

Projet de Recherche L3: Fractions continues

Yanis Rossignol

Juin 2025

1 Introduction

Les fractions continues ont été beaucoup utilisées au cours du *XVIII^e* siècle par de nombreux mathématiciens pour avoir de "bonnes approximations" de nombres, ou pour montrer l'irrationalité de certains. Elles offrent un nouveau moyen de représenter les nombres autrement que par l'écriture décimale avec des différences que j'expliciterai dans ce mémoire. Le but de ce projet consiste à étudier des propriétés autour des nombres irrationnels à l'aide des fractions continues ou des séries de Engel. Il s'agit d'une première approche à la théorie des nombres grâce aux fractions continues en particulier des questions d'approximation de réels par des rationnels.

Dans une première partie, nous étudierons les fractions continues, en particulier pour les rationnel et ensuite les irrationnels en explicitant pourquoi on parle de "bonnes approximation". Dans une seconde partie, nous les regarderons dans un cas particuliers : les nombres quadratiques et nous finirons par une application : l'équation diophantienne de Pell-Fermat

$$x^2 - dy^2 = 1.$$

Dans une troisième partie, nous étudierons une mesure d'irrationalité : l'exposant d'irrationalité $\mu(x)$ d'un réel x est le supremum des réels $\mu \geq 0$ tels qu'il existe une infinité de couples d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et vérifiant

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\mu},$$

nous exposerons quelques théorèmes sur cet objet et ensuite nous construirons une fraction continue pour chaque exposant qu'un irrationnel puisse avoir. Et pour finir, nous conclurons ce projet de recherche via une courte étude des séries de Engel qui peuvent être nommées aussi "fractions continues ascendantes".

Table des matières

1	Introduction	2
2	Fractions continues	3
2.1	Développement en fraction continue d'un rationnel	3
2.2	Développement en fraction continue d'un irrationnel	4
3	Fractions Continues et nombres quadratiques	8
3.1	Critère autour des nombres quadratiques	8
3.2	Equation de Pell-Fermat	12
4	Approximation Diophantienne	13
4.1	Exposant d'irrationalité	13
4.2	Exposant d'irrationalité de fractions continues	15
5	Séries de Engel ou fractions continues ascendantes	17
5.1	Exemples	17
5.2	Algorithme de Briggs	17
5.3	Critère de Rationalité	20

2 Fractions continues

À travers cette partie nous étudierons le développement en fractions continues de rationnels, une unicité et dans un second temps nous démontrerons de nombreuses relations de récurrence ou inégalité. Pour étudier la convergence du développement en fraction continue d'un réel. Et finir par évoquer le théorème de meilleure approximation.

2.1 Développement en fraction continue d'un rationnel

Pour développer en fraction continue un réel θ on utilise l'algorithme suivant :

Soit $\Theta \in \mathbb{R}$, on calcule a_0 via la partie entière de $u_0 = \Theta$, $a_0 = \lfloor u_0 \rfloor$, $u_1 = \frac{1}{u_0 - a_0}$ et on recommence $a_n = \lfloor u_n \rfloor$ et $u_n = \frac{1}{u_{n-1} - a_{n-1}}$, on s'arrête si $u_n \in \mathbb{N}$ on obtient donc $[a_0, \dots, a_n] = \Theta$. Sinon, on ne s'arrête pas et c'est une fraction continue infinie.

Définition 2.1.1 (Fraction continue finie). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq 1$, on note la fraction continue allant de a_0 à a_n par :

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Théorème 2.1 (Critère de rationalité). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ alors son développement en fraction continue est fini ssi $\theta \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

On fait la division euclidienne de p par q , on pose $u_0 = p, u_1 = q$

$$u_0 = a_0 u_1 + u_2$$

$$u_1 = a_1 u_2 + u_3$$

...

$$u_{k-1} = a_{k-1} u_k + u_{k+1}.$$

Via des divisions euclidiennes successives, on s'arrête lorsqu'il existe $n \geq 1$ tel que : $u_{n+2} = 0$ ce n existe car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante d'entier (comme u_{k+1} est le reste de la division euclidienne de u_{k-1} par u_k on a $0 \leq u_{k+1} < u_k$) donc s'annule à partir d'un certain rang. Et maintenant on la remonte en regardant la suite

des quotients qui va former notre fraction continue on a : $\frac{p}{q} = [a_0, \dots, a_n]$ on a donc :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = a_n \text{ et } \frac{u_{n-1}}{u_n} = a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \text{ et } \frac{u_0}{u_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

La réciproque peut se montrer par récurrence on montrant que $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{Q}$ pour tout $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ □

Grâce à ce théorème on peut voir une différence notable avec l'écriture décimale, pour l'écriture décimale avoir une "écriture finie" c'est être un nombre décimal alors qu'ici une "écriture finie" c'est être un rationnel.

Exemple :

On veut calculer la fraction continue associée à un rationnel, par exemple $\frac{152}{25}$.

On a par division euclidienne : $152 = 25 \times 6 + 2 \Rightarrow \frac{152}{25} = 6 + \frac{2}{25}$ ainsi $a_0 = 6$, et on refait pareil pour $\frac{25}{2}$, $25 = 2 \times 12 + 1$ d'où $\frac{152}{25} = 6 + \frac{1}{12 + \frac{1}{2}}$.

