Inégalité de Sobolev logarithmique

PASCAL Tom (p1930424)

26 juin 2024

Résumé

Ce rapport aura pour but de constituer une introduction aux inégalités de Sobolev logarithmiques, utilisées de plus en plus dans des domaines comme l'analyse, la géométrie ou les probabilités. Nous nous intéresserons donc à établir ces inégalités dans les cas des mesures de Bernoulli puis de Gauss, et nous aurons aussi l'occasion d'étudier le cas similaire des inégalités de Poincaré.
L'étude de ces inégalités fait intervenir plusieurs de notions d'analyse fonctionnelle, notamment sur la convexité et la théorie de la mesure, ainsi que quelques notions de probabilités, étant donné que l'on travaille principalement avec des mesures de probabilité.

Table des matières

Chapitre 1

Mise en place

1.1 Notations

Dans l'ensemble de ce rapport, nous travaillerons sur des mesures de probabilités, en particulier celles de Bernoulli et de Gauss standard dont nous rappelons ici les notations usuelles :

Mesure de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$: $\beta(p) \ := \ p\delta_0 \ + \ (1-p)\delta_1$. On notera la plupart du temps $1-p=q$.

Mesure de Gauss standard : $\forall x \in \mathbb{R},\ d\gamma(x) \ := \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$, où dx est la mesure de Lebesgue.

De plus, si $(E,\ \mathcal{T},\ \mu)$ est un espace probabilisé, soit $f : E \to I$ μ-intégrable, on notera l'espérance de f sous μ comme suit :

$$E_\mu(f) \ := \ \int_E f d\mu.$$

On notera aussi $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à support compact.

1.2 Convexité

Intéressons-nous maintenant à quelques résultats sur la convexité qui seront utiles par la suite.

1.2.1 En dimension 1

Rappelons quelques caractérisations utiles d'une fonction convexe :

Théorème 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.*
Sont équivalentes :

1. *φ est convexe.*
2. *$\forall\ x \in I,\ \exists\ \psi : I \to\ \mathbb{R}$ affine telle que :*
   - $\varphi(x) \ = \ \psi(x)$
   - $\forall\ t \ \in \ I\ ,\ \varphi(t) \ \geq \ \psi(t)$
3. $\varphi'' \ \geq \ 0$

Démontrons ensuite l'inégalité de Jensen, qui nous sera utile pour bien définir plusieurs objets.

Théorème 2 (Inégalité de Jensen)**.** *Soit μ une mesure de probabilité sur un ensemble E.*
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Soit $f : E \to I$ μ-intégrable, avec $\varphi \circ f$ μ-intégrable. Alors

$$\varphi(E_\mu(f)) \ \leq \ E_\mu(\varphi \circ f).$$

Preuve. Il s'agira d'utiliser l'item 2 du théorème 1. Soit E, μ, I, φ et f définis comme dans l'énoncé du théorème. Commençons par montrer que $E_\mu(f) \ \in \ I$.
Posons $I =]$a,b$[$, avec a,b$\in \ \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
Alors $\forall\ x \ \in \ E$, a$< f(x) <$b. On intègre alors selon μ, et comme μ mesure de probabilité, on a (en admettant éventuellement $E_\mu(\infty) = \infty$) : a $< E_\mu(f) <$ b.
Donc $E_\mu(f) \ \in I$. On peut donc appliquer l'item 2 du théorème 1 :
Il existe $\psi : I \to \ \mathbb{R}$ affine telle que :

- $\varphi(E_\mu(f)) \ = \ \psi(E_\mu(f))$
- $\forall\, t \ \in \ I \ , \ \varphi(t) \ \geq \ \psi(t)$

Explicitons ψ : il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall y \ \in \ I, \ \psi(y) = Ay + B$.
Alors $\forall x \in$ E, $\varphi \circ f(x) \geq Af(x) + B$
On intègre selon μ :

$$E_\mu(\varphi \circ f) \geq E_\mu(Af + B) = AE_\mu(f) + B = \varphi(E_\mu(f)).$$

L'inégalité est démontrée.

□

Il se trouve que la plupart des fonctions convexes qui nous intéresseront plus tard seront en fait strictement convexes. Les caractérisations des fonctions strictement convexes sont les mêmes qu'au théorème 1, mais simplement en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes. La caractérisation par des fonctions affines nous permet en particulier de montrer un lemme qui correspond au cas d'égalité dans l'inégalité de Jensen, pour des fonctions strictement convexes, ce qui encore une fois sera utile plus tard pour bien définir certains objets.

Lemme 1. *Soit μ une mesure de probabilité sur un ensemble E et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.*
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe.
Alors soit $f : E \to I$ μ-intégrable, on a équivalence entre :

1. *$\varphi(E_\mu(f)) \ = \ E_\mu(\varphi \circ f)$.*
2. *f est constante μ-presque partout.*

Preuve. Soit $f : E \to I$ intégrable.
Montrons d'abord que 2 implique 1. On remarque que si f constante μ-presque partout, alors $f = E_\mu(f)$ μ-presque partout, et alors on a :

$$\varphi(E_\mu(f)) \ = \ \varphi(E_\mu(f))\mu(E) \ = \ \int_E \varphi(E_\mu(f))d\mu \ = \ \int_E \varphi \circ f d\mu.$$

Pour la réciproque, supposons $E_\mu(\varphi \circ f) = \varphi(E_\mu(f))$.
On pose $B = \{y \ \in E, \ f(y) \neq E_\mu(f)\}$, on veut donc montrer que $\mu(B) = 0$.
Déjà, on remarque que comme f est à valeurs dans I, on a $E_\mu(f) \in I$ (de même que dans la preuve de l'inégalité de Jensen).
Ensuite, comme φ est strictement convexe, il existe ψ : I $\to$ $\mathbb{R}$ affine telle que :

- $\varphi(E_\mu(f)) \ = \ \psi(E_\mu(f))$;
- $\forall\, t \ \in \ I \setminus \{E_\mu(f)\} \ , \ \varphi(t) \ > \ \psi(t)$.

