

AUTOUR DES FRACTIONS CONTINUES

SOPHIE ROULIER
supervisé par Alexander Thomas

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Diagramme de Farey et cercles de Ford	2
2.1. Diagramme de Farey	2
2.2. Cercles de Ford	6
3. Fractions continues	8
3.1. Définitions et premières propriétés	8
3.2. Propriétés "remarquables"	11
3.3. Construction matricielle	15
4. Introduction aux q -rationnels	16
Références	20

1. INTRODUCTION

Les fractions continues sont une autre manière d'exprimer les réels. Outre la beauté particulière de certaines d'entre elles et celle de leurs applications géométriques, elles sont particulièrement utiles pour l'approximation diophantienne des irrationnels. Ce dossier a pour but d'étudier certaines de leurs propriétés. Dans un premier temps, nous nous consacrerons à leur approche géométrique en utilisant les diagrammes de Farey et les cercles de Ford. Nous étudierons ensuite leur expression algébrique. Enfin, nous verrons la construction matricielle induite et introduirons la déformation des rationnels en q -nombres qu'elles permettent d'obtenir.

2. DIAGRAMME DE FAREY ET CERCLES DE FORD

2.1. Diagramme de Farey.

Il existe plusieurs représentations possibles du diagramme de Farey possédant chacune des propriétés intéressantes, nous n'en présenterons ici qu'une partie. Leurs constructions restent cependant basées sur le même principe : elles représentent la répartition dans l'ordre croissant des termes des suites de Farey \mathcal{F}_n pour $n \in \mathbb{N}$. La plupart des résultats présentés dans cette partie peuvent être retrouvés dans [Ha22, chap1].

Définition 2.1. La suite de Farey \mathcal{F}_n est l'ensemble des fractions $\frac{p}{q} \in \mathbb{N}$ entre 0 et 1 inclus, dont le dénominateur n'excède pas n , rangées dans l'ordre croissant.

Exemple 2.2.

$$\mathcal{F}_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathcal{F}_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right)$$

Un premier diagramme est le suivant :

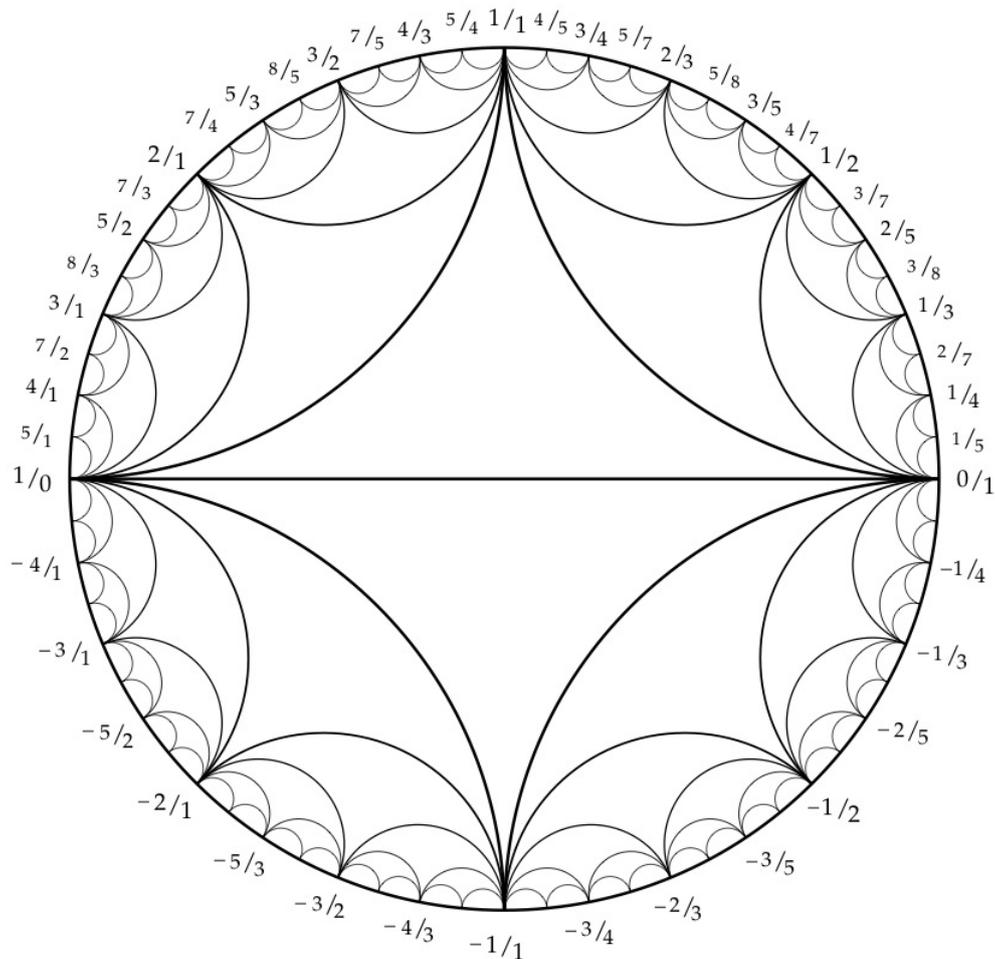


FIGURE 1 – Diagramme de Farey 1 (src : [Ha22])

Celui-ci est construit comme suit : on commence par tracer le cercle extérieur et son diamètre. On nomme les points d'intersection respectivement $\frac{1}{0}$ et $\frac{0}{1}$. On trace ensuite successivement les arcs de cercles formant les triangles isocèles hyperboliques à partir des sommets adjacents $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ déjà placés en donnant au troisième sommet l'indice $\frac{p}{q}$ tel que $\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$.

Définition 2.3. La fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est appelée **médiane** de $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. Nous noterons cette opération par $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Une manière peut-être plus naturelle de dessiner ce diagramme est en le "dépliant" le long de l'axe des réels. Le point $\frac{1}{0}$ est alors assimilé à l'infini et le dessin se prolonge à \mathbb{R} tout entier.