Théorème 2.2 (Unicité 1). *Si deux fractions continues finies sont égales : $[a_0, \dots, a_n] = [b_0, \dots, b_m]$ avec $n, m \geq 1$ et $a_n, b_m > 1$ alors, $n = m$ et $b_i = a_i$ pour $i = 1, \dots, n$*

Démonstration. On procède par récurrence. Supposons $m \geq n$, on note $A_1 = [a_1, \dots, a_n]$ et $B_1 = [b_1, \dots, b_m]$ on a donc

$$a_0 + \frac{1}{A_1} = b_0 + \frac{1}{B_1}$$

si $n = 1$ donc $A_1 > 1$ par hypothèse, sinon $A_1 > 1$ car $a_1 \in \mathbb{N}^*$ de même pour B_1 . Donc

$$|a_0 - b_0| = \left| \frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right| < 1$$

et comme $|a_0 - b_0| \in \mathbb{Z}$ alors $a_0 - b_0 = 0$ donc $a_0 = b_0$ et $A_1 = B_1$ on peut donc continuer par récurrence si $a_k = b_k$ et $A_{k+1} = B_{k+1}$ on fait la même chose et on obtient le résultat $a_{k+1} = b_{k+1}$. d'où $[a_0, \dots, a_n] = [b_0, \dots, b_n]$ il faut montrer maintenant que $n=m$ si $m > n$

alors $a_n - b_n = B_n - b_n = \frac{1}{[b_{n+1}, \dots, b_m]}$ et $B_{n+1} > 1$ donc $a_n - b_n = 0$ par le même argument du coup $\frac{1}{[b_{n+1}, \dots, b_m]} = 0$ impossible. D'où $m = n$. $\square$

Le critère dans le théorème d'unicité $a_n, b_m \geq 2$ est nécessaire en effet si on ne le prend pas en compte on aurait deux écritures par exemple $2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$ en fait si le dernier coefficient d'une fraction continue est 1 on peut l'insérer dans le coefficient précédent.

2.2 Développement en fraction continue d'un irrationnel

Définition 2.2.1 (Réduite d'une fraction continue). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une fraction continue on appelle sa réduite au rang n la fraction continue suivante $[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n et q_n premier entre eux et $q_n \geq 1$.

On notera p'_n et q'_n lorsque l'on fera commencer la fraction continue au rang 1 c'est à dire : $[a_1, \dots, a_n] = \frac{p'_n}{q'_n}$.

On a donc comme relation $a_0 + \frac{1}{p'_n/q'_n} = \frac{p_n}{q_n}$, d'où : $p_n = a_0 p'_n + q'_n$ et $q_n = p'_n$. Car (p_n, q_n) est un couple d'entier premier entre eux aussi le couple (p'_n, q'_n)
Nous avons grâce à ces relations, des relations de récurrence pour p_n et q_n :

Proposition 2.2.2.

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (2.1)$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \quad (2.2)$$

Démonstration. Montrons-le par récurrence.

On le vérifiera par un calcul direct pour $n = 2$. Soit $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} p_n &= a_0 p'_n + q'_n \\ &= a_0(a_n p'_{n-1} + p'_{n-2}) + (a_n q'_{n-1} + q'_{n-2}). \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence sur p'_n et q'_n en tant que fractions continues à $n-1$ et $n-2$ termes. On trouve

$$p_n = a_n(a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1}) + (a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2})$$

En factorisant par a_n on obtient

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}.$$

On peut faire la même chose pour q_n . □

Proposition 2.2.3. Soit $n \geq 1$ on a les égalités suivantes

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1} \quad (2.3)$$

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n. \quad (2.4)$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$, soit $P_n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$ en utilisant les relations de récurrence pour p_n et q_n on a :

$$P_n = \begin{pmatrix} a_n p_{n-1} + p_{n-2} & p_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

et il se trouve que la première équation est précisément le déterminant de P_n . Par multilinéarité on a $\det P_n = \begin{vmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{vmatrix} = -\det P_{n-1}$ or $P_1 = \begin{pmatrix} a_0 a_1 + 1 & a_0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det P_1 = 1$ et donc par récurrence immédiate on obtient le résultat recherché.

Pour la deuxième relation on refait pareil mais avec la matrice $Q_n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-2} \\ q_n & q_{n-2} \end{pmatrix}$. □

Proposition 2.2.4. Soit $n \geq 0$ les suites $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ et $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$ sont adjacentes.

Démonstration. Par l'équation (2.4) on voit que $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ est croissante et que $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$ est décroissante. En effet $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} + \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$ et donc en fonction de la parité de n on obtient la croissance ou décroissance voulu. Leurs différence tend vers 0. En effet par (2.3) on a $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}$ qui tend vers 0 donc elles sont adjacentes. □

Définition 2.2.5. Restes de fractions continues et "associativité" : Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note son développement en fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$, on appelle reste au rang n la fraction continue $\Theta_n = [a_n, \dots]$. Cette notation est à prendre au sens du reste obtenu lorsque l'on suit l'algorithme de développement en fraction continue d'un nombre et que l'on s'arrête après avoir calculé a_{n-1} . On a "l'associativité" suivante : $[a_0, \dots, a_n, \dots] = [a_0, \dots, a_{n-1}, \Theta_n]$ et de plus $\Theta_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\Theta_n}$.

Proposition 2.2.6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note son développement en fraction continue $[a_0, \dots, a_n, \dots]$. On a :

$$\Theta = \frac{\Theta_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\Theta_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad (2.5)$$

Démonstration. Montrons-le par récurrence.

Initialisation : pour $n = 2$ on a

$$\Theta = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\Theta_2}} = a_0 + \frac{\Theta_2}{\Theta_2 a_1 + 1} = \frac{\Theta_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{\Theta_2 a_1 + 1} = \frac{\Theta_2 p_1 + p_0}{\Theta_2 q_1 + q_0}.$$

Hérédité : soit $n \geq 3$ tel que (2.5) soit vrai au rang $n-1$. Alors

$$\frac{\Theta_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\Theta_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{\frac{1}{\Theta_{n-1} - a_{n-1}} p_{n-1} + p_{n-2}}{\frac{1}{\Theta_{n-1} - a_{n-1}} q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_{n-1} + p_{n-2}(\Theta_{n-1} - a_{n-1})}{q_{n-1} + q_{n-2}(\Theta_{n-1} - a_{n-1})} = \frac{\Theta_{n-1} p_{n-2} + p_{n-3}}{\Theta_{n-1} q_{n-2} + q_{n-3}}.$$

Et donc par l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{\Theta_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\Theta_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \Theta.$$

□

De cette égalité, on obtient que pour tout $n \geq 1$:

$$\Theta - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\Theta_{n+1} q_n + q_{n-1})} \quad (2.6)$$

Démonstration. en effet :

$$\Theta - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\Theta_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\Theta_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n(\Theta_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

par (2.3)

$$\Theta - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\Theta_{n+1} q_n + q_{n-1})}.$$

□

Proposition 2.2.7 (Inégalités). Soit $n \geq 1$,

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left| \Theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \quad (2.7)$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$, puisque $\Theta_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{\Theta_{n+2}}$ on a $\Theta_{n+1} > a_{n+1}$ d'où $\Theta_{n+1}q_n + q_{n-1} > q_{n+1}$. On applique cette inégalité dans l'égalité précédente et on obtient donc le résultat voulu.