Comme ψ est affine et vaut $\varphi(E_\mu(f))$ en $E_\mu(f)$, on peut l'expliciter :
Il existe $K \ \in \ \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, t \ \in \ I, \ \psi(t) \ = \ \varphi(E_\mu(f)) \ + \ K(t \ - \ E_\mu(f)).$$

Donc $\forall\, t \ \neq \ E_\mu(f), \ \varphi(t) \ > \ \varphi(E_\mu(f)) \ + \ K(t \ - \ E_\mu(f))$
Et comme $\forall\, y \ \in \ B, \ f(y) \ \neq \ E_\mu(f)$, on a :
$\forall\, y \ \in \ B, \ \varphi(f(y)) \ > \varphi(E_\mu(f)) \ + \ K(f(y) \ - \ E_\mu(f))$
Donc sur B, $\varphi \circ f \ - \ \varphi(E_\mu(f)) \ > K(f \ - \ E_\mu(f))$

Or par l'hypothèse de départ, on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_E \varphi \circ f d\mu \ - \ \varphi(E_\mu(f)) \\
&= \int_E (\varphi \circ f \ - \ \varphi(E_\mu(f)))d\mu \\
&= \int_{E \setminus B} (\varphi \circ f \ - \ \varphi(E_\mu(f)))d\mu \ + \ \int_B (\varphi \circ f \ - \ \varphi(E_\mu(f)))d\mu \\
&= \int_B (\varphi \circ f \ - \ \varphi(E_\mu(f)))d\mu.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant par l'absurde que $\mu(B) \ > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
0 \ = \ \int_B (\varphi \circ f \ - \ \varphi(E_\mu(f)))d\mu \ &> \ K \int_B (f \ - \ E_\mu(f))d\mu \\
&= \ K(\int_E (f \ - \ E_\mu(f))d\mu \ - \ \int_{E \setminus B} (f \ - \ E_\mu(f))d\mu) \\
&= \ K(E_\mu(f) \ - \ E_\mu(f) \ - \ \int_{E \setminus B} (E_\mu(f) \ - \ E_\mu(f))d\mu) \\
&= \ 0.
\end{aligned}$$

On obtient $0 > 0$, ce qui est absurde.
Donc $\mu(B) = 0$, et donc f est constante μ-presque partout. □

1.2.2 En dimension n > 1

En dimension n > 1, la définition de la convexité reste la même. On travaillera ici uniquement avec des fonctions convexes continues définies sur des ouverts U de $\mathbb{R}^n$ qu'on choisira comme produits d'intervalles ouverts.
On a alors les caractérisations suivantes :

Théorème 3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui est un produit d'intervalles ouverts.*
Soit $\varphi : U \to \ \mathbb{R}$ continue de classe $\mathcal{C}^2$.
Alors on a équivalence entre :

1. *φ est convexe.*
2. *$\forall \ x \in U$, $\exists \ \psi : U \to \ \mathbb{R}$ affine telle que :*
   - *$\varphi(x) \ = \ \psi(x)$;*
   - *$\forall \ t \ \in \ U \ , \ \varphi(t) \ \geq \ \psi(t)$.*
3. *La différentielle seconde de φ est positive.*

Preuve. On admettra l'équivalence entre les items 1 et 3.
Soit φ et U définis comme dans l'énoncé.
Montrons tout d'abord que 1 implique 2 :

Posons $C = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R},\ \varphi(x) < y\}$.
L'ensemble C est un convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$. En effet, soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$ et $t \in [0, 1]$, par convexité de φ on a :

$$\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) < ty_1 + (1-t)y_2.$$

Donc C est bien convexe. De plus, $C = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ où $f : (x, y) \mapsto y - \varphi(x)$ est continue par continuité de φ.
Donc comme $\mathbb{R}_+^*$ est ouvert, C est ouvert.
Soit $x_0 \in U$, on pose $X = (x_0, \varphi(x_0))$.
L'ensemble X est un sous-espace affine en tant que singleton.
Donc par le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan affine $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ disjoint de C passant par X.
Il existe alors $(a_i)_{0 \leq i \leq n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ tel que :

$$H = \{(x_1, ..., x_{n+1}),\ a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0\}.$$

De plus, la droite $\{x_0\} \times \mathbb{R}$ n'est pas comprise dans H. En effet, $\varphi(x_0) < \varphi(x_0) + 1$ donc $(x_0, \varphi(x_0) + 1) \in C$. Et comme C et H sont disjoints, $(x_0, \varphi(x_0) + 1) \notin H$.
On en déduit que $a_{n+1} \neq 0$, donc quitte à diviser par a_{n+1}, on peut réécrire H :

$$H = \{(x_1, .., x_{n+1}),\ x_{n+1} = -a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\}.$$

H est donc le graphe d'une application affine $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et on a $H = \{(x, h(x)),\ x \in \mathbb{R}^n\}$ Comme $X \in H,\ \varphi(x_0) = h(x_0)$.
De plus, soit $x \in U$, on a $(x, h(x)) \in H$, donc $(x, h(x)) \notin C$, donc $h(x) \leq \varphi(x)$.
Donc on a bien montré que pour tout $x_0 \in U$, il existe h affine telle que $\varphi(x_0) = h(x_0)$ et pour tout $x \in U,\ h(x) \leq \varphi(x)$.
Réciproquement, soit $x, y \in U,\ t \in [0, 1]$.
Comme U est un produit d'intervalles, U est convexe, donc $tx + (1-t)y \in U$.
Donc par hypothèse il existe h affine telle que :

- $\varphi(tx + (1-t)y) = h(tx + (1-t)y)$;
- $\forall z \in U, \varphi(z) \geq h(z)$.

On écrit $h = L + b$ avec L forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(tx + (1-t)y) &= h(tx + (1-t)y) \\
&= L(tx + (1-t)y) + b \\
&= t(L(x) + b) + (1-t)(L(y) + b) \\
&\leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).
\end{aligned}$$

Donc φ est convexe. □

La caractérisation par les fonctions affines va ensuite nous permettre de démontrer l'inégalité de Jensen en dimension n.