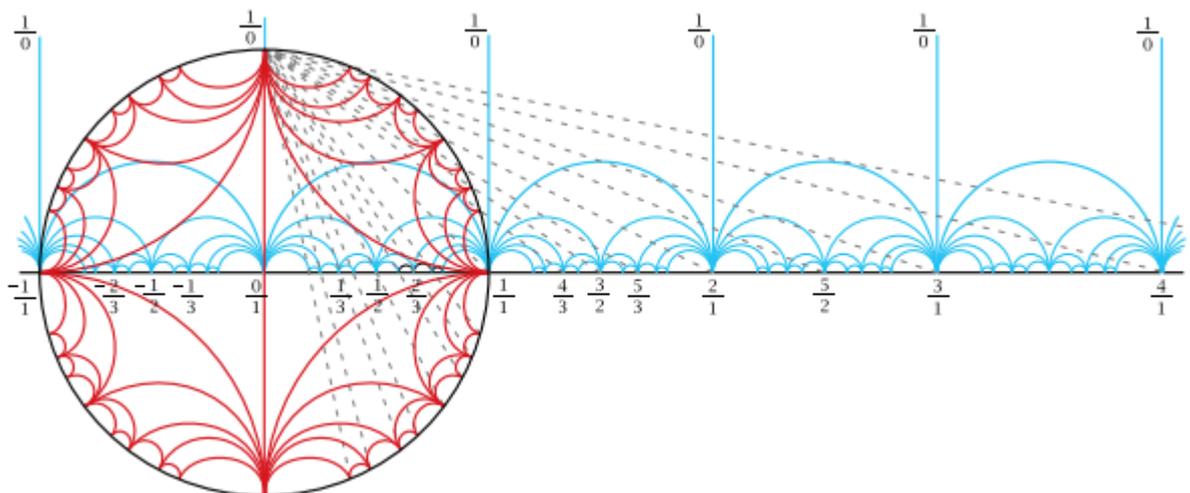


FIGURE 2 – Diagramme de Farey 2 (src : [Ha22])

Remarque 2.4. Comme montré sur cette représentation, on peut établir un parallèle entre la droite projective $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ et le diagramme de Farey où chaque point de la droite serait envoyé sur l'axe des abscisses par la projection canonique.

Proposition 2.5. *Il existe un arc entre les rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ si et seulement si le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est ± 1 .*

Démonstration. Commençons par montrer le résultat pour les premiers arcs. Pour le diamètre et les 4 premiers arcs liant les 4 points cardinaux, on a clairement des déterminants de ± 1 . Supposons à présent le résultat vrai pour l'arc reliant deux points $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, c'est-à-dire $ad - bc = \pm 1$. À partir de ces sommets, on trace un nouveau triangle dont le sommet est $\frac{a+c}{b+d}$ d'après la règle de la médiane. Les déterminants des deux matrices engendrées $\begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}$ sont $a(b+d) - b(a+c) = ad - bc = \pm 1$ et $d(a+c) - c(b+d) = ad - bc = \pm 1$. Le résultat est donc vrai pour tous les nouveaux arcs tracés.

Réciproquement, supposons qu'on ait 2 points $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ tels que $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \pm 1$. Alors si b ou $d = 0$ ($b = d = 0$ impossible), la condition devient ad ou $bc = \pm 1$, donc il s'agit d'un des 3 autres points cardinaux et dans tous les cas un arc existe entre les 2. On peut donc supposer à présent $b, d > 0$. Nous avons vu que chaque nouvelle matrice est obtenue à partir de deux matrices précédentes en gardant une des colonnes et en remplaçant la seconde par la somme des coefficients. Si donc on montre qu'à partir de toute matrice de déterminant ± 1 on peut remonter, par une suite d'opérations, à la matrice d'un arc reliant 2 points cardinaux, la preuve sera terminée. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, soit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tel que $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \pm 1$. Alors en soustrayant la colonne de second coefficient le plus petit à l'autre colonne jusqu'à ce que les 2 coefficients inférieurs soient égaux

à 1, le déterminant restera inchangé et celui de la dernière matrice sera $a - c = \pm 1$. Les sommets liés par l'arc correspondant sont donc de la forme $\frac{c+1}{1}$ et $\frac{c}{1}$ et comme vu sur la figure 2, un arc les relie. \square

Afin de simplifier les choses, nous dirons à présent que deux fractions (irréductibles) sont **voisines** s'il existe un arc qui les relie.

Corollaire 2.6. *La règle de la médiane à partir de deux fractions irréductibles voisines produit toujours une nouvelle fraction irréductible.*

Démonstration. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles voisines. On construit par la règle de la médiane les arcs de matrices $\begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}$ de déterminants ± 1 . Cela revient à dire $\exists (u, v), (s, t) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(a+c)u + (b+d)v = 1$ et $(a+c)s + (b+d)t = 1$ avec $(u, v) = (-b, a)$ et $(s, t) = (d, -c)$, quitte à multiplier par -1 selon la valeur du déterminant. On en déduit donc $\text{pgcd}(a+c, b+d) = 1$. \square

Corollaire 2.7. *Toutes les fractions irréductibles $\frac{p}{q}$ apparaissent dans le diagramme de Farey.*

Démonstration. On peut supposer $\frac{p}{q} \notin \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{0} \right\}$ puisqu'on sait que ces deux fractions sont sur le diagramme. Il suffit de montrer que si $\frac{p}{q}$ irréductible, alors il existe un arc reliant $\frac{p}{q}$ à une autre fraction $\frac{r}{s}$ se trouvant sur le diagramme, et donc $ps - rq = \pm 1$. Or, quitte à multiplier par -1 , le théorème de Bézout nous assure l'existence d'un tel couple et comme p et q sont premiers entre eux, r et s le sont aussi. De plus, un arc relie bien $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ puisque $\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = ps - qr = \pm 1$. \square

Le diagramme de Farey peut également être représenté linéairement. Sous cette forme, il possède quelques curieuses propriétés. Nous en présentons ici quelques-unes. Le diagramme est tracé dans un carré dont les deux sommets inférieurs représentent deux entiers consécutifs, nous prendrons ici 0 et 1. Chaque nouvelle valeur de la suite est alors placée comme suit. On commence par tracer les diagonales puis la hauteur du triangle inférieur nouvellement formé. Le projeté orthogonal du point d'intersection des diagonales est alors $\frac{1}{2}$. On relie $\frac{1}{2}$ aux deux sommets supérieurs du carré, puis on place les projetés orthogonaux des points d'intersection des diagonales et de ces nouveaux segments, sur l'axe des abscisses (côté inférieur du carré). Ces deux derniers points correspondent à ceux obtenus par la règle de la médiane entre $\frac{1}{2}$ et les deux bords $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$. Le même procédé est appliqué à chaque nouveau point en prenant les intersections avec les segments précédemment tracés. Nous obtenons alors le diagramme suivant :

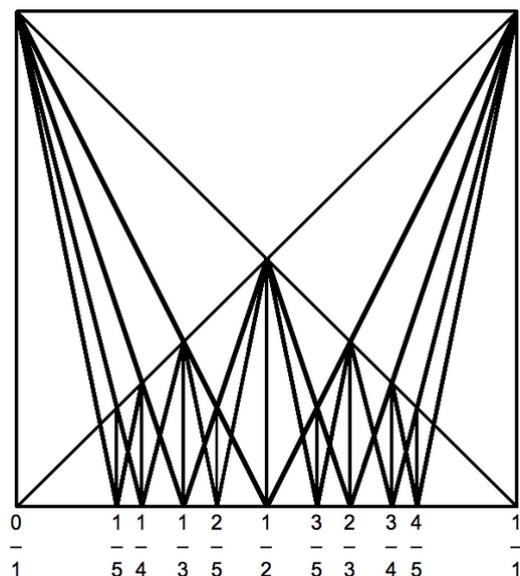


FIGURE 3 – Diagramme de Farey 3 (src : wikipedia, Hyacinth)

Il s'étend lui aussi à la droite des réels en incrémentant les numérateurs et en juxtaposant les carrés.