Pour la deuxième inégalité, comme les suites $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$ sont adjacentes elles convergent vers une même limite par l'inégalité précédente la limite est θ . Donc on a l'inégalité suivante :

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \geq \theta \geq \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \quad (2.8)$$

$\left|\Theta - \frac{p_n}{q_n}\right| > \left|\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{a_{n+2}}{q_{n+2}q_n} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)q_n}$ et en divisant par a_{n+2} et en le minorant par 1 on a donc bien l'inégalité manquante. $\square$

Ces inégalités justifient entre autre cette notation d'infini dans les fractions continues car comme q_n est une suite strictement croissante d'entier elle diverge vers $+\infty$ donc les réduites converge vers θ .

Théorème 2.3 (Unicité 2). *Si deux fractions continues infinies sont égales :*
 $[a_0, \dots, a_n, \dots] = [b_0, \dots, b_n, \dots]$ alors,

$$b_i = a_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Démonstration. On a la même récurrence que dans le théorème d'unicité pour des fractions continues finies $\square$

Il y'a donc une unique fraction continue pour chaque irrationnel.

Théorème 2.4 (dit de meilleure approximation). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, p et q des entiers tels que $0 < q < q_{n+1}$ alors,*

$$|p - q\theta| \geq |p_n - q_n\theta|.$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$ comme $A = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix}$ a pour déterminant $(-1)^{n+1}$ (inversible dans $\mathbb{Z}$) il existe u et v des entiers tel que

$$p = up_n + vp_{n+1}$$

$$q = uq_n + vq_{n+1}$$

si $u = 0$, $q = vq_{n+1}$ ce qui est incompatible avec l'hypothèse. Donc $u \neq 0$. Si $v = 0$ l'inégalité est vérifiée. Alors sinon,

$$\begin{aligned} |q\theta - p| &= |\theta(uq_n + vq_{n+1}) - (up_n + vp_{n+1})| \\ &= |u(q_n\theta - p_n) + v(q_{n+1}\theta - p_{n+1})| \end{aligned}$$

Or u et v sont de signes opposés. En effet si $v \geq 1$, comme $q < q_{n+1}$ on a $uq_n \leq (1-v)q_{n+1}$ et donc u est négatif. Si v est négatif, q étant positif uq_n l'est aussi donc u aussi. Par l'égalité (2.6), comme $\theta_{n+2}q_{n+1} + q_n$ et $\theta_{n+1}q_n + q_{n-1}$ sont tout les deux positifs. Alors $q_n\theta - p_n$ et $q_{n+1}\theta - p_{n+1}$ sont aussi de signes opposés. Donc

$$\begin{aligned} |q\theta - p| &= |u(q_n\theta - p_n) + v(q_{n+1}\theta - p_{n+1})| \\ &= |u(q_n\theta - p_n)| + |v(q_{n+1}\theta - p_{n+1})| \\ &\geq |q_n\theta - p_n|. \end{aligned}$$

$\square$

Ce théorème justifie le terme de "bonne approximation" employé dans mon introduction, et donc l'intérêt de l'utilisation de fractions continues dans des questions d'approximation diophantienne.

Théorème 2.5. Soient p, q deux entiers tel que $\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$, alors il existe n tel que

$$\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Démonstration. Comme la suite $(q_n)_n$ est croissante il existe un entier n tel que $q_n \leq q < q_{n+1}$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| &\leq \left| \theta - \frac{p}{q} \right| + \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q_n} \right) |q\theta - p| \\ \Rightarrow |pq_n - qp_n| &\leq (q_n + q) |q\theta - p| \\ &< 2q \frac{1}{2q} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } |pq_n - qp_n| = 0 \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}.$$

□

Nous allons donc finir cette partie par des exemples de développement en fractions continues d'irrationnels :

Pour e sa fraction continue a été entièrement développée par Euler, on a $e^{\frac{1}{s}} = [1, s - 1, 1, 1, 3s - 1, 1, 1, 5s - 1, 1, \dots]$. D'où pour $s=1$ $e = [2, 1, 2, 1, 1, \dots, 1, 2k, 1, \dots]$ Ce qui montre entre autre l'irrationalité de e .

Pour π nous n'avons pas de formule explicite à ce jour, les premiers termes de son développement en fraction continue sont $\pi = [3, 7, 15, \dots]$

3 Fractions Continues et nombres quadratiques

Cette porte autour de l'étude des développements en fractions continues de nombres quadratiques, donc dans un premier temps nous démontrerons un critère de périodicité. Ensuite nous ferons une application sur l'équation diophantienne de Pell-Fermat

3.1 Critère autour des nombres quadratiques

Théorème 3.1 (Théorème de Lagrange). *Un irrationnel est quadratique si et seulement si son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang*