Théorème 4 (Inégalité de Jensen en dimension n)**.** *Pour tout* $1 \leq i \leq n$*,*

- *soit* U_i *intervalle de* $\mathbb{R}$ *;*
- *soit* μ_i *mesure de probabilité sur un ensemble* E_i *;*
- *soit* $f_i : E_i \to U_i,\ \mu_i$*-intégrable.*

On note $U = \bigotimes_{i=1}^n U_i,\ E = \bigotimes_{i=1}^n E_i$ *et* $\mu = \mu_1 \otimes ... \otimes \mu_n$*.*
Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe.*
Alors :

$$\varphi(E_{\mu_1}(f_1), ..., E_{\mu_n}(f_n)) \leq E_\mu(\varphi(f_1, ..., f_n)).$$

Preuve. Admettons les hypothèses du théorème, on remarque que U est ouvert et que μ est une mesure de probabilité sur E.
Soit $1 \leq i \leq n$, on a $\forall x \in E_i,\ f_i(x) \in U_i$.
Comme μ_i est une mesure de probabilités et U_i un intervalle, on a, comme dans la preuve du théorème 2, $E_{\mu_i}(f_i) \in U_i$.
D'où $(E_{\mu_1}(f_1), ..., E_{\mu_n}(f_n)) \in U$.
Par la deuxième caractérisation du théorème précédent, il existe $\psi : U \to \mathbb{R}$ affine telle que :

- $\varphi(E_{\mu_1}(f_1), ..., E_{\mu_n}(f_n)) = \psi(E_{\mu_1}(f_1), ..., E_{\mu_n}(f_n))$;
- $\forall x \in U,\ \varphi(x) \geq \psi(x)$.

Explicitons ψ : il existe $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\psi : (x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i + b.$$

Alors, en remarquant que $\forall i,\ E_\mu E_{\mu_i} = E_\mu$, et comme μ est une mesure de probabilité sur E, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{\mu_1}(f_1), ..., E_{\mu_n}(f_n)) &= \sum_{i=1}^n a_i E_{\mu_i}(f_i) + b \\
&= \sum_{i=1}^n a_i E_\mu(f_i) + E_\mu(b) \\
&= E_\mu(\sum_{i=1}^n a_i f_i + b) \\
&= E_\mu(\psi(f_1, ..., f_n)) \\
&\leq E_\mu(\varphi(f_1, ..., f_n)).
\end{aligned}$$

Donc on a bien montré l'inégalité voulue. □

1.3 Définitions

Introduisons maintenant les différents éléments qui nous permettront de définir les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique.

Définition 1 (Variance)**.** *Soit* μ *une mesure de probabilité sur un ensemble* E*,* $f \in L^2(E, \mathbb{R})$*.*
La variance de f *est définie par :*

$$Var_\mu(f) = E_\mu((f - E_\mu(f))^2).$$

En applicant la linéarité de l'intégrale, on obtient facilement une définition alternative de la variance :

$$Var_\mu(f) = E_\mu(f^2) - E_\mu(f)^2.$$

La variance est homogène d'ordre 2. Comme $x \mapsto x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde est strictement positive), par l'inégalité de Jensen et le lemme 1, on a :
$\forall f \in L^2(E,\mathbb{R}),\ Var_\mu(f) \geq 0$ et $Var_\mu(f) = 0$ si et seulement si f est constante μ-presque partout.

Définition 2 (Entropie)**.** *Soit μ une mesure de probabilité sur un ensemble E. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ positive telle que $f\ln(f) \in L^1(E,\mathbb{R})$.*
L'entropie de f est définie par :

$$Ent_\mu(f) = E_\mu(f\ln(f)) - E_\mu(f)\ln(E_\mu(f)).$$

On remarque déjà que l'entropie est homogène d'ordre 1.
De plus, la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est prolongeable par continuité en 0, donc l'entropie est bien définie pour des fonctions positives.
Cette même fonction est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ (sa dérivée seconde y est strictement positive), donc de même que pour la variance, par l'inégalité de Jensen et le lemme 1, on a :
$\forall f \geq 0$ avec $f\ln(f) \in L^1(E,\mathbb{R}), Ent_\mu(f) \geq 0$ et $Ent_\mu(f) = 0$ si et seulement si f est constante μ-presque partout.
On remarque aussi que si $E_\mu(f) \neq 0$, alors $Ent_\mu(f) = E_\mu(f\ln(\frac{f}{E_\mu(f)}))$.
Une formule variationnelle de l'entropie nous sera utile par la suite :

Théorème 5 (Première formule variationnelle de l'entropie)**.** *Soit μ une mesure sur un ensemble E. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ positive telle que $f\ln(f) \in L^1(E,\mathbb{R})$. Alors :*

$$Ent_\mu(f) = sup\{E_\mu(fg);\ g : E \to \mathbb{R},\ E_\mu(e^g) = 1\}.$$

Preuve. Dans un premier temps, établissons l'inégalité suivante :

$$\forall u \geq 0,\ v \in \mathbb{R},\ uv \leq u\ln(u) - u + e^v.$$

Fixons $v \in \mathbb{R}$, et posons $h : u \mapsto u\ln(u) - u + e^v - uv$ définie sur $\mathbb{R}_+$ (en remarquant une nouvelle fois que $u \mapsto u\ln(u)$ se prolonge par continuité en 0), on veut donc montrer la positivité de h.
h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall u{>}0$:
$h'(u) = \ln(u) - v$.
Donc h' est négative sur $]0,e^v]$, positive sur $[e^v,\infty[$, et nulle en e^v. Donc h admet son minimum en e^v, et $h(e^v) = 0$. Donc $h \geq 0$.
Donc l'inégalité est vérifiée. Montrons maintenant la formulle variationnelle pour le cas particulier d'une fonction f positive de moyenne égale à 1.
Soit g une fonction telle que $E_\mu(e^g) = 1$. Par l'inégalité qu'on vient d'établir, $\forall x \in E$,
$f(x)g(x) \leq f(x)\ln(f(x)) - f(x) + e^{g(x)}$
On intègre :
$E_\mu(fg) \leq E_\mu(f\ln(f)) - E_\mu(f) + E_\mu(e^g) = Ent_\mu(f)$ d'après les hypothèses.
Et comme en posant $g = \ln(f)$, on a $E_\mu(e^g) = 1$ et $E_\mu(fg) = Ent_\mu(f)$, on a bien $Ent_\mu(f) = sup\{E_\mu(fg),\ E_\mu(e^g) = 1\}$.
Comme on travaille sur des fonctions f positives, on a $E_\mu(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout, et dans ce cas la formule variationnelle est évidente.