Proposition 2.8. Dans le diagramme de Farey restreint à $[0; 1]$, chaque fraction correspond exactement aux coordonnées des points sur les abscisses.

Démonstration. On se place dans un repère centré sur 0. Le résultat est trivialement vrai pour $\frac{1}{2}$. Soient maintenant deux points $(\frac{a}{b}, 0)$ et $(\frac{c}{d}, 0)$. Pour construire un nouveau point, on trace les segments reliant $(\frac{a}{b}, 0)$ à $(\frac{c}{d}, \frac{1}{d})$ et $(\frac{c}{d}, 0)$ à $(\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$. Leur point d'intersection est $(\frac{a+c}{b+d}, \frac{1}{b+d})$ si et seulement si il se trouve sur les deux diagonales. Il suffit donc de montrer que les segments reliant ce point à $(\frac{a}{b}, 0)$ et à $(\frac{c}{d}, \frac{1}{d})$ ont la même pente, et de même pour l'autre diagonale. Or on a :

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{b+d}}{\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}} = \frac{d}{b(b+d)} = \pm d \quad \text{et de même,} \quad \frac{\frac{1}{b+d} - \frac{1}{d}}{\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d}} = \frac{1}{d(b+d)} = \pm d$$

avec le même signe. On vérifie facilement de la même manière l'autre égalité. Le projeté orthogonal de ce point sur l'axe des abscisses étant $\frac{a+c}{b+d}$, il coïncide exactement avec ses coordonnées. \square

Remarque 2.9. La preuve précédente nous donne les deux propositions suivantes :

- A) Chaque pente de ce diagramme est entière.
- B) Les termes de la suite \mathcal{F}_n peuvent être retrouvés en prenant les points donnés par les projetés orthogonaux des intersections au-dessus de la droite $y = \frac{1}{n}$.

2.2. Cercles de Ford.

Le diagramme de Farey est souvent associé aux **cercles de Ford**, représentés ci-dessous. Les résultats présentés dans cette partie peuvent être trouvés dans [Ha22, chap1] et [Fo38].

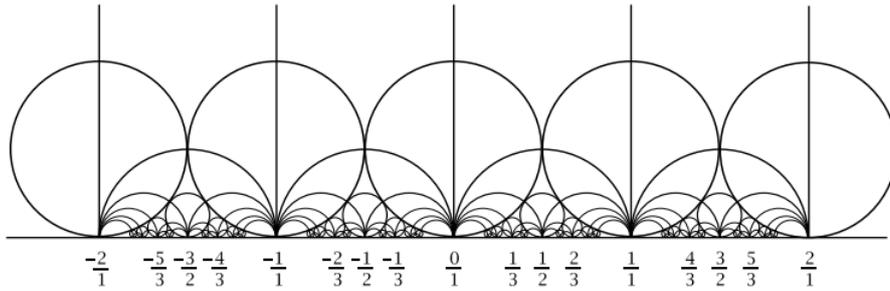


FIGURE 4 – Cercles de Ford (src : [Ha22])

Pour construire ce diagramme, on commence par tracer des cercles de diamètre 1 tangents à l'axe des abscisses en chaque entier. On place les cercles suivants entre deux cercles précédemment tracés de sorte à ce qu'ils soient tangents à l'axe des abscisses. Leur point de tangence à l'axe est alors nommé par la règle de la médiane. Comme visible sur la figure 4, les cercles de Ford peuvent aussi être obtenus à partir du diagramme de Farey en traçant le symétrique des arcs de cercles par rapport à l'axe des abscisses et en décalant l'axe vers le bas. On a donc les mêmes propriétés pour les points de tangence cercles-axe des cercles de Ford que pour les points du diagramme de Farey.

Proposition 2.10. *Le rayon d'un cercle de Ford tangent à l'axe des abscisses en $\frac{p}{q}$ est $\frac{1}{2q^2}$.*

Démonstration. Soient deux cercles C et C' de rayons respectifs r et r' tangents à l'axe des abscisses en $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux points voisins du diagramme de Farey, car construits de la même façon. Alors ces deux cercles sont tangents entre eux si et seulement si l'égalité suivante est respectée :

$$(r + r')^2 = \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 + (r - r')^2.$$

C'est-à-dire,

$$r^2 + 2rr' + r'^2 = \left(\frac{ad - bc}{bd}\right)^2 + r^2 - 2rr' + r'^2 \iff 4rr' = \frac{1}{b^2d^2}$$

puisque $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont voisins par hypothèse. Puisque b et d sont fixés, afin de faire dépendre r et r' uniquement de $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ et de manière symétrique, on prend $r = \frac{1}{2b^2}$, $r' = \frac{1}{2d^2}$. Ainsi pour tout cercle tracé et tangent à l'axe en un point $\frac{p}{q}$, son rayon est $\frac{1}{2q^2}$. Le cercle tangent aux abscisses en $\frac{a+b}{c+d}$ a donc pour rayon $\frac{1}{2(c+d)^2}$ et est bien tangent aux cercles C et C' puisque la même égalité est respectée avec les nouveaux rayons. On se retrouve donc dans le même cas que sur la figure 3.

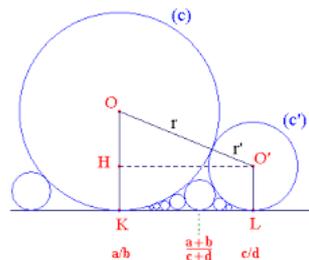


FIGURE 5 – Cercles tangents (src : Chronomath, S.Mehl)

□

Remarque 2.11. Nous pouvons avoir une nouvelle preuve de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} grâce aux cercles de Ford. En effet, nous avons vu que chaque rationnel $\frac{p}{q}$ est un point du diagramme de Farey, donc également un point de tangence cercle-abscisses sur la figure des cercles de Ford. Soit maintenant un irrationnel ω sur la droite des abscisses. Son irrationalité induit que ce point n'appartient à aucun cercle. On s'intéresse à la droite $x = \omega$. Cette droite intersecte une infinité de cercles sans jamais être tangente à 2 cercles en un même point, sinon ω correspondrait au cercle construit à partir des 2 premiers. Ainsi, il existe une suite infinie de rationnels qui converge vers ω . Le résultat étant vrai $\forall \omega \in \mathbb{R}$, on obtient \mathbb{Q} dense dans \mathbb{R} . □

3. FRACTIONS CONTINUES

3.1. Définitions et premières propriétés.

Il existe plusieurs écritures possibles d'un même nombre, par exemple, on peut écrire aussi bien $\frac{1}{2}$ que 0.5 ou 0.333333 ... pour $\frac{1}{3}$. Les fractions continues en sont une autre.