Démonstration. $\Rightarrow$ Soit φ un irrationnel, on suppose que son développement est purement périodique. C'est à dire qu'il existe $N \geq 2$ tel que

$$\varphi = [a_0, \dots, a_{N-1}, \varphi].$$

On notera cette périodicité de la manière suivante :

$$\varphi = [\overline{a_0, \dots, a_{N-1}}].$$

Par (2.5) on obtient

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\varphi p_{N-1} + p_{N-2}}{\varphi q_{N-1} + q_{N-2}} \\ \Rightarrow \varphi(\varphi q_{N-1} + q_{N-2}) &= \varphi p_{N-1} + p_{N-2} \\ \Rightarrow \varphi^2 q_{N-1} + \varphi[q_{N-2} - p_{N-1}] - p_{N-2} &= 0\end{aligned}$$

φ est donc un nombre quadratique. Si maintenant son développement est périodique à partir du rang $n+1$, $\varphi = [a_0, \dots, a_n, \overline{a_{n+1}, \dots, a_{N+n-1}}]$

$$\varphi = [a_0, \dots, a_n, \varphi_{n+1}]$$

où $\varphi_{n+1} = [\overline{a_{n+1}, \dots, a_{N+n-1}}]$, φ_{n+1} est donc racine d'un polynôme de degré 2.

Et

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi_{n+1}q_n + q_{n-1}) &= \varphi_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ \varphi_{n+1} &= \frac{-\varphi q_{n-1} + p_{n-1}}{\varphi q_n - p_n},\end{aligned}$$

d'où φ_{n+1} est un nombre quadratique par ce qu'on a montré précédemment. Donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $a\varphi_{n+1}^2 + b\varphi_{n+1} + c = 0$

$$a \left(\frac{-\varphi q_{n-1} + p_{n-1}}{\varphi q_n - p_n} \right)^2 + b \left(\frac{-\varphi q_{n-1} + p_{n-1}}{\varphi q_n - p_n} \right) + c = 0$$

$$a(-\varphi q_{n-1} + p_{n-1})^2 + b(-\varphi q_{n-1} + p_{n-1})(\varphi q_n - p_n) + c(\varphi q_n - p_n)^2 = 0.$$

Il existe donc un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ du degré 2 annulant φ donc φ est un nombre quadratique.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si φ est un nombre quadratique, il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tq φ est racine du polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ posons donc la forme quadratique : $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ φ est donc racine de $f(x, 1)$. On note $f_n(x, y) = f(xp_n + yp_{n-1}, xq_n + yq_{n-1})$ où $f_n(\varphi_{n+1}, 1) = f(\varphi_{n+1}p_n + p_{n-1}, \varphi_{n+1}q_n + q_{n-1})$

$$= f \left(\frac{\varphi_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\varphi_{n+1}q_n + q_{n-1}}, 1 \right) (\varphi_{n+1}q_n + q_{n-1})^2 = 0.$$

Montrons qu'il y'a un nombre fini de φ_n , pour cela notons $f_n(x, y)$ différemment :

$$\begin{aligned}f_n(x, y) &= a(xp_n + yp_{n-1})^2 + b(xp_n + yp_{n-1})(xq_n + yq_{n-1}) + c(xq_n + yq_{n-1})^2 \\ &= a_n x^2 + b_n xy + c_n y^2,\end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{aligned}a_n &= ap_n^2 + bp_nq_n + cq_n^2 \\ b_n &= 2ap_n p_{n-1} + b(p_n q_{n-1} + q_n p_{n-1}) + 2cq_n q_{n-1} \\ c_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2.\end{aligned}$$

Notons que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites d'entiers. Montrons qu'elles sont bornées, donc qu'elles prennent un nombre fini de valeurs car ce sont des suites d'entiers.

Ainsi $(f_n(x, 1))_{n \in \mathbb{N}}$ aura un nombre fini de polynômes, donc de racines, donc il y'aura un nombre fini de φ_{n+1} , Commençons par $(a_n)_n$ et $(c_n)_n$:

$$a_n = f_n(1, 0) = f(p_n, q_n) = q_n^2 f\left(\frac{p_n}{q_n}, 1\right).$$

On a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p_n}{q_n}, 1\right) &= f\left(\frac{p_n}{q_n}, 1\right) - f(\varphi, 1) \\ &= \left(\frac{p_n}{q_n} - \varphi\right)\left(a\left(\frac{p_n}{q_n} + \varphi\right) + b\right). \end{aligned}$$

Et $\left|\frac{p_n}{q_n} - \varphi\right| \leq 1$ par construction de $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, \dots, a_n]$. D'où

$$\left|a\left(\frac{p_n}{q_n} + \varphi\right) + b\right| \leq a \left|\frac{p_n}{q_n} - \varphi\right| + 2|\varphi| + |b| \leq |a|(2|\varphi| + 1) + |b|.$$

Et par l'inégalité (2.7) on a $\left|\frac{p_n}{q_n} - \varphi\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$. D'où

$$|a_n| \leq |q_n^2| \left|\frac{p_n}{q_n} \pm 1\right| \leq |a|(2|\varphi| + 1) + |b|$$

Donc $(a_n)_{n \geq N}$ est bornée et comme c'est une suite d'entiers elle prend donc un nombre fini de valeurs. Or $c_n = a_{n-1}$ donc $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi. Pour $(b_n)_{n \geq N}$, on va regarder les matrices associées à chacune des formes quadratiques :

$$F = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}, F_n = \begin{pmatrix} a_n & \frac{1}{2}b_n \\ \frac{1}{2}b_n & c_n \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a

$$PFP^T = F_n$$

car

$$f_n(x, y) = f(xp_n + yp_{n-1}, xq_n + yq_{n-1})$$

et $\det(P_n) = p_n q_n + q_n p_{n+1} = (-1)^{n+1}$ donc,

$$\begin{aligned} \det(P) &= \det(P_n) \\ \Rightarrow b^2 - 4ac &= b_n^2 - 4a_n c_n. \end{aligned}$$

Ainsi $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs et donc $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend aussi un nombre fini de valeurs, Ainsi il existe N, M avec $M > N$ tel que : $\varphi_N = \varphi_M$.