Pour le cas général, soit f de moyenne non nulle, on va considérer $\frac{f}{E_\mu(f)}$, dont la moyenne vaut 1. On a alors :

$$\begin{aligned} Ent_\mu(\frac{f}{E_\mu(f)}) &= sup\{E_\mu(\frac{f}{E_\mu(f)}g),\ E_\mu(e^g)=1\} \\ &= \frac{1}{E_\mu(f)} sup\{E_\mu(fg),\ E_\mu(e^g)=1\}. \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} Ent_\mu(\frac{f}{E_\mu(f)}) &= E_\mu(\frac{f}{E_\mu(f)}\ln(\frac{f/E_\mu(f)}{E_\mu(f/E_\mu(f))})) \\ &= \frac{1}{E_\mu(f)} Ent_\mu(f). \end{aligned}$$

Donc on a bien :

$$Ent_\mu(f) = sup\{E_\mu(fg);\ g : E \to \mathbb{R},\ E_\mu(e^g)=1\}.$$

□

On notera que la variance et l'entropie sont deux formules du même type : elles sont toutes les deux définies par $E_\mu(\varphi \circ f) - \varphi(E_\mu(f))$ où φ est une fonction strictement convexe qui est tour à tour $x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto x\ln(x)$. Cette analogie nous sera notamment utile en début de chapitre 3 pour les théorèmes de tensorisation de la variance et de l'entropie.

Définition 3 (Energie)**.** *Soit μ une mesure de probabilités sur un ensemble E. Soit $f : E \to \mathbb{R}$. L'énergie $\mathcal{E}_\mu(f)$ est définie par :*

- *Définition A : Si $(E,\mu) = (\{0,1\},\beta(p))$, alors :*

$$\mathcal{E}_\mu(f) = pq|f(0)-f(1)|^2.$$

- *Définition B : Si $E = \mathbb{R}$, f est dérivable et $f' \in L^2(\mathbb{R},\mu)$, alors :*

$$\mathcal{E}_\mu(f) = E_\mu(|f'|^2).$$

L'énergie est homogène d'ordre 2, et en tant que qu'intégrale d'un carré, elle est positive (et même nulle si et seulement si la fonction est constante μ-presque partout). Elle est aussi invariante par translation.
Nous avons donc maintenant tous les éléments nécessaires pour définir ce que sont les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique.

Définition 4 (Inégalité de Poincaré)**.** *On dit qu'une mesure μ sur un ensemble E satisfait une inégalité de Poincaré sur une classe de fonctions $C_P(E,\mu)$ si*

$$\exists c > 0,\ \forall f \in C_P(E,\mu),\ Var_\mu(f) \leq c\mathcal{E}_\mu(f)$$

Pour les cas qui nous intéressent (mesures de Bernoulli et de Gauss), on choisira $C_P(\{0,1\},\beta(p)) = F(\{0,1\},\mathbb{R})$ et $C_P(\mathbb{R},d\gamma) = \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Comme on a équivalence entre $Var_\mu(f) = 0,\ \mathcal{E}_\mu(f) = 0$ et $f = 0$ μ-presque partout, on peut définir la constante optimale de l'inégalité de Poincaré comme suit.

$$c_P(\mu) = sup\{\frac{Var_\mu(f)}{\mathcal{E}_\mu(f)}; f \in C_P(E,\mu),\ f\ non\ constante\ \mu - presque\ partout\}.$$

Définition 5 (Inégalité de Sobolev logarithmique)**.** *On dit qu'une mesure μ sur un ensemble E satisfait une inégalité de Sobolev logarithmique sur une classe de fonctions $C_{LS}(E,\mu)$ si*

$$\exists c > 0,\ \forall f \in C_{LS}(E,\mu),\ Ent_\mu(f^2) \leq c\mathcal{E}_\mu(f).$$

Comme pour l'inégalité de Poincaré, on choisira $C_{LS}(\{0,1\},\beta(p)) = F(\{0,1\},\mathbb{R})$ et $C_{LS}(\mathbb{R},d\gamma) = \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Et de la même façon qu'on a défini la constante optimale de l'inégalité de Poincaré, on définit la constante optimale de l'inégalité de Sobolev logarithmique comme suit.

$$c_{LS}(\mu) = sup\{\frac{Ent_\mu(f^2)}{\mathcal{E}_\mu(f)}; f \in C_P(E,\mu),\ f\ non\ constante\ \mu - presque\ partout\}.$$

Or en vertu de la formule variationnelle de l'entropie du théorème 5, on peut réécrire la constante.

$$c_{LS}(\mu) = sup\{\frac{1}{\mathcal{E}_\mu(f)} sup\{E_\mu(fg);\ E_\mu(e^g) = 1\}; f \in C_P(E,\mu),\ f\ non\ constante\ \mu{-}presque\ partout\}.$$

Posons alors, pour toute fonction $g : E \to \mathbb{R}$,

$$c(g) = sup\{\frac{E_\mu(f^2 g)}{\mathcal{E}_\mu(f)};\ f : E \to \mathbb{R}\ non\ constante\ \mu - presque\ partout\}. \tag{1.1}$$

On a finalement

$$c_{LS} = sup\{c(g); g : E \to \mathbb{R},\ E_\mu(e^g) = 1\} \tag{1.2}$$

Cette reformulation nous sera notamment utile pour calculer la constante optimale pour la mesure de Bernoulli.
Le lemme suivant explicite un lien entre les deux inégalités.

Propriété 1. *Soit μ une mesure de probabilités sur un ensemble E. Supposons que μ satisfait une inégalité de Sobolev logarithmique sur une classe de fonctions bornées. Alors μ satisfait aussi une inégalité de Poincaré sur la même classe, et on a :*

$$c_P(\mu) \leq \frac{1}{2} c_{LS}(\mu)$$

Preuve. L'outil principal pour ce théorème est un développement limité à l'ordre 3 en 1 de $x \mapsto x\ln(x)$:

$$(1+h)\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} (1+h)(h - \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)) \underset{h\to 0}{=} h + \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3).$$