Définition 3.1. Une fraction continue est une expression (finie ou infinie) de la forme

$$\omega = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

où $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}^* \forall i \geq 1$. On écrit aussi $\omega = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ ou $\omega = a_0 + 1 \nearrow a_1 + 1 \nearrow a_2 + 1 \nearrow \dots$. On préférera ici l'écriture entre crochets ou le développement explicite. On omet d'écrire a_0 lorsque $a_0 = 0$.

Exemple 3.2.

$$\frac{25}{7} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1477}{1939} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{13}}}}$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Remarque 3.3. Dans le cas d'une fraction continue finie, il y a duplicité de l'écriture. En effet, pour tout entier, on peut écrire $n = (n - 1) + \frac{1}{1}$. Ainsi, on a pour $\omega = [a_0; a_1, \dots, a_n] =$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n - 1 + \frac{1}{1}}}}$$

considérons que le dernier coefficient doit être strictement supérieur à 1 pour rendre chaque écriture unique.

Définition 3.4. Une fraction continue infinie est dite **périodique** s'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que la suite de coefficients $[a_n, \dots, a_m]$ se répète indéfiniment. On note alors pour $m \geq n$ dernier terme de la période, $\omega = [a_0; a_1, a_2, \dots, \overline{a_n, \dots, a_m}]$.

Exemple 3.5.

$$\phi = [1; \overline{1}] \quad \sqrt{5} = [2; \overline{4}].$$

Définition 3.6. Les sommes partielles $\frac{p_i}{q_i} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_i}}}$ sont les **réduites**

de la fraction continue.

Proposition 3.7. Dans une fraction continue finie, les réduites sont liées par la relation de récurrence suivante :

$$\forall i \geq 2, \frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i q_{i-1} + q_{i-2}}.$$

Avant de montrer ce résultat, voyons le lien entre fractions continues et diagramme de Farey. On peut retrouver les quotients partiels et les réduites de tout rationnel simplement en suivant les segments reliant deux points. Réciproquement, à partir des quotients partiels d'un rationnel, on peut remonter à n'importe quelle réduite et donc au nombre lui-même.

Posons $\omega = \frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{Q}$ et considérons le diagramme représenté sur la figure 2.

Admettons que nous ne connaissons que $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ et déterminons ω . Pour cela, on parcourt d'abord la demi-droite verticale $\frac{1}{0}$ aboutissant au point $\frac{a_0}{1}$. Cela nous donne la première réduite

$\frac{p_0}{q_0}$. Pour obtenir la deuxième réduite, il suffit de parcourir le a_1 -ième arc de cercle partant de $\frac{p_0}{q_0}$

vers la droite. On répète ensuite la même opération en tournant successivement vers la droite ou vers la gauche jusqu'à avoir parcouru le a_n -ième arc de cercle pour obtenir $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$.

À l'inverse, si on part de $\omega = \frac{p}{q}$ et qu'on veut retrouver ses réduites ou ses quotients partiels, il suffit de remonter le chemin reliant ω à la fraction correspondant à sa partie entière a_0 en tournant successivement à droite et à gauche.

Exemple 3.8. On a représenté ci-dessous les chemins correspondants à $\frac{2}{5} = [2, 2]$ (en pointillés) et à $\frac{3}{14} = [4, 1, 2]$ (en gras) :

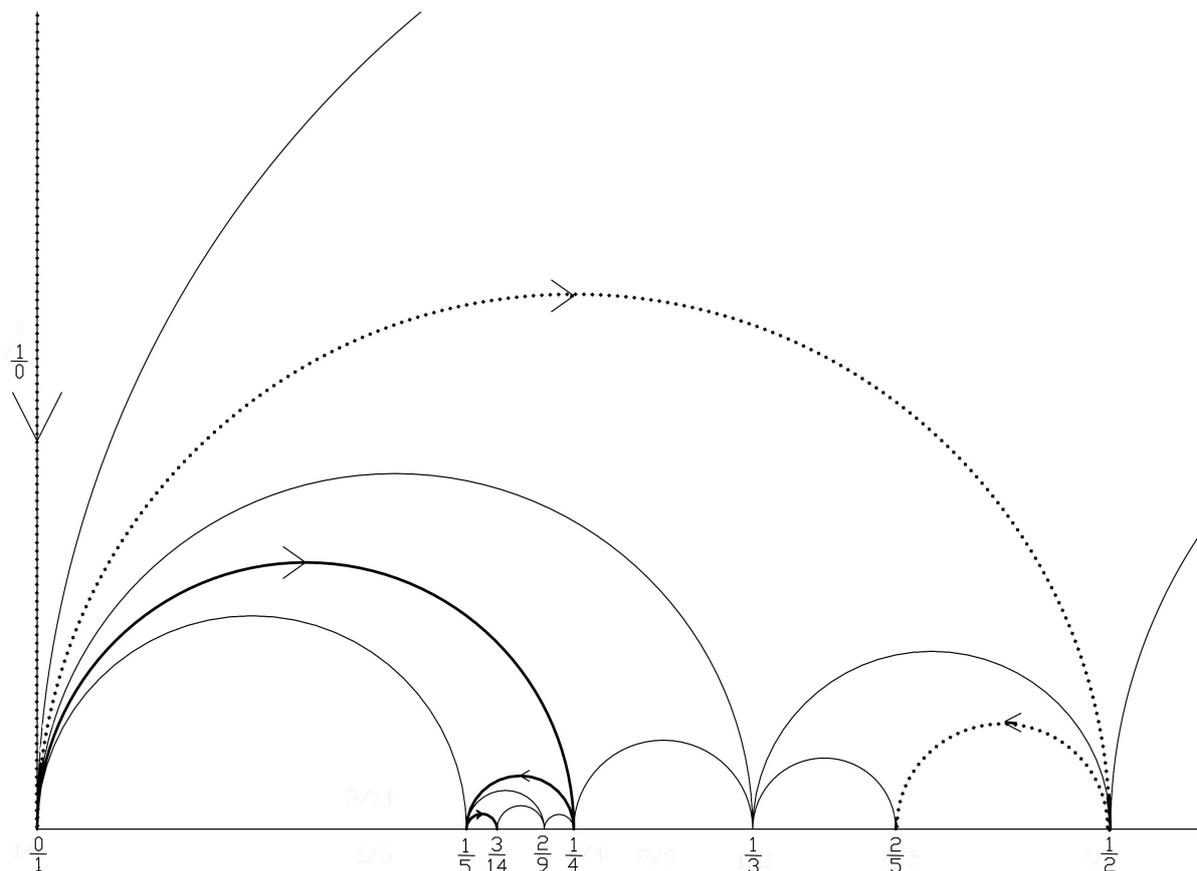


FIGURE 6 – Chemins

Remarque 3.9. Là encore, la duplicité de l'écriture des fractions continues finies se fait remarquer. En effet, pour remonter de ω à sa fraction continue, comment savoir si l'on doit d'abord tourner à gauche ou à droite ?