On a

$$\begin{aligned} \varphi &= [a_0, \dots, a_{N-1}, \varphi_N] \\ \varphi_N &= [k_0, \dots, k_s, \varphi_M] \\ &= [k_0, \dots, k_s, \varphi_N], \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi = [a_0, \dots, a_{N-1}, \overline{k_0, \dots, k_s}].$$

Donc la suite associée à sa décomposition est périodique à partir d'un certain rang. $\square$

De ce théorème on voit encore une différence notable qui apparaît avec l'écriture décimale, pour l'écriture décimale avoir une écriture périodique à partir d'un certain rang c'est être un rationnel ici c'est être un nombre quadratique.

Lemme 3.1.1. *Soit $d \geq 2$ un entier et qui n'est pas le carré d'un entier. Alors il existe $n \geq 1$ tel que le développement en fraction continue de $\sqrt{d}$ est périodique à partir du rang 1 :*

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_n}].$$

Démonstration. Notons θ tel que $\sqrt{d} = a_0 + \frac{1}{\theta}$ on pose

$$P(X) = (a_0^2 - d)X^2 + 2a_0X + 1.$$

Puisque θ annule P , il est quadratique. Il est plus grand que 1 par construction de la fraction continue, et $P(0)=1$, $P(-1)=(a_0 - 1)^2 - d < 0$ donc la seconde racine $\bar{\theta}$ de P est dans $] -1, 0[$.

Montrons que sous ces conditions θ admet un développement purement périodique. Notons θ_n son reste au rang et $(u_n)_n$ les éléments de sa fraction continue pour cela montrons ça

$$\overline{\theta_{k+1}} = \frac{1}{\overline{\theta_k} - a_k}. \quad (3.1)$$

Par récurrence, initialisation : $\theta = \theta_0 = a_0 + \frac{1}{\theta_1}$ et $X^2P(a_0 + \frac{1}{X})$ est annulé par θ_1 , donc $\bar{\theta}_1$ la racine conjuguée vérifie $a_0 + \frac{1}{\bar{\theta}_1} = \bar{\theta}$ d'où le résultat demandé et de plus $\bar{\theta}_1 \in] -1, 0[$ car $a_0 > 1$

Hérédité : Si $\overline{\theta_k} = \frac{1}{\overline{\theta_{k-1}} - a_{k-1}}$ on refait pareil qu'à l'initialisation avec P_k le polynôme annulant θ_k et que $[a_0, \theta_{k+1}] = \theta_k$ donc on a bien

$$\overline{\overline{\theta_{k+1}}} = a_0 - \overline{\theta_k},$$

et de même $\overline{\theta_{k+1}} \in] -1, 0[$.

La dernière égalité nous dit que a_k est la partie entière de $\frac{-1}{\overline{\theta_{k+1}}}$. comme θ est quadratique il existe n et m tel que $\theta_n = \theta_m$ donc de même pour les conjugués des $(\theta_k)_k$ donc par unicité de la partie entière $a_{n-1} = a_{m-1}$ donc $\theta_{n-1} = \theta_{m-1}$ et ainsi de suite jusqu'à $\theta_{n-m} = \theta_0$. □

Voici en exemple des développements en fraction continue de nombres quadratiques.

1) Pour le nombre d'or $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ on a $\varphi^2 = \varphi + 1$ donc $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. En posant la suite

$u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$ et $u_0 = 1$ et via une étude de la suite on peut montrer qu'elle converge vers φ d'où $\varphi = [1]$.

2) Pour d'autres nombres quadratiques pour faire le calcul à la main des éléments de la suite

$(a_n)_n$ on utilise la relation $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) : 1 < \sqrt{2} < 2$, donc $\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1$ avec $\sqrt{2} - 1 < 1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}\end{aligned}$$

et de la même manière on a donc $\sqrt{2} = [1, \bar{2}]$.

3.2 Equation de Pell-Fermat

Soit d un entier naturel qui n'est pas un carré, on appelle l'équation de Pell-Fermat, l'équation diophantienne suivante :

$$x^2 - dy^2 = 1.$$

Proposition 3.2.1. *Soit (x, y) un couple de solutions de l'équation de Pell-Fermat. Si y est non nul, alors $\frac{x}{y}$ est une réduite de la fraction continue de $\sqrt{d}$. Autrement dit, il existe n tel que $x = p_n$ et $y = q_n$.*

Démonstration. $x^2 = 1 + dy^2 \Rightarrow x > y\sqrt{d} > y$ donc

$$|x - y\sqrt{d}| = x - y\sqrt{d} = \frac{1}{x + y\sqrt{d}} < \frac{1}{2y},$$

donc $\frac{x}{y}$ est une réduite de la fraction continue de $\sqrt{d}$. □

Notons m la plus petite période du développement de $\sqrt{d}$ en fraction continue.

Théorème 3.2. *Soit n un entier naturel, $\frac{p_n}{q_n}$ la réduite au rang n de la fraction continue de $\sqrt{d}$, alors (p_n, q_n) est solution de l'équation de Pell-Fermat si et seulement si n est impair et $n + 1$ est un multiple de m*

Démonstration. Comme (p_n, q_n) est solution, on a $p_n > q_n\sqrt{d}$, donc n est impair (2.2.4) .

On a

$$\sqrt{d} = \frac{\theta_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\theta_{n+1}q_n + q_{n-1}},$$

donc

$$\theta_{n+1}(p_n - q_n\sqrt{d}) = -(p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{d}).$$

On multiplie par $p_n + q_n\sqrt{d}$, d'où :

$$\theta_{n+1}(p_n^2 - q_n^2d) = -(p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{d})(p_n + q_n\sqrt{d}).$$

Comme (p_n, q_n) est solution :

$$\theta_{n+1} = \sqrt{d}(-1)^{n+1} + q_{n-1}q_nd + p_{n-1}p_n$$

Or n est impair donc :

$$\theta_{n+1} = \sqrt{d} + K$$

où $K = q_{n-1}q_nd + p_{n-1}p_n$. Ainsi

$$\theta_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{\theta_{n+2}} \text{ et } \sqrt{d} = a_0 + \frac{1}{\theta_1}$$

d'où

$$a_{n+1} + \frac{1}{\theta_{n+2}} = a_0 + \frac{1}{\theta_1} + K.$$

Et donc par construction des fractions continues (comme $\theta_k > 1$ et par unicité de la partie entière), $a_{n+1} = a_0 + K$ et $\theta_{n+2} = \theta_1$. Donc $n + 2 = km + 1$ d'où $n + 1$ est un multiple de m .