Soit μ une mesure de probabilités sur un ensemble E. Supposons que μ satisfait une inégalité de Sobolev logarithmique sur une classe C de fonctions bornées. Soit $f \in C$ et $\varepsilon > 0$. Comme f est bornée, on pourra appliquer le développement limité, et on a :

$$\begin{aligned}
E_\mu((1+\varepsilon f)^2\ln((1+\varepsilon f)^2)) &= 2E_\mu((1+\varepsilon f)^2\ln(1+\varepsilon f)) \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} 2E_\mu((1+\varepsilon f)(\varepsilon f + \frac{(\varepsilon f)^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3))) \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} 2E_\mu(\varepsilon f + \frac{3(\varepsilon f)^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} 2\varepsilon E_\mu(f) + 3\varepsilon^2 E_\mu(f^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Et :

$$
\begin{aligned}
E_\mu((1+\varepsilon f)^2)\ln(E_\mu((1+\varepsilon f)^2)) &= (1+2\varepsilon E_\mu(f)+\varepsilon^2 E_\mu(f^2))\ln(1+2\varepsilon E_\mu(f)+\varepsilon^2 E_\mu(f^2)) \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} 2\varepsilon E\mu(f)+\varepsilon^2 E_\mu(f^2)+\frac{(2\varepsilon E_\mu(f)+\varepsilon^2 E_\mu(f^2))^2}{2}+\mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{=} 2\varepsilon E\mu(f)+\varepsilon^2 E_\mu(f^2)+2\varepsilon^2(E_\mu(f))^2+\mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned}
$$

On en conclut que

$$
Ent_\mu((1+\varepsilon f)^2) \underset{\varepsilon\to 0}{=} 2\varepsilon^2 E_\mu(f^2) - 2\varepsilon^2(E_\mu(f))^2+\mathcal{O}(\varepsilon^3) \underset{\varepsilon\to 0}{=} 2\varepsilon^2 Var_\mu(f)+\mathcal{O}(\varepsilon^3).
$$

Comme l'énergie est homogène d'ordre 2 et invariante par translation, on a

$$
\mathcal{E}_\mu(1+\varepsilon f) = \varepsilon^2\mathcal{E}_\mu(f).
$$

Donc

$$
\frac{Ent_\mu((1+\varepsilon f)^2)}{\mathcal{E}_\mu(1+\varepsilon f)} \underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{2\varepsilon^2 Var_\mu(f)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2\mathcal{E}_\mu(f)}.
$$

On fait tendre ε vers 0, et comme μ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique, on a $c_{LS}(\mu)$ qui majore $\frac{2Var_\mu(f)}{\mathcal{E}_\mu(f)}$ et donc μ vérifie une inégalité de Poincaré, et on a $\frac{c_{LS}(\mu)}{2} \geq c_P(\mu)$. □

Nous avons donc désormais la plupart des outils nécessaires pour étudier les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmiques pour les mesures de Bernoulli et de Gauss.

Chapitre 2

Inégalités pour la mesure de Bernoulli

Fixons pour tout ce chapitre $p \in [0,1]$ et $q = 1 - p$. On notera aussi $\beta(p) = \beta$ pour soulager un peu la lisibilité.

2.1 Inégalité de Poincaré

Théorème 6.

$$C_P(\beta) = 1.$$

Preuve. Cette inégalité devient ici une égalité. En effet, soit $f : \{0,1\} \to \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} Var_\beta(f) &= E_\beta(f^2) - E_\beta(f)^2 \\ &= pf^2(0) + qf^2(1) - (pf(0) + qf(1))^2 \\ &= f^2(0)(p - p^2) + f^2(1)(q - q^2) - 2pqf(0)f(1) \\ &= pq(f^2(0) + f^2(1) - 2f(0)f(1)) \\ &= pq|f(0) - f(1)|^2 \\ &= \mathcal{E}_\beta(f). \end{aligned}$$

D'où

$$c_P(\beta) = 1.$$

□

2.2 Inégalité de Sobolev logarithmique

Théorème 7.

$$c_{LS}(\beta(1/2)) = 2.$$

Si $p \in]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$,

$$c_{LS}(\beta(p)) = \frac{\ln(q) - \ln(p)}{q - p}.$$

Preuve. Le calcul est ici plus long. Tout d'abord, on remarquera que pour $p = 0$ ou $p = 1$, l'entropie et l'énergie sont nulles, donc on ne traitera pas ces cas-là. Par symétrie entre p et q, on se ramène à $0 < p \leq \frac{1}{2} \leq q$. On va calculer $c_{LS}(\beta)$ en utilisant les $c(g)$ définis plus tôt (1.1).
Soit alors $g : \{0,1\} \to \mathbb{R}$ telle que $E_\beta(e^g) = 1 = pe^{g(0)} + qe^{g(1)}$. On peut supposer g non nulle, sinon on aurait $E_\beta(fg) = 0 \ \forall f : \{0,1\} \to \mathbb{R}$. On va poser $a = g(0)$ et $b = g(1)$, encore une fois pour une meilleure lisibilité. On a alors $ab < 0$. En effet,

- si $ab = 0$, on peut supposer $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $p + qe^b = 1$ donc $qe^b = 1 - p = q$ donc $b = 0$, ce qui est absurde.
- si $ab > 0$, supposons d'abord $a \geq b$. On a $1 = p(e^a - e^b) + e^b$. Alors, si $a, b > 0$, on a $p(e^a - e^b) \geq 0$ et $e^b > 1$, et donc $1 > 1$ ce qui est absurde. Et si $a, b < 0$, alors $1 = p(e^a - e^b) + e^b \leq e^a < 1$ ce qui est absurde aussi. Si $b \geq a$, la preuve est identique en factorisant par q plutôt que par p.

On a donc bien $ab < 0$.
Soit $f : \{0,1\} \to \mathbb{R}$, par inégalité triangulaire, on a $||f(0)| - |f(1)||^2 \leq |f(0) - f(1)|^2$, on en conclut $\mathcal{E}_\beta(|f|) \leq \mathcal{E}_\beta(f)$. Donc pour calculer $c(g)$, on peut supposer f positive. De plus, comme $\forall \varepsilon > 0, \ \mathcal{E}_\beta(f + \varepsilon) = \mathcal{E}_\beta(f)$, on peut travailler avec f strictement positive. Par homogénéité, on peut

se ramener à $f(1) = 1$ (en simplifiant la fraction dans $c(g)$ par $f(1)^2$). Posons $x = f(0)$, on a alors $x > 0$ et $x \neq 1$. Finalement, on trouve donc :

$$\begin{aligned} c(g) &= sup\{\frac{E_\beta(f^2 g)}{\mathcal{E}_\beta(f)};\ f:\{0,1\} \to \mathbb{R},\ f > 0\} \\ &= sup\{\frac{pax^2 + qb}{pq(x-1)^2};\ x > 0,\ x \neq 1\} \end{aligned}$$

Posons $h : x \mapsto \frac{pax^2+qb}{(x-1)^2}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, et

$$\forall x > 0,\ x \neq 1,\ h'(x) = \frac{-2}{(x-1)^4}(pax^2 - x(pa - qb) - qb).$$

