction de $\mathcal{C}$ sur $\partial\mathcal{C}$.*

Preuve. Montrons dans un premier temps le résultat pour le n -simplexe $\mathcal{K}$ formé de l'enveloppe convexe des points $(0, e_1, \dots, e_n)$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec le 1 en i -ième position. On donne $n+1$ couleurs distinctes aux $n+1$ sommets de $\mathcal{K}$. Soit $g : \mathcal{K} \rightarrow \partial\mathcal{K}$ une rétraction. Considérons une triangulation $\mathcal{T}_m$. On colorie chaque sommet v de $\mathcal{T}$ de la couleur du sommet le plus proche du bord auquel $g(v)$ appartient, en cas d'équidistance on choisit arbitrairement. C'est un coloriage de Sperner, il existe alors D_m un n -simplexe de $\mathcal{T}_m$ dont les sommets sont de couleurs deux à deux distinctes. Sous les mêmes notations, on considère (T_m) une suite de triangulation de plus en plus fine, par exemple on demande que chaque simplexe soit contenue dans une boule de rayon 2^{-m} . On considère la suite $y_m := (x_1(m), x_2(m), \dots, x_{n+1}(m))$ des sommets de D_m . Cette suite vit dans un compact, on peut supposer qu'elle converge vers $(x_1, \dots, x_{n+1})$. Mais comme D_m est contenue dans une boule de rayon 2^{-m} cela impose $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1}$. Ensuite, par continuité de g , on a $g(x_i(m)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} g(x_i) = g(x_1)$ et le point $g(x_1)$ est à équidistance des sommets $0, e_1, \dots, e_n$. Disons qu'il appartient à la face formée des sommets $(e_1, \dots, e_n)$, on a alors $g(x_1) = \frac{e_1 + \dots + e_n}{n}$. Mais $\|g(x_1) - 0\|^2 = \frac{1}{n}$ tandis que $\|g(x_1) - e_1\|^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \neq \frac{1}{n}$ d'où l'absurdité.

On peut revenir au cas général, quitte à traduire et élargir le simplexe $\mathcal{K}$, on peut supposer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$. Supposons avoir f une rétraction de $\mathcal{C}$ sur $\partial\mathcal{C}$; prolongeons f en une fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathcal{K}$ tout entier en posant $\hat{f}(x) = x$ si $x \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{C}$. Cette fonction est continue puisque $f_{\partial\mathcal{C}} = \text{Id}_{\partial\mathcal{C}}$. Enfin, soit x un point intérieur à $\mathcal{C}$, il est clair qu'il existe une rétraction h de $\mathcal{K} \setminus \{x\}$ sur $\partial\mathcal{K}$, il suffit d'envoyer chaque point y sur l'intersection de la droite (x, y) avec $\partial\mathcal{K}$. Mais alors $h \circ \hat{f}$ est une rétraction de $\mathcal{K}$ sur $\partial\mathcal{K}$, absurde.

Théorème (Brouwer). *Soit E un espace euclidien et $\mathcal{C}$ un compact convexe d'intérieur non vide² de E . Toute application continue $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ admet un point fixe.*

Preuve. Supposons par l'absurde disposer d'une telle fonction f , sans point fixe. Pour $x \in \mathcal{C}$ on pose $T_x :=$ l'unique $t \geq 1$ tel que $f(x) + t(x - f(x)) \in \partial\mathcal{C}$, c'est la convexité couplée au caractère borné de $\mathcal{C}$ qui nous donne l'unique existence. Montrons que $r : x \mapsto f(x) + T_x(x - f(x))$ est une rétraction de $\mathcal{C}$ sur $\partial\mathcal{C}$, tout d'abord pour tout $x \in \mathcal{C}$ on a bien, par définition, $r(x) \in \partial\mathcal{C}$ et r laisse invariante $\partial\mathcal{C}$. Il reste à vérifier la continuité de r , soit donc (x_n) une suite de $\mathcal{C}$ qui converge vers x (on suppose que $x \notin \partial\mathcal{C}$, ce cas étant évident); par compacité de $\partial\mathcal{C}$ on peut se donner φ une extractrice telle que $r(x_{\varphi(n)})$ converge vers $y \in \partial\mathcal{C}$. Alors, $T_{x_{\varphi(n)}} = \frac{r(x_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})}{x_{\varphi(n)} - f(x_{\varphi(n)})} \longrightarrow \frac{y - f(x)}{x - f(x)} := T_\varphi \geq 1$ et par unicité de T_x on a nécessairement $T_x = T_\varphi$ puis la suite $r(x_n)$ possède une unique valeur d'adhérence : elle converge vers cette dernière, qui est égale à $f(x) - T_x(x - f(x)) = r(x)$ d'où la continuité.

4.3. Théorème du point fixe de Kakutani

Nous allons montrer une généralisation du théorème précédent, pour des fonctions multivaluées.