On s'aperçoit en fait que cela revient au même, mais il serait alors possible d'obtenir un dernier coefficient $a_n = 1$. Dans ce cas, on considère la fraction de dernier coefficient $a_{n-1} + 1$.

Remarque 3.10. La preuve précédente et le procédé utilisé nous permettent d'observer deux faits :

- Cette preuve montre clairement la convergence de la suite des réduites vers $\frac{p}{q}$, les réduites étant tour à tour inférieures ou supérieures à $\frac{p}{q}$.

- Les arcs de cercles parcourus sont exactement tous ceux qui se trouvent au-dessus de $\frac{p}{q}$.

Si on trace la droite $x = \frac{p}{q}$, ce sont exactement tous ceux coupés par cette droite.

Nous pouvons à présent montrer la **proposition 3.7** :

Démonstration. Nous venons de voir que les réduites sont construites avec la règle de la médiane en la répétant une fois entre $\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$ et $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ puis $a_i - 1$ fois entre $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ et le résultat obtenu. On a

donc $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$, $\frac{p_1}{q_1} = a_0 \oplus \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{a_1 p_0 + 1}{a_1 q_0 + 0}$ où la règle de la médiane est appliquée à $\frac{1}{0}$ et $\frac{p_0}{q_0}$. Puis avec la règle de la médiane, $\forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket$:

$$\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} = \left(\left(\left(\left(\frac{p_i}{q_i} \oplus \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \right) \oplus \frac{p_i}{q_i} \right) \oplus \dots \right) \oplus \frac{p_i}{q_i} \oplus \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \oplus \frac{a_{i+1} p_i}{a_{i+1} q_i} = \frac{a_{i+1} p_i + p_{i-1}}{a_{i+1} q_i + q_{i-1}}.$$

□

3.2. Propriétés "remarquables".

Présentons maintenant quelques résultats intéressants sur les fractions continues.

Proposition 3.11. *Un nombre est rationnel si et seulement si son écriture en fraction continue est finie.*

Démonstration. Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Si c'est un entier, on a $\frac{p}{q} = a_0$ et le résultat est immédiat.

Supposons à présent que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. On effectue la division euclidienne de p par q pour

obtenir $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{s_1}{t_1} = a_0 + \frac{1}{\frac{t_1}{s_1}}$ avec $s_1 < t_1$. On peut ensuite répéter l'opération avec la nouvelle

fraction $\frac{s_1}{t_1}$ et ainsi de suite jusqu'à ce que $s_n = 1$. Ceci arrivera forcément car les opérations effectuées sont exactement celles faites dans l'algorithme d'Euclide pour déterminer le *pgcd* de deux entiers, les a_i correspondant aux quotients partiels du même algorithme. La fraction est donc finie. Réciproquement, si une fraction continue est finie, on peut simplement calculer les quotients au fur et à mesure et il est donc évident que le résultat est un nombre rationnel. □

Exemple 3.12. En reprenant les exemples rationnels précédents et en explicitant les fractions, cela donne :

$$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1477}{1939} = \frac{211}{277} = \frac{1}{1 + \frac{66}{211}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{13}{66}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{13}}}}$$

Remarque 3.13. Pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, on a donc $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n] = \frac{p}{q}$.

Corollaire 3.14. *Un nombre est irrationnel si et seulement si son développement en fraction continue est infini.*

Démonstration. Un nombre étant soit rationnel, soit irrationnel, le résultat est immédiat par la proposition précédente. \square

Proposition 3.15. *Tout irrationnel a une unique expression en fraction continue.*

Démonstration. En considérant la remarque 3.10 et la figure 6, si ω est irrationnel, alors le chemin correspondant à sa fraction continue est infini. La droite $x = \omega$ croise donc une infinité d'arcs de cercle. De plus, comme $a_0 = [\omega] < \omega < a_0 + 1$, le premier arc de cercle parcouru est toujours celui à droite de a_0 . Comme on tourne successivement à gauche puis à droite pour obtenir les réduites successives, le chemin suivi pour parcourir tous les arcs de cercles intersectant $x = \omega$ est unique. \square

Théorème 3.16 (Lagrange). *L'écriture d'un nombre en fraction continue est périodique si et seulement si ce nombre est un irrationnel quadratique, c'est-à-dire $\omega = a + b\sqrt{n}$ où $a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$ et n non carré parfait.*

Démonstration. Soit $\omega = [a_0; a_1, a_2, \dots, \overline{a_m, \dots, a_n}] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Les coefficients partiels sont obtenus suivant un algorithme similaire à celui d'Euclide. On a en effet $\omega = [\omega] + (\omega - [\omega]) = a_0 + r_0$ où $r_0 = \omega - [\omega] \in]0; 1[$. Puis on obtient a_1 en prenant la partie entière de $\frac{1}{r_0}$. On a donc $r_1 = \frac{1}{r_0} - a_1 \in]0; 1[$. Il en va de même pour les suivants et donc $\forall n \geq 1, r_n = \frac{1}{r_{n-1}} - a_n \in]0; 1[$ où $a_n = \lfloor \frac{1}{r_{n-1}} \rfloor$. Puisque la fraction est périodique à partir du rang $m \geq 1$ jusqu'au rang n , on a $\forall k \geq n, a_k = a_{\bar{k}} = \lfloor \frac{1}{r_{\bar{k}-1}} \rfloor$ où $k \equiv \bar{k} \pmod{n-m+1}$. Considérons maintenant $\omega' = [\overline{a_m, \dots, a_n}]$ la somme de la partie périodique de ω . D'après ce qui précède, on a donc

$$\frac{1}{\omega'} = a_m + [a_{m+1}, \dots, a_n, \overline{a_m, \dots, a_n}]$$

puis

$$\frac{1}{\frac{1}{\omega'} - a_m} = a_{m+1} + [a_{m+2}, \dots, a_n, \overline{a_m, \dots, a_n}]$$

et par $n - m$ inversions et soustractions successives on arrive à l'équation

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\omega'} - a_m} - a_{m+1}} - a_{m+2}} - \dots - a_n = \omega'.$$