Réciproquement, si n est impair et $n + 1$ est un multiple de m . Alors on peut plus ou moins remonter les calculs, $n + 2 = km + 1 \Rightarrow \theta_{n+2} = \theta_1$ d'où

$$\sqrt{d} - a_0 = \frac{1}{\theta_{n+2}}$$

Comme ,

$$\sqrt{d} = \frac{\theta_{n+2}p_{n+1} + p_n}{\theta_{n+2}q_{n+1} + q_n} = \frac{p_{n+1} + p_n(\sqrt{d} - a_0)}{q_{n+1} + q_n(\sqrt{d} - a_0)}.$$

Donc

$$\sqrt{d}(q_{n+1} - q_na_0 - p_n) = p_{n+1} - p_na_0 - q_nd.$$

Comme $\sqrt{d}$ est irrationnel et $p_{n+1} - p_na_0 - q_nd \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} q_{n+1} - q_na_0 &= p_n \\ p_{n+1} - p_na_0 &= q_nd. \end{aligned}$$

D'où

$$p_n^2 - dq_n^2 = (q_{n+1} - q_na_0)p_n - (p_{n+1} - p_na_0)q_n = q_{n+1}p_n - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}$$

et n étant impair on a bien : $p_n^2 - dq_n^2 = 1$. □

4 Approximation Diophantienne

Dans cette partie, nous allons étudier quelques propriétés autour de l'exposant d'irrationalité un objet qui permet de comprendre à quel point on peut approximer un irrationnel par des rationnels. Et enfin nous construirons explicitement une fraction continue pour chaque exposants atteignable par un irrationnel.

4.1 Exposant d'irrationalité

Définition 4.1.1. On définit l'exposant d'irrationalité $\mu(x)$ d'un réel x par le supremum des réels $\mu \geq 0$ tels qu'il existe une infinité de couples d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux vérifiant

$$|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\mu}.$$

Proposition 4.1.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mu(x) \geq 1$.

Démonstration. En effet, si $\mu = 1$ il suffit de montrer qu'il y a une infinité de couples (p, q) tels que $|qx - p| \leq 1$. On peut donc choisir $q = n$ et $p = \lfloor nx \rfloor$ pour $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Théorème 4.1. Si x est irrationnel, alors $\mu(x) \geq 2$.

Démonstration. En utilisant la décomposition en fraction continue grâce aux réduites on a une démonstration directe via l'inégalité

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Sinon, on peut montrer que pour tout N il existe p, q avec q compris entre 0 et N et tel que

$$|qx - p| < \frac{1}{N}.$$

Via le principe des tiroirs de Dirichlet. L'intervalle $[0, 1[$ est divisé en N tranches de valeurs $\frac{1}{N} : [0, \frac{1}{N}[, [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}[, \dots, [\frac{N-1}{N}, 1[$ et on a $N + 1$ multiples : $0, 1x, 2x, \dots, Nx$. La partie fractionnaire $(\{\theta\} = \theta - \lfloor \theta \rfloor)$ de chacun est entre 0 et 1, par le principe du tiroir, il y'a donc deux $\{kx\}$ et $\{k'x\}$ avec $k' < k$ dans le même intervalle autrement dit $|\{kx\} - \{k'x\}| < \frac{1}{N}$ donc kx et $k'x$ s'approchent d'un nombre entier à moins de $1/N$ il suffit de noter p ce nombre entier et $q = k - k'$. Ainsi pour chaque N il existe (p, q) tel que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN} < \frac{1}{q^2}.$$

Donc il y'en a une infinité en notant (p_N, q_N) les couples. $\square$

Théorème 4.2 (Liouville). La mesure d'irrationalité d'un réel algébrique x de degré $d \geq 1$ est inférieure ou égale à son degré

Démonstration. Soit $P[X] \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que $P(x)=0$.

Montrons qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall (p, q) \quad \left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{K}{q^d}$$

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, si $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq 1$ on peut prendre $K=1$.

Sinon $\frac{p}{q} \in [x - 1, x + 1]$, donc par l'inégalité des accroissements finis,

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right) - P(x)\right| \leq M \left|\frac{p}{q} - x\right|$$

avec $M = \max_{t \in [x-1, x+1]} |P'(t)|$

et $q^d (P(\frac{p}{q}) - P(x)) = q^d P(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}^*$ car P est irréductible sur $\mathbb{Q}$ donc le module est plus grand que 1 d'où :

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right) - P(x)\right| \geq \frac{1}{q^d}$$

et :

$$\left| \frac{p}{q} - x \right| \geq \frac{1}{Mq^d},$$

en prenant $K = \min(\frac{1}{M}, 1)$, on a le résultat voulu.

Montrons que dans ce cas $\mu(x) \leq d$:

Soit $\varepsilon > 0$, pour q suffisamment grand on a $\frac{K}{q^d} > \frac{1}{q^{d+\varepsilon}}$. Pour toute les valeurs de q plus petites (donc en nombre fini) ne vérifiant donc pas cette inégalité on a :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{d+\varepsilon}}$$

que pour un nombre fini de valeur de p d'où $d + \varepsilon \geq \mu(x)$ donc $d \geq \mu(x)$. □

Théorème 4.3 (Roth). *Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ algébrique, alors $\mu(x) = 2$*

On ne démontrera pas ce théorème qui est beaucoup plus fort que le théorème précédent pour lequel on avait qu'un simple majoration de l'exposant d'irrationalité.

