Université Claude Bernard Lyon 1 — Année 2018-2019
Licence Portail Math/Info Première année

Partiel fondamentaux des mathématiques II

1. Par un rapide calcul direct (fait en cours et à l'exercice 14 du TD 1), on a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.
Comme I et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton. Pour $n \geq 2$, seuls les trois premiers termes du développement sont non nuls :

$$A^n = (3I+N)^n = 3^n I + n3^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}N^2 = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Et cette formule reste vraie pour $n = 0$ ou 1 puisque $A^0 = I$, $A^1 = A$.

2.

1. $E = \{(0,0)\}$. Autrement dit, E est le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul, qui est de dimension 0

2. $F = Vect(X^2+1)$ est une droite vectorielle, donc de dimension 1.

3. $f(x) = x$ est une fonction croissante alors que $-f$ ne l'est pas. Donc, G n'est pas stable par combinaison linéaire. Donc G n'est pas un sous-espace vectoriel.

4. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+2y+3z = 0\}$ est un plan vectoriel, donc de dimension 2.

3. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 et la famille $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, P_3\}$ a trois éléments, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre pour conclure qu'il s'agit d'une base. Soit donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$$

En remplaçant l'expression des P_i, on obtient

$$(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)X + (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0$$

Comme $\{1, X, X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on déduit que

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 - \lambda_3 = -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

En ajoutant la première et la troisième ligne du système, on trouve $\lambda_3 = 0$. En substituant dans la seconde, $\lambda_2 = 0$, puis dans la première, $\lambda_1 = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est une base.

4.

1. Par exemple, les vecteurs $(1,-1,0)$ et $(1,0,-1)$ ne sont pas colinéaires et appartiennent au plan vectoriel F. Ils en forment donc une base.
2. Toute droite vectorielle qui n'est pas contenue dans le plan F convient. Par exemple, la droite engendrée par le vecteur $(1,1,1)$.

5.

1. Il suffit d'appliquer les formules de cours : $e^x - \cos x - x = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}) - (1 - \frac{x^2}{2}) - x + o(x^3) = x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

2. $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^3)$ donc $\ln(\cos x) = \ln(1 - x^2/2 + o(x^3))$. Or $u = -x^2/2 + o(x^3) \to 0$ lorsque $x \to 0$. On peut donc appliquer ce changement de variable :

$$\ln(1 - x^2/2 + o(x^3)) = \ln(1+u) = u + \mathcal{O}(u^2) = -x^2/2 + o(x^3).$$

Et donc,

$$\ln(\cos x) - x = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

3. Nous venons de montrer que pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-x - x^2/2 + o(x^3)} = -\frac{x + x^2/6 + o(x^2)}{1 + x/2 + o(x^2)} = -(x + x^2/6 + o(x^2))(1 + x/2 + o(x^2))^{-1}$$

Or $v = x/2 + o(x^2) \to 0$ quand $x \to 0$. On peut donc changer de variable et conclure que

$$(1 + x/2 + o(x^2))^{-1} = (1+v)^{-1} = 1 - v + o(v) = 1 - x/2 + o(x).$$

D'où,

$$f(x) = -(x + x^2/6 + o(x^2))(1 - x/2 + o(x)) = -(x - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)) = -x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$

Par troncature, f admet un DL d'ordre 1 en $a = 0$. f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = -1$.

4. Comme $\frac{1}{3}x^2 > 0$ pour $x \neq 0$, l'écart du graphe à la tangente $f(x) - (-x)$ est positif ou nul pour x proche 0. Conclusion, 0 n'est pas un point d'inflexion.

6. Comme cos est paire, $\cos(-2\pi/3) = \cos(2\pi/3)$. La fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ dont arccos est la bijection réciproque. En particulier, $\arccos(\cos(2\pi/3)) = 2\pi/3$ et donc $\arccos(\cos(-2\pi/3)) = 2\pi/3$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sin(\arcsin(x)) = x$. Comme $t = \arcsin(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\cos(t) > 0$ et donc $\cos(t) = \sqrt{1 - \sin^2(t)}$. D'où, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$. Au final, comme $x^2 \neq 1$,

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

7.

1. Il suffit de prendre la puissance inverse : comme $I = A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}B^{n_4}$, on a

$$I = I^{-1} = (A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}B^{n_4})^{-1} = B^{-n_4}A^{-n_3}B^{-n_2}A^{-n_1}$$

2. On multiplie le membre de gauche et le membre de droite de l'égalité

$$I = A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}$$

à gauche par B et à droite par B^{-1}, de sorte que

$$I = BIB^{-1} = BA^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}B^{-1}$$