Théorème (Kakutani). *Soit $\mathcal{C}$ un compact convexe non vide d'un espace euclidien E et ϕ une application de $\mathcal{C}$ dans $2^{\mathcal{C}}$. Si le graphe de ϕ (noté $\text{Gr}(\phi)$) est fermé dans $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ et si, pour tout point x de $\mathcal{C}$, $\phi(x)$ est un convexe non vide, alors ϕ possède un point fixe.*

Preuve. Soit U un ouvert de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ contenant $\text{Gr}(\phi)$, pour $\varepsilon > 0$ on construit une nouvelle application ϕ_ε définie par

$$\phi_\varepsilon(x) = \text{Conv} \left(\bigcup_{\|x-y\| < \varepsilon} \phi(y) \right)$$

Pour ε assez petit, montrons que $\text{Gr}(\phi_\varepsilon) \subset U$. Si ce n'est pas le cas, on peut se donner une suite de couple (x_n, y_n) vérifiant $y_n \in \phi_{2^{-n}}(x_n)$ et n'appartenant pas à U . Pour tout n , on peut écrire $y_n = \sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j(n) z_j(n)$ avec $0 \leq \lambda_j(n) \leq 1$, $z_j(n) \in \phi(y_j(n))$ et $\|x_n - y_j(n)\| < 2^{-n}$. Puisque par essence (x_n) vit dans le compact $\mathcal{C}$, on peut supposer $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, de même on peut supposer $z_j(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_j$. Par fermeture de $\text{Gr}(\phi)$, la limite de la suite $(y_j(n), z_j(n))$, qui n'est autre que (x, z_j) , reste dans le graphe, d'où $z_j \in \phi(x)$ pour tout j .

Par le théorème de Carathéodory, l'indice m_n peut être remplacé par $d+1$ où $d = \dim(E)$ et ainsi on peut supposer la convergence des $d+1$ suites $(\lambda_j(n))$. Tout compte fait,

$$y_n = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j(n) z_j(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j z_j := y$$

2. En fait, non vide suffit.

d'où $y \in \text{Conv}(\phi(x))$; mais comme $\phi(x)$ est convexe, on a en réalité $y \in \phi(x)$, c'est à dire $(x, y) \in \text{Gr}(\phi)$. Ainsi la suite (x_n, y_n) converge vers un élément de U , c'est absurde. Soit donc ε tel que $\text{Gr}(\phi_\varepsilon) \subset U$.

Construisons une fonction $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ continue telle que $\text{Gr}(f) \subset U$.

Lemme (*Partition de l'unité*). *Si $U_1, \dots, U_P$ sont des ouverts recouvrant $\mathcal{C}$, il existe des fonctions continues $f_1, \dots, f_p : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant $f_1 + \dots + f_p = 1$ et $f_j = 0$ pour $x \in \mathcal{C} \setminus U_j$.*

Preuve. On prouve seulement le cas $p = 2$, le cas général se déduisant facilement de ce dernier. Notons $f_1 : x \mapsto \frac{d(x, U_1 \setminus U_2)}{d(x, U_1 \setminus U_2) + d(x, U_2 \setminus U_1)}$. Cette fonction est bien définie et est continue; de plus $f_1(x) = 1$ si $x \in U_1 \setminus U_2$ et $f_1(x) = 0$ si $x \in U_2 \setminus U_1$. En posant $f_2 = 1 - f_1$ on obtient ce que l'on recherchait.

Recouvrons $\mathcal{C}$ par un nombre fini de boules $B(x_1, \varepsilon), \dots, B(x_p, \varepsilon)$ et donnons nous les fonctions $f_1, \dots, f_p$ associées. Prenons dans chaque $\phi_\varepsilon(x_i)$ un élément y_i , on pose $f := \sum_{j=1}^p f_j y_j$. Cette fonction est clairement continue et on a $\text{Gr}(f) \subset \text{Gr}(\phi_\varepsilon) \subset U$.

On peut appliquer le théorème de Brower à f , il existe $x \in \mathcal{C}$ tel que $f(x) = x$ d'où $(x, x) \in U$. En itérant ce procédé, on construit une suite décroissante d'ouverts $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intersection égale à $\text{Gr}(\phi)$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout n , on ait $x_n \in U_n$ et $(x_n, x_n) \in U_n$.

Par compacité de $\mathcal{C}$ on peut supposer x_n convergente vers $x \in \mathcal{C}$. Montrons que $x \in \phi(x)$. Supposons que ce ne soit pas le cas, le graphe étant fermé, on peut se donner V un voisinage de (x, x) disjoint de $\text{Gr}(\phi)$; en particulier il existe $C > 0$ tel que $d((x, x), \text{Gr}(\phi)) > C$. D'un autre côté on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \text{Gr}(\phi)$ donc $d((x_n, x_n), \text{Gr}(\phi)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Mais alors $C \leq d((x, x), \text{Gr}(\phi)) \leq d((x_n, x_n), (x, x)) + d((x_n, x_n), \text{Gr}(\phi)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, c'est absurde. Ceci achève la preuve du théorème.

Références

- [1] <https://www.math.brown.edu/reschwar/MathNotes/sperner.pdf>
- [2] <https://math.univ-lyon1.fr/wikis/agregation/lib/exe/fetch.php?media=exo-23.pdf>
- [3] <https://www.ceremade.dauphine.fr/~vigeral/PolycopieL3.pdf>