4.2 Exposant d'irrationalité de fractions continues

Montrons maintenant que toutes les valeurs de $\mu(x)$ peuvent être atteintes grâce aux fractions continues. C'est-à-dire construisons une fraction continue ayant pour mesure d'irrationalité un réel $C \in [2, +\infty]$.

Pour cela, montrons cette propriété :

Proposition 4.2.1. *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un irrationnel. Notons $[a_0, \dots, a_n, \dots]$ sa fraction continue et $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ la suite de ses réduites. Alors*

$$\mu(x) = 1 + \limsup_{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n}.$$

Démonstration. Soit $n \geq 2$. Soit μ_n tel que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^{\mu_n}}.$$

Montrons que $\mu(x) = \limsup_{+\infty} \mu_n$. En effet, Soit $k < \limsup \mu_n$, alors il y'a une infinité de

n tel que $\mu_n > k$ donc il y'a une infinité de n tel que $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^k}$ donc $\mu(x) \geq k$. Donc à la limite $\mu(x) \geq \limsup \mu_n$

Réciproquement, si $\mu(x) = 2$ par (2.7) on a $\mu_n \geq 2$ pour tout $n \geq 2$ donc par l'inégalité précédente $\mu(x) = \limsup \mu_n$. Soit $k > 2$ et $\mu(x) > k$, il existe une infinité de couples (p, q) tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}.$$

Puisque $k > 2$ pour q suffisamment grand $\frac{1}{q^k} < \frac{1}{2q^2}$ d'où p, q forme des réduites pour q suffisamment grand. Donc il y'a une infinité de réduites tels que

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^k}$$

donc une infinité de n tels que

$$\mu_n \geq k.$$

À la limite on a $\limsup \mu_n \geq k$. Et donc par passage au supremum on obtient $\limsup \mu_n \geq \mu(x)$.

Par (2.7), on obtient

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} < |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

En appliquant $\ln$ à cette inégalité on a :

$$-\ln(2q_n q_{n+1}) < -\mu_n \ln(q_n) < -\ln(q_n q_{n+1})$$

$$1 + \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} < \mu_n < 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(q_n)} + \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n}.$$

D'où à la limite en appliquant le théorème des gendarmes : $\mu(x) = 1 + \limsup_{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n}$. □

Maintenant construisons la fraction continue : pour cela posons $q_0 = 1, q_1 = 2$ et construisons la suite $(q_n)_n$ avec $a_{n+1} = \lfloor q_n^{K-1} \rfloor$ avec $K > 1$.

Ainsi $q_{n+1} = q_n \lfloor q_n^{K-1} \rfloor + q_{n-1}$. Montrons donc que $q_{n+1} \sim q_n^K$. En effet : Comme $q_{n-1} \leq q_n$ on a que $q_{n-1} = o(q_n^K)$ de même pour $\text{frac}(q_n^K) \leq 1$ donc $\text{frac}(q_n^K) = o(q_n^{K-1})$.

D'où :

$$\frac{q_n \lfloor q_n^{K-1} \rfloor}{q_n^K} + \frac{q_{n-1}}{q_n^K} = \frac{q_n^{K-1} - \text{frac}(q_n^{K-1})}{q_n^{K-1}} + \frac{q_{n-1}}{q_n^K} \longrightarrow 1.$$

$$\text{Donc } \mu(x) = 1 + \limsup \frac{\ln(q_{n+1})}{\ln(q_n)} = 1 + \limsup \frac{\ln(q_n^K) + \ln(1 + \frac{o(q_n^K)}{q_n^K})}{\ln(q_n)}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = K + 1.$$

Ainsi s'il on veut une fraction continue de mesure d'irrationalité C avec $C \in [2, +\infty]$: Pour $+\infty > C > 2$, on procède comme précédemment avec $K=C-1$. Pour $C=2$ il suffit de faire la fraction continue d'un nombre quadratique par exemple le nombre d'or et pour $C = +\infty$ on peut prendre $K_n = n$ et faire le même procédé qu'avant. On aura

$$\mu(x) = 1 + \limsup (n + \frac{\ln(1 + \frac{o(q_n^n)}{\ln(q_n^n)})}{\ln(q_n)}) \longrightarrow +\infty.$$

5 Séries de Engel ou fractions continues ascendantes

Dans cette partie nous allons décrire les séries de Engel, énoncer un théorème d'unicité et décrire le développement en série de Engel d'un nombre rationnel comme pour les fractions continues. Pour la suite nous utiliserons $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls.

Définition 5.0.1. On définit la série de Engel associée à la suite par : $S = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1 a_0} + \frac{1}{a_2 a_1 a_0} + \dots = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\prod_{i=1}^k a_i}$

Si l'on regarde les sommes partielles :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1 a_0} + \dots + \frac{1}{a_N \dots a_0} \\ &= \frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{1}{a_1} \left(\dots \left(1 + \frac{1}{a_N} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1 + \frac{1}{a_N}}{a_0} \\ &= \frac{1 + \frac{\dots}{a_1}}{a_0} \end{aligned}$$

D'où le nom de fractions continues ascendantes.

5.1 Exemples

Soit $a \in \mathbb{N} \geq 2$ Si $a_n = a$ pour tout n . La série de Engel associée est la série géométrique c'est-à-dire $S = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a-1}$.

Pour $e-1$ on a via sa série entière : $e-1 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$ donc la suite vérifiant $a_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ convient.