Le numérateur de h' s'annule uniquement en 1 et en $\frac{-qb}{pa}$. De plus, par concavité stricte de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $0 = \ln(pe^a + qe^b) > pa + qb$, d'où $0 \neq 1 + \frac{qb}{pa}$, et donc $\frac{-qb}{pa} \neq 1$. Supposons $a > 0$, on a alors $1 < \frac{-qb}{pa}$. Au vu de la forme de h', on a donc h décroissante sur $]0, 1[$, croissante sur $]1, \frac{-qb}{pa}[$ et décroissante sur $]\frac{-qb}{pa}, \infty[$. Et comme $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = qb$ et $h(\frac{-qb}{pa}) = \frac{qbpa}{qb+pa} \geq qb$ (on le vérifie en quotientant l'un par l'autre et en utilisant $\frac{-qb}{pa} > 1$), on a $sup\{h(x);\ x > 0,\ x \neq 1\} = \frac{qbpa}{qb+pa}$. Si $a < 0$, on a $1 > \frac{-qb}{pa}$. Et alors vu h', on a h croissante sur $]0, \frac{-qb}{pa}[$, décroissante sur $]\frac{-qb}{pa}, 1[$ et croissante sur $]1,+\infty[$. Et de même que pour le cas $a > 0$, on vérifie $h(\frac{-qb}{pa}) \geq \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = pa$. Et on retrouve $sup\{h(x);\ x > 0,\ x \neq 1\} = \frac{qbpa}{qb+pa} = pqc(g)$. D'où par un calcul rapide,

$$c(g) = (\frac{p}{b} + \frac{a}{q})^{-1}.$$

On en déduit (d'après (1.2)) :

$$\begin{aligned} c_{LS}(\beta) &= sup\{c(g);\ g : \{0,1\} \to \mathbb{R},\ E_\beta(e^g) = 1\} \\ &= sup\{(\frac{p}{b} + \frac{q}{a})^{-1};\ a, b \in \mathbb{R}^*,\ pe^a + qe^b = 1\} \\ &= (inf\{\frac{p}{b} + \frac{q}{a};\ a, b \in \mathbb{R}^*,\ pe^a + qe^b = 1\})^{-1}. \end{aligned}$$

Posons $t = e^a$ et $s = e^b = \frac{1-pe^a}{q} = \frac{1-pt}{q}$. On a alors $t > 0$ par définition, $t \neq 1$ car $a \neq 0$ et $t < 1/p$ car sinon $s \leq 0$ (absurde par définition de s). Définissons alors $\varphi : t \mapsto \frac{p}{\ln(s)} + \frac{q}{\ln(t)} = \frac{p}{b} + \frac{q}{a}$. On a donc :

$$c_{LS}(\beta) = (inf\{\varphi(t);\ t \in]0, 1[\cup]1, 1/p[\})^{-1}.$$

Par un développement limité en $t = 1$ (dont on n'explicitera pas la démonstration qui consiste principalement à appliquer le développementlimité en 1 de $x \mapsto x\ln(x)$ puis celui en 0 de $x \mapsto 1/(1-x)$), on a :

$$\varphi(t) \underset{t\to 1}{=} \frac{1}{2} + \frac{p-q}{12q}(t-1) + \frac{1-3p+3p^2}{24q^2}(t-1)^2 + \mathcal{O}((t-1)^3).$$

On peut donc prolonger par continuité φ en 1 en posant $\varphi(1) = 1/2$. En 0, on a $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\to} -p/\ln(q)$ et en $1/p$, $\varphi(t) \underset{t\to 1/p}{\to} -q/\ln(p)$. On peut donc prolonger φ par continuité sur $[0, 1/p]$.

D'après le développement limité, on a 1 extremum local de φ si et seulement si $\varphi'(1) = 0$ si et seulement si $p = q$ si et seulement si $p = 1/2$. En dehors de 1, φ est dérivable et on a :

$$\varphi'(t) = \frac{p^2}{qs(\ln(s))^2} - \frac{q}{t(\ln(t))^2}.$$

On remarque que $\varphi'(t) \underset{t\to 0}{\to} -\infty$ et $\varphi'(t) \underset{t\to 1/p}{\to} +\infty$ donc 0 et $1/p$ ne sont pas des minimums locaux. Donc en dehors de 1, on a :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = 0 &\iff \frac{p^2}{qs(\ln(s))^2} = \frac{q}{t(\ln(t))^2}\\ &\iff p^2 t(\ln(t))^2 = q^2 s(\ln(s))^2.\end{aligned}$$

Et comme $\ln(t)\ln(s) = ab < 0$, en passant à la racine on a :

$$\varphi'(t) = 0 \iff p\sqrt{t}\ln(t) = -q\sqrt{s}\ln(s).$$

D'après la définition de s, on remarque que $q(1-s) = p(t-1)$. Comme on travaille avec $t \neq 1$, on a aussi $s \neq 1$, et on peut écrire $-q = \frac{p(1-t)}{(1-s)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = 0 &\iff p\sqrt{t}\ln(t) = \frac{p(1-t)}{(1-s)}\sqrt{s}\ln(s)\\ &\iff \frac{\sqrt{t}\ln(t)}{1-t} = \frac{\sqrt{s}\ln(s)}{1-s}.\end{aligned}$$

Posons alors $u : x \mapsto \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{1-x}$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ On peut faire plusieurs remarques sur cette fonction :

- $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$, $\lim_{x\to +\infty} u(x) = 0$ et $\lim_{x\to 1} u(x) = -1$. On peut donc notamment prolonger u par continuité en 0 et en 1.
- $\forall x \geq 0,\ u(x) \leq 0$.
- Par un calcul simple, on voit que $\forall x \geq 0,\ u(x) = u(x^{-1})$.
- u est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. En effet, u est 2 fois dérivable, et en étudiant les deux premières dérivées de u sur $]1,+\infty[$, on arrive à démontrer que u' est postive sur cet intervalle, et donc que u y est croissante.
- Par les deux points précédents, on obtient aussi que u est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
- On déduit finalement que $min(u) = u(1) = -1$.