Cette égalité se simplifie en une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $\omega'^2 + b\omega' - c$ où $b \in \mathbb{N}^*, c = a_n$. Une racine est positive et l'autre négative. Nous pouvons éliminer cette dernière puisque $\omega' > 0$. On obtient donc bien ω' quadratique. Pour obtenir le premier sens de l'équivalence, il suffit de lui ajouter $[a_0; a_1, \dots, a_{m-1}] = \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} \in \mathbb{Q}$. L'autre sens de l'équivalence est plus complexe, nous l'admettons ici. Elle peut être trouvée dans [Co03, th0.0.16, pp8–9]. \square

Certaines fractions continues possèdent une jolie forme. Par exemple :
 Les parties périodiques des racines carrées d'entier sont palindromiques si on leur retire leur dernier terme a_n et on a toujours $a_n = 2a_0$:

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}] \quad \sqrt{201} = [14; 5, 1, 1, 1, 2, 1, 8, 1, 2, 1, 1, 1, 5, 28]$$

On peut aussi mentionner certaines formes propres à l'exponentielle :

$$e = [2; \underbrace{1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots}]$$

$$\frac{e-1}{e+1} = [2, 6, 10, 14, \dots]$$

$$\frac{e^2-1}{e^2+1} = [1, 3, 5, 7, \dots]$$

Comme nous l'avons annoncé en préambule, les fractions continues, et plus précisément leurs réduites, sont très utiles dans l'approximation des irrationnels. Les résultats qui suivent peuvent être trouvés dans [Wa08].

Théorème 3.17 (Dirichlet). *On dispose de l'équivalence suivante :*

$$\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \iff \text{il existe une infinité de } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Démonstration. On note $\{x\} = \frac{1}{x}$ la partie décimale de x et $[x]$ sa partie entière. Soit $c \in]1, +\infty[$. Soit $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $N = \lceil c \rceil$, c'est-à-dire $N-1 \leq 1 < c < N$. Nous allons montrer que pour tout tel c , il existe une infinité de $\frac{p}{q}$ tels que $\left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qc}$, ce qui est équivalent à $|q\omega - p| < \frac{1}{c}$. Considérons le segment $[0,1]$ et divisons-le en N intervalles $I_j = [\frac{j}{N}; \frac{j+1}{N}]$ pour $0 \leq j \leq N-1$. Soit $E = \{\{k\omega\} : 0 \leq k \leq N-1\} \cup \{1\} \subset [0, 1]$ de cardinal $N+1$. Par le principe des tiroirs, $\exists j_0 \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$ tel que 2 éléments de E appartiennent à I_{j_0} . Si $j_0 = N-1$, alors $I_{N-1} = [1 - \frac{1}{N}; 1]$ et $\exists k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$ tel que $1, \{k\omega\} \in I_{N-1}$. Donc, si $p = [k\omega] + 1$, on a

$$p - k\omega = 1 - \{k\omega\} = 1 - \frac{1}{k\omega} \implies 0 < p - k\omega < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{c}.$$

Si $j_0 < N-1$, $\exists k_1 < k_2 \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$ tels que $\{k_1\omega\}, \{k_2\omega\} \in I_{j_0}$. En posant $k = k_2 - k_1$ et $p = [k_2\omega] - [k_1\omega]$, on a bien $0 < k \leq N-1$ et

$$p - k\omega = \{k_2\omega\} - \{k_1\omega\} \implies 0 < p - k\omega < \frac{j_0+1}{N} - \frac{j_0}{N} = \frac{1}{N} \leq \frac{1}{c}.$$

Dans tous les cas, l'inégalité est vraie. Il suffit ensuite de prendre $c = q$ pour conclure. \square

En observant que la droite $x = \omega$ coupe une infinité de cercles de Ford, comme ceux-ci ont un rayon de $\frac{1}{2q^2}$, on obtient même la proposition qui suit. On peut en trouver une preuve plus explicite dans [Wa08, pp 15-16].

Proposition 3.18. *On a l'équivalence :*

$$\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \iff \text{il existe une infinité de } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

En réalité, la meilleure approximation que l'on puisse avoir a été trouvée par Hurwitz :

Théorème 3.19 (Hurwitz). *On a l'équivalence :*

$$\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \iff \text{il existe une infinité de } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

De plus, la constante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est optimale.

Démonstration. Soient $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ tels que $\frac{p}{q} < \omega < \frac{r}{s}$. Posons $u = p+r, v = q+s$, $\frac{u}{v}$ est donc la fraction obtenue par la règle de la médiane entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$. Quitte à inverser les signes,

on peut supposer $qr - ps = qu - pv = rv - su = 1$. Soit $\delta = \min\left\{q^2\left(\omega - \frac{p}{q}\right), s^2\left(\frac{r}{s} - \omega\right), v^2\left|\omega - \frac{u}{v}\right|\right\}$.

On peut supposer sans perte de généralité que $\frac{u}{v} > \omega$. Posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & t + \frac{1}{t} \end{array}$. On a :

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{s^2} \right) &\leq \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \\ \implies \frac{q^2 + s^2}{q^2 s^2} &\leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right) \\ \implies \frac{q^2 + s^2}{qs} &\leq \frac{1}{\delta} \underbrace{(qr - ps)}_{=1}. \end{aligned}$$

Or $\frac{q^2 + s^2}{qs} = \frac{s}{q} + \frac{q}{s} = f\left(\frac{s}{q}\right) = f\left(\frac{q}{s}\right)$. Nous obtenons de même $f\left(\frac{v}{q}\right) = f\left(\frac{q}{v}\right) \leq \frac{1}{\delta}$. La fonction f étant décroissante sur $]0, 1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$ avec un minimum $f(1) = 2$.

D'après les dernières inégalités, on a donc $\frac{q}{s}, \frac{s}{q}, \frac{q}{v}, \frac{v}{q} \in \left[\frac{1}{\lambda}; \lambda\right]$ où λ est la racine supérieure à 1 de $t^2 - \frac{t}{\delta} + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = \frac{1}{\delta^2} - 4 \geq 1$ car $\sqrt{\Delta} = \lambda - \frac{1}{\lambda} \geq \frac{v}{q} - \frac{s}{q} = 1$. D'où

$\delta^2 \leq \frac{1}{5} \implies \delta \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ et on en déduit le résultat.