5.2 Algorithme de Briggs

Soit $x_0 \in]0, 1]$

$$\begin{aligned} u_0 &= \left\lfloor \frac{1}{x_0} \right\rfloor + 1 \\ x_1 &= U_0 x_0 - 1 \end{aligned}$$

Et on construit la suite par récurrence :

$$\begin{aligned} u_n &= \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor + 1 \\ x_{n+1} &= U_n x_n - 1 \end{aligned}$$

Proposition 5.2.1. La série de terme général $\frac{1}{U_0 \dots U_n}$ converge vers x_0 . Autrement dit x_0 admet une série d'Engel associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. on a :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= U_n x_n - 1 \\x_n &= \frac{1}{U_n} + \frac{x_{n+1}}{U_n} \\x_{n-1} &= \frac{1}{U_{n-1}} + \frac{x_n}{U_{n-1}}\end{aligned}$$

d'où

$$x_{n-1} = \frac{1}{U_{n-1}} + \frac{1}{U_{n-1}U_n} + \frac{x_{n+1}}{U_{n-1}U_n}$$

par récurrence on a que :

$$x_0 = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_0U_1} + \dots + \frac{x_{n+1}}{U_0U_1 \dots U_n}$$

Il nous suffit de montrer que :

$$\frac{x_{n+1}}{U_0 \dots U_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

car il s'agit du reste de la série.

$$0 < x_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (5.1)$$

en effet :

$$\begin{aligned}\lfloor \frac{1}{x_n} \rfloor &\leq \frac{1}{x_n} < \lfloor \frac{1}{x_n} \rfloor + 1 \\U_n - 1 &\leq \frac{1}{x_n} < U_n\end{aligned}$$

et donc par récurrence comme $0 < x_0$ Si $0 < x_n$ alors

$$1 < U_n x_n$$

donc

$$0 < x_{n+1}$$

Et

$$\begin{aligned}U_n x_n - 1 &\leq 1 \\ \Rightarrow U_n x_n - 1 &\leq x_n \\ \Rightarrow x_{n+1} &\leq x_n\end{aligned}$$

donc $(x_n)_n$ est décroissante d'où $0 < x_n \leq x_0 \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Montrons que :

$$\forall n \quad U_n \geq 2. \quad (5.2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor + 1,$$

Or $x_n \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n} \geq 1$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor \geq 1$$

d'où le résultat désiré.

Grâce à ces inégalités on peut majorer le reste de la série :

$$\frac{x_{n+1}}{U_0 \cdots U_n} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D'où

$$x_0 = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1 U_0} + \frac{1}{U_2 U_1 U_0} + \cdots .$$

□

Proposition 5.2.2 (Unicité). *Soit $x_0 \in]0, 1]$. Si $x_0 = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1 m_0} + \cdots$ avec $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls croissante. Alors $m_n = U_n$ Pour tout n .*

Démonstration. Soit $x_0 \in]0, 1]$ alors $\frac{1}{m_0} < 1$,

$$\Rightarrow m_0 > 1$$

$$\Rightarrow m_0 \geq 2$$

$$\Rightarrow m_0 \cdots m_n \geq 2^{n+1}$$

Par croissance de $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

D'où, comme pour la propriété précédente, la somme converge bien.

$$m_0 x_0 - 1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1 m_2} + \cdots .$$

Comme (m_n) est croissante :

$$\frac{1}{m_0} \geq \frac{1}{m_1}$$

$$\frac{1}{m_0 m_1} \geq \frac{1}{m_1 m_2},$$

etc...

D'où :

$$m_0 x_0 - 1 \leq \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_0 m_1} + \cdots = x_0,$$

$$\Rightarrow m_0 \leq 1 + \frac{1}{x_0}.$$

Et $x_0 > \frac{1}{m_0} \Rightarrow \frac{1}{x_0} < m_0$, car $x_0 = \frac{1}{m_0} + \cdots$

De $m_0 - 1 \leq \frac{1}{x_0} \leq m_0$ et $m_0 \in \mathbb{N}$. On a donc que $m_0 = \lfloor \frac{1}{x_0} \rfloor + 1$, d'où $m_0 = U_0$.

Et on fait de même par récurrence avec :

$$x_1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1 m_2} + \cdots = \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_1 U_2} + \cdots$$

$\vdots$

$$x_n = \frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_n m_{n+1}} + \cdots = \frac{1}{U_n} + \frac{1}{U_n U_{n+1}} + \cdots$$

□

5.3 Critère de Rationalité

Théorème 5.1 (Critère de Rationalité pour les séries de Engel). *Soit $x_0 \in]0, 1]$, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de son développement en série de Engel est constante à partir d'un certain rang si et seulement si $x_0 \in \mathbb{Q}$.*

Démonstration. $\implies$: Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir du rang N alors $x_N = \frac{1}{U_N} + \frac{1}{U_N U_N} + \dots = \frac{1}{U_N - 1}$ qui est rationnel donc x_0 aussi car $x_0 = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_0 U_1} + \dots + \frac{x_N}{U_2 U_3 \dots U_{N-1}}$.

$\impliedby$: Si $x_0 = \frac{p_0}{q_0}$ un rationnel on fait la division euclidienne de q_0 par p_0 :

$$q_0 = p_0 l_0 + r_0 \text{ avec } 0 \leq r_0 < p_0$$

$$x_1 = U_0 x_0 - 1 = \left(\left\lfloor \frac{q_0}{p_0} \right\rfloor + 1 \right) \frac{p_0}{q_0} - 1$$

$$\Rightarrow x_1 = (l_0 + 1) \frac{p_0}{q_0} - 1 = \frac{p_0 l_0 + p_0 - q_0}{q_0} = \frac{p_0 - r_0}{q_0}$$

On pose :

$$p_1 = p_0 - r_0$$

$$p_2 = p_0 - r_0 - r_1$$

$$\vdots$$

$$p_n = p_{n-1} - r_n.$$

Avec les r_n les restes des divisions euclidiennes de q_0 par p_n . Et donc la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'entier naturel donc constante à partir d'un certain rang. On a $x_n = \frac{p_n}{q_0}$ donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang, donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang. $\square$

De ce théorème on obtient l'irrationalité de tout plein de nombres : e , $\cosh(1)$, $\sinh(1)$, $e^{\sqrt{2}}$, ...