On a donc $\varphi'(t) = 0 \iff u(t) = u(s) \iff s = 1/t \iff pt^2 - t + q = 0 \iff (t-1)(t-q/p) = 0$. Comme on travaille en dehors de 1, on a alors $t = q/p$ qui est un point où φ' s'annule.
Si $p = 1/2$, φ' s'annule seulement en 1, et on a $\varphi(1) = 1/2$. Et comme par exemple $\varphi(0) = \frac{1}{2\ln(2)} \geq \frac{1}{2}$, $1/2$ est minimum de φ sur $[0,1/p]$. On a alors

$$c_{LS}(\beta(1/2)) = 2$$

.
Si $p \neq 1/2$, $\varphi'(1) \neq 0$ et φ' s'annule seulement en $\frac{q}{p}$. On calcule $\varphi(\frac{q}{p}) = \frac{q-p}{\ln(q)-\ln(p)}$, qui est donc un extremum de φ. De plus au vu du dévelopemment limité de φ, on peut prolonger par continuité φ' en 1, et au vu des limites en 0 et $1/p$, φ est donc décroissante sur $]0,\frac{p}{q}[$, puis croissante sur $]\frac{p}{q}, \frac{1}{p}[$.

On en déduit que $\varphi(\frac{q}{p})$ est bien le minimum de φ.
On a donc :

$$Si\ p \neq \frac{1}{2},\ c_{LS}(\beta(p)) = \frac{\ln(q) - \ln(p)}{q - p}.$$

$\square$

On notera plusieurs éléments appuyant la cohérence des résultats : déjà, la constante est bien symétrique entre p et q. Ensuite, si p tend vers 0 ou 1, la constante tend vers $+\infty$, ce qui correspond au cas évoqué plus tôt où si $p = 0$ *ou* $p = 1$, on ne peut pas trouver de constante. On remarque aussi que lorsque p tend vers 1/2, la constante tend vers 2, ce qui est bien la valeur que l'on a trouvé quand $p = 1/2$.

Chapitre 3

Inégalités pour la mesure de Gauss

Maintenant que nous avons déterminé les constantes optimales pour la mesure de Bernoulli, par des formules de tensorisation puis une application du théorème central limite, nous allons pouvoir calculer les constantes optimales pour la mesure de Gauss.

3.1 Tensorisation

Cette partie va permettre d'utiliser la remarque faite plus tôt sur les similarités entre variance et entropie. Introduisons une nouvelle notation : pour $\varphi \in \{x \mapsto x\ln(x),\ x \mapsto x^2\}$, μ une mesure de probabilité sur un ensemble E et $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi \circ f$ est μ-intégrable, on notera :

$$E_\mu^\varphi(f) = E_\mu(\varphi \circ f) - \varphi(E_\mu(f)).$$

Selon le choix de φ, cette expression peut donc correspondre à la variance ou à l'entropie. On peut alors déterminer une formule variatonnelle commune à la variance et à l'entropie.

Théorème 8 (Formule variationnelle commune)**.** *Soit $\varphi \in \{x \mapsto x\ln(x),\ x \mapsto x^2\}$, μ une mesure sur un ensemble E et $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi \circ f$ soit μ-intégrable. Alors*

$$E_\mu^\varphi(f) = sup\{E_\mu^\varphi(g) + E_\mu((\varphi'(g) - \varphi'(E_\mu(g)))(f-g)); g : E \to \mathbb{R}, \varphi \circ g\ \mu - integrable\}.$$

Preuve. La démonstration demande un travail préliminaire sur une fonction. En effet, soit $\varphi \in \{x \mapsto x\ln(x),\ x \mapsto x^2\}$, nous allons montrer que la fonction

$$A_\varphi : (u,v) \mapsto \varphi(u+v) - \varphi(u) - \varphi'(u)v$$

est convexe, afin de pouvoir appliquer l'inégalité de Jensen. Pour cela, on utilisera la caractérisation par la différentielle seconde. Celle-ci est positive si la matrice hessienne de A_φ l'est. Calculons cette hessienne :

$$H_{A_\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi''(u+v) - \varphi^{(3)}(u)v - \varphi''(u) & \varphi''(u+v) - \varphi''(u) \\ \varphi''(u+v) - \varphi''(u) & \varphi''(u+v) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique, donc par la critère de Sylvester on peut vérifier qu'elle est positive est regardant si les déterminants de ses mineures principales sont positifs. Rappelons une inégalité importante sur la convexité : si f est convexe et dérivable sur un ensemble I, soit $x_0 \in I$, alors $\forall x \in I,\ f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. C'est une explicitation des minorantes affines, et on a l'inégalité inverse pour une fonction concave.
Faisons quelques remarques sur φ :

- φ est strictement convexe.
- φ'' est convexe.
- $\frac{1}{\varphi''}$ est concave.

Au vu des fonctions simples parmi lesquelles on choisit φ, ces remarques sont très faciles à montrer. Comme φ'' est convexe, en appliquant l'inégalité vue plus haut avec $x_0 = u$ et $x = u + v$, on a

$$\varphi''(u+v) \geq \varphi^{(3)}(u)v + \varphi''(u).$$

Donc la première mineure principale est bien de déterminant positif. Il reste maintenant à montrer que $det(H_{A_\varphi})$ est positif.

$$\begin{aligned} det(H_{A_\varphi}) &= (\varphi''(u+v) - \varphi^{(3)}(u)v - \varphi''(u))\varphi''(u+v) - (\varphi''(u+v) - \varphi''(u))^2 \\ &= -\varphi^{(3)}(u)\varphi''(u+v)v + \varphi''(u)\varphi''(u+v) - \varphi''(u)^2. \end{aligned}$$

Or comme $1/\varphi''$ est concave, par l'inégalité de concavité on a

$$\frac{1}{\varphi''(u+v)} \leq (\frac{1}{\varphi''})'(u)v + \frac{1}{\varphi''(u)} = \frac{-\varphi^{(3)}(u)}{\varphi''(u)^2}v + \frac{1}{\varphi''(u)}.$$

Comme φ est strictement convexe, on peut multiplier l'inégalité par $\varphi''(u+v)\varphi''(u)^2$ sans en changer le sens, et on obtient

$$\varphi''(u)^2 \leq -\varphi^{(3)}(u)\varphi''(u+v)v + \varphi''(u)\varphi''(u+v).$$

Donc le déterminant de la hessienne est positif. Donc la hessienne est positive, la différentielle seconde aussi, et on a bien A_φ convexe.
Revenons à la formule que l'on voulait montrer. Soit f et g comme définies par l'énoncé. Par un calcul simple on obtient

$$E_\mu^\varphi(f) - E_\mu^\varphi(f) = E_\mu(A_\mu(g, f-g)) - A_\varphi(E_\mu(f), E_\mu(f-g)) + E_\mu((\varphi'(g) - \varphi'(E_\mu(g)))(f-g)).$$

En appliquant l'inégalité de Jensen sur A_φ, on a $E_\mu(A_\mu(g, f-g)) \geq A_\varphi(E_\mu(f), E_\mu(f-g))$. On en déduit

$$E_\mu^\varphi(f) \geq E_\mu^\varphi(g) + E_\mu((\varphi'(g) - \varphi'(E_\mu(g)))(f-g)).$$

De plus, comme on a égalité si $g = f$, on a bien montré la formule variationnelle. □

Cette formule variationnelle va nous permettre de tensoriser la variance et l'entropie.