Pour l'optimalité, il suffit de prendre $\omega = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ la racine supérieure à 1 de $x^2 - x - 1$ de discriminant $\Delta = 5$. Supposons $l < 1$, et montrons qu'il n'existe qu'un nombre fini de rationnels

tels que $\left| \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{l}{\sqrt{5}q^2}$. Pour une telle fraction, on a donc l'existence d'un k tel que

$0 < k < l$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} &= \frac{k}{\sqrt{5}q^2} \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{1}{2} - \frac{p}{q} &= \frac{k}{\sqrt{5}q^2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{1}{4} - \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2} &= \frac{k^2}{5q^4} - \frac{k}{q^2} + \frac{5}{4} \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{q^2}{4} - pq + p^2 - k - \frac{5q^2}{4} &= \frac{k^2}{5q^2} \\
&\Leftrightarrow \\
k^2 &= 5q^2 (p^2 - pq - q^2 - k)
\end{aligned}$$

Or si $p^2 - pq - q^2 = 0$ alors ou p , ou q serait irrationnel, ce qui est impossible. Donc $p^2 - pq - q^2 \geq 1$ et

$$q^2 = \frac{k^2}{5(p^2 - pq - q^2 - k)} \leq \frac{k^2}{5(1 - k)} < \frac{l^2}{5(1 - l)}.$$

Comme $0 < l < 1$, q ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. □

3.3. Construction matricielle.

Nous avons déjà introduit l'utilisation de l'expression matricielle dans certaines preuves de la première partie. En réalité, nous allons voir que chaque fraction continue, plus précisément chaque suite de réduites, peut être construite matriciellement. Nous nous plaçons dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Remarquons tout d'abord que la relation de récurrence entre les réduites peut se réécrire

$$\begin{pmatrix} p_{i-2} & p_{i-1} \\ q_{i-2} & q_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i-1} & a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_{i-1} & a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i-1} & p_i \\ q_{i-1} & q_i \end{pmatrix}$$

où les fractions sont placées en colonnes.

Chaque chemin menant à un irrationnel sur le diagramme de Farey part de l'infini $\frac{1}{0}$ et le lie à $\frac{a_0}{1}$. De là, on en déduit la manière d'obtenir tout rationnel par une suite d'opérations matricielles : puisque $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$, on a

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p \\ q_{n-1} & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

En posant

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.20. Toute matrice $P_i = \begin{pmatrix} p_{i-1} & p_i \\ q_{i-1} & q_i \end{pmatrix}$ peut être obtenue par la multiplication

$$P_i = R^{a_0} \prod_{j=1}^i SR^{a_j}.$$

Démonstration. Il suffit de voir qu'une multiplication à droite par R laisse la première colonne inchangée et additionne les coefficients des lignes dans la seconde. Ainsi on obtient $\forall n \geq 2$:

$$R^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par récurrence. D'où

$$R^{a_0} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$SR = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir de P_i , on a donc

$$P_i SR = \begin{pmatrix} p_i & p_{i-1} + p_i \\ q_i & q_{i-1} + q_i \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à l'application de la règle de la médiane une fois. Il nous reste donc à l'appliquer $a_{i+1} - 1$ fois dans la deuxième colonne pour obtenir P_{i+1} , ce qui se traduit par une multiplication par $R^{a_{i+1}}$. \square

De même, s'il n'est pas possible d'obtenir un irrationnel par cette méthode, nous pouvons l'approcher par un rationnel. Plus i sera grand dans le produit ci-dessus, meilleure l'approximation sera.

4. INTRODUCTION AUX q -RATIONNELS

Nous finirons ce dossier sur une ouverture aux nombres q -rationnels. Cela constitue un sujet d'étude assez récent et les résultats présentés ici viennent de [MG-O20]. Nous admettrons un certain nombre de résultats, leurs démonstrations peuvent être trouvées dans le même article.

Définition 4.1. Un q -entier est un nombre de la forme

$$[a]_q = \frac{1 - q^a}{1 - q} = \sum_{n=0}^{a-1} q^n \text{ où } a \in \mathbb{N}^*.$$

Les auteurs de [MG-O20] étendent cette notion aux rationnels.

Définition 4.2. On définit la q -déformation d'une fraction continue $\frac{r}{s} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ par :

$$\left[\frac{r}{s} \right]_q = [a_0]_q + \frac{q^{a_0}}{[a_1]_{q^{-1}} + \frac{q^{-a_1}}{\dots + \frac{q^{(-1)^{n-1} a_{n-1}}}{[a_n]_{q^{(-1)^n}}}}}$$

Exemple 4.3. Illustrons la définition précédente avec $\frac{8}{3} = [2; 1, 2]$:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{8}{3}\right]_q &= [2]_q + \frac{q^2}{[1]_{q^{-1}} + \frac{q^{-1}}{[2]_q}} \\
&= 1 + q + \frac{q^2}{1 + \frac{1}{q(1+q)}} \\
&= 1 + q + \frac{q^2}{\frac{q+q^2}{1+q+q^2}} \\
&= 1 + q + \frac{q^3+q^4}{1+q+q^2} \\
&= \frac{1+2q+2q^2+2q^3+q^4}{1+q+q^2}
\end{aligned}$$

Chaque fraction continue q-déformée est donc le quotient de deux polynômes en q à coefficients entiers. On notera pour simplifier les choses $\left[\frac{r}{s}\right]_q = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}$, sous-entendu $\frac{\mathcal{R}(q)}{\mathcal{S}(q)}$ avec $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathbb{Z}[q]$.

Remarque 4.4. Ci-suivent deux points intéressants à soulever à propos de ces polynômes. Les preuves peuvent être trouvées respectivement dans [MG-O20, p 5, prop1.3] et [Og23].

- (1) \mathcal{R} et \mathcal{S} sont à coefficients positifs.
- (2) Toutes les puissances successives de q , inférieures au degré des polynômes, apparaissent dans \mathcal{R} et \mathcal{S} . Ceci est dû à l'unimodalité de leurs coefficients.

Un résultat également curieux est le suivant, nous ne démontrerons cependant qu'un sens de l'implication.

Proposition 4.5. *On a l'équivalence suivante.*

$$\left[\frac{r}{s}\right]_q = \frac{[r]_q}{[s]_q} \iff s = r - 1.$$

Démonstration. L'implication de gauche à droite se fait par simple calcul : on a $\frac{r}{r-1} = [1; r-1]$ donc

$$\begin{aligned}
\left[\frac{r}{r-1}\right]_q &= 1 + \frac{q}{[r-1]_{q^{-1}}} = 1 + \frac{q}{1 + \frac{q}{1 - q^{-1}}} = 1 + \frac{q}{\frac{q^r - q}{q^r}} = 1 + \frac{q(q^r - q^{r-1})}{q^r - q} = \frac{q^{r+1} - q}{q^r - q} \\
&= \frac{1 - q^r}{1 - q^{r-1}} = \frac{\frac{1 - q^r}{1 - q}}{\frac{1 - q^{r-1}}{1 - q}} = \frac{[r]_q}{[s]_q}.
\end{aligned}$$

□

Il est intéressant d'observer ce que deviennent la règle de la médiane et le diagramme de Farey q -déformés.

Théorème 4.6. On a en notant la règle de la médiane q -déformée \oplus_q :

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} \oplus_q \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'} = \frac{\mathcal{R} + q^l \mathcal{R}'}{\mathcal{S} + q^l \mathcal{S}'} \text{ pour } l \geq 1 \text{ dépendant de } \mathcal{R} \text{ et } \mathcal{S}.$$

Illustrons ce théorème par un exemple.

Exemple 4.7. On a avec $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = \frac{4}{3}$ et $\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{S}'} = \frac{3}{2}$:

$$\left[\frac{4}{3} \right]_q = \frac{1 + q + q^2 + q^3}{1 + q + q^2}$$

$$\left[\frac{3}{2} \right]_q = \frac{1 + q + q^2}{1 + q}$$

$$\left[\frac{4+3}{3+2} \right]_q = \left[\frac{7}{5} \right]_q = [1; 2, 2]_q = \frac{1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4}{1 + q + 2q^2 + q^3} = \frac{1 + q + q^2 + q^3 + q^2(1 + q + q^2)}{1 + q + q^2 + q^2(1 + q)} \text{ et } l = 2 \text{ ici.}$$

On peut maintenant construire la q -déformation du diagramme de Farey comme ci-dessous. Le point $\frac{1}{0}$ est placé à l'infini et relié à $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$. La q -déformation revient à ajouter un poids q^{-1} à l'arc $\left[\frac{1}{0}, \frac{0}{1} \right]$ et un poids de $1 = q^0$ sur les deux autres arcs. Ensuite, sous chaque demi-cercle, on garde un poids de 1 pour le plus petit demi-cercle de gauche et on donne un poids de q incrémenté de 1 par rapport au cercle supérieur à celui de droite.

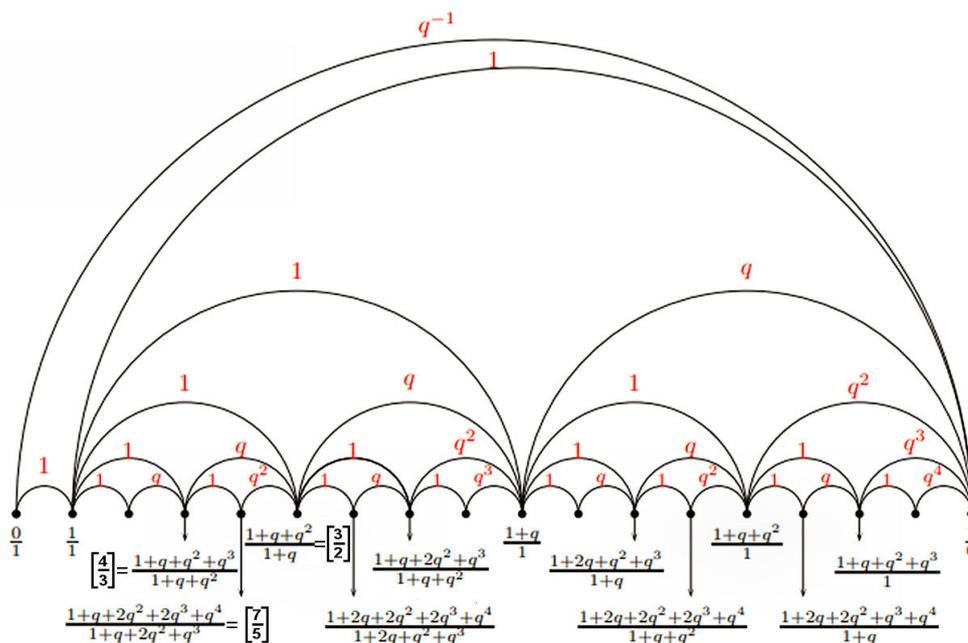


FIGURE 7 – Diagramme de Farey q -déformé (src : [MG-O20])

De plus, certaines propriétés de la version non déformée trouvent leurs équivalents ici, par exemple :

Proposition 4.8. *Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors les polynômes \mathcal{R}, \mathcal{S} tel que $\left[\frac{a}{b}\right]_q = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}$ sont premiers entre eux.*

En revanche, pour aller plus loin, nous avons besoin de définir de manière unique le nombre de coefficients des fractions continues. Pour cela, nous allons fixer n pair. De cette manière, si $\left[\frac{r}{s}\right]_q = [a_0; a_1, \dots, a_{2n+1}]_q = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}$ (donc nombre pair de coefficients), en notant $\frac{\mathcal{R}_i}{\mathcal{S}_i}$ les réduites q -déformées, on obtient la matrice q -déformée de $\begin{pmatrix} r & r_{2n} \\ s & s_{2n} \end{pmatrix}$ par le produit :

$$\begin{pmatrix} q\mathcal{R} & \mathcal{R}_{2n} \\ q\mathcal{S} & \mathcal{S}_{2n} \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{2n+1} \begin{pmatrix} [a_i]_{q^{(-1)^i}} & q^{a_i(-1)^i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déformant les matrices R et S tel que

$$R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S_q = \begin{pmatrix} q-1 & 1 \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

La construction matricielle devient alors :

$$\begin{pmatrix} q\mathcal{R} & \mathcal{R}_{2n} \\ q\mathcal{S} & \mathcal{S}_{2n} \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{2n-1} R_q^{a_i} S_q.$$

Nous admettons ici tous les derniers résultats matriciels qui mériteraient cependant d'être creusés. Ces résultats peuvent être retrouvés et l'étude être poursuivie avec [MG-O20] et [Jo25].

RÉFÉRENCES

- [Ha22] *A. Hatcher*, Topology of numbers. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS) (2022; Zbl 1502.11001).
- [Co03] *M. Couchouren*, Développement d'un réel en fractions continues, agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/fraccont.pdf.
- [Wa08] *Michel Waldschmidt*, Approximation diophantienne, irrationalité et transcendance, webusers.imj-prg.fr/michel.waldschmidt/articles/pdf/TdN2008fasc2.pdf.
- [MG-O20] *S. Morier-Genoud* and *V. Ovsienko*, Forum Math. Sigma 8, Paper No. e13, 55 p. (2020; Zbl 1434.05023).
- [Fo38] *FORD*, Lester R. Fractions. The American Mathematical Monthly, 1938, vol. 45, no 9, p. 586-601.
- [Og23] *E. K. Oğuz* and *M. Ravichandran*, Discrete Math. 346, No. 2, Article ID 113218, 20 p. (2023; Zbl 1552.06005).
- [Jo25] *Perrine Jouteur*, Symmetries of the q-deformed real projective line. 2025. (hal-05048093).