Théorème 9 (Tensorisation)**.** *Soit $\varphi \in \{x \mapsto x\ln(x),\ x \mapsto x^2\}$. Pour $1 \leq i \leq n$, soit μ_i une mesure de probabilités sur un ensemble E_i. Posons μ la mesure produit des μ_i sur E défini comme produit des E_i. Alors si $f : E \to \mathbb{R}$ est telle que $\varphi \circ f$ est μ-intégrable, on a*

$$E_\mu^\varphi(f) \leq \sum_{i=1}^n E_\mu(E_{\mu_i}^\varphi(f)).$$

Preuve. Soit f telle que $\varphi \circ f$ est μ-intégrable (on remarque d'ailleurs que μ est une mesure de probabilités sur E). D'après la formule variationnelle que l'on vient détablir, on veut donc montrer que $\forall g : E \to \mathbb{R}$ avec $\varphi \circ g$ μ-intégrable,

$$E_\mu^\varphi(g) + E_\mu((\varphi'(g) - \varphi'(E_\mu(g)))(f-g)) \leq \sum_{i=1}^n E_\mu(E_{\mu_i}^\varphi(f)).$$

Soit donc g une telle fonction. Posons $g_0 = g$ et $\forall 1 \leq i \leq n$, $g_i = E_{\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_i}(g) = E_{\mu_i}(g_{i-1})$. On remarque que $g_n = E_\mu(g)$. Alors en appliquant la formule variationnelle à (f, g_{i-1}, μ_i), on a :

$$\begin{aligned} E_{\mu_i}^\varphi(f) &\geq E_{\mu_i}^\varphi(g_{i-1}) + E_{\mu_i}((\varphi'(g_{i-1}) - \varphi'(E_{\mu_i}(g_{i-1})))(f - g_{i-1})) \\ &= E_{\mu_i}^\varphi(g_{i-1}) + E_{\mu_i}((\varphi'(g_{i-1}) - \varphi'(g_i))(f - g_{i-1})). \end{aligned}$$

On intègre maintenant selon μ, en remarquant à nouveau que $E_\mu E_{\mu_i} = E_\mu$:

$$\begin{aligned} E_\mu(E_{\mu_i}^\varphi(f)) &\geq E_\mu(E_{\mu_i}^\varphi(g_{i-1}) + E_{\mu_i}((\varphi'(g_{i-1}) - \varphi'(g_i))(f - g_{i-1}))) \\ &= E_\mu(E_{\mu_i}^\varphi(g_{i-1})) + E_\mu((\varphi'(g_{i-1}) - \varphi'(g_i))(f - g_{i-1})). \end{aligned}$$

Sommons chacun des termes du membre de droite en remarquant les sommes télésopiques qui apparaissent :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E_\mu(E_{\mu_i}^{\varphi}(g_{i-1})) &= \sum_{i=1}^{n} E_\mu(E_{\mu_i}(\varphi(g_{i-1})) - \varphi(E_{\mu_i}(g_{i-1}))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_\mu(\varphi(g_{i-1}) - \varphi(g_i)) \\
&= E_\mu(\varphi(g_0) - \varphi(g_n)) \\
&= E_\mu(\varphi(g)) - \varphi(E_\mu(g)) \\
&= E_\mu^{\varphi}(g).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E_\mu((\varphi'(g_{i-1}) - \varphi'(g_i))f) &= E_\mu((\varphi'(g_0) - \varphi'(g_n))f) \\
&= E_\mu((\varphi'(g) - \varphi'(E_\mu(g)))f).
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, on notera que g_i et g_{i-1} ne dépendent pas des coordonnées 1 à $i-1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E_\mu((\varphi'(g_{i-1}) - \varphi'(g_i))g_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} E_\mu((\varphi'(g_{i-1}) - \varphi'(g_i))E_{\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_i}(g)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_\mu(E_{\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_i}((\varphi'(g_{i-1}) - \varphi'(g_i))g)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_\mu((\varphi'(g_{i-1}) - \varphi'(g_i))g) \\
&= E_\mu((\varphi'(g) - \varphi'(E_\mu(g)))g).
\end{aligned}$$

Finalement on a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} E_\mu(E_{\mu_i}^{\varphi}(f)) \geq E_\mu^{\varphi}(g) + E_\mu((\varphi'(g) - \varphi'(E_\mu(g)))(f-g)).$$

Donc par la formule variationnelle, le résultat de tensorisation est établi. □

Nous avons donc désormais tous les outils nécessaires pour déterminer les constantes optimales pour les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique pour la mesure de Gauss.

3.2 Inégalités

Le calcul des constantes optimales pour chacune des inégalités suit le plan suivant : d'abord on utilise le théorème de tensorisation sur des mesures de Bernoulli, dont on vient de calculer les constantes optimales, puis en appliquant le Théorème Central Limite on peut passer d'une mesure produit de mesures de Bernoulli à une mesure de Gauss. On a alors une majoration de la constante optimale, et par des arguments d'analyse fonctionnelle on finit de déterminer les constantes.

3.2.1 Inégalité de Poincaré

Théorème 10.

$$c_P(\gamma) = 1.$$

Preuve. On veut donc tout d'abord utiliser le théorème de tensorisation pour la variance. Posons pour $1 \leq i \leq n$ $\mu_i = \beta(1/2)$, et $\mu = \mu_1 \otimes ... \otimes \mu_n$. Soit $F : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} Var_\mu(F) &\leq \sum_{i=1}^{n} E_\mu(Var_{\mu_i}(F)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_\mu(\mathcal{E}_{\mu_i}(F)) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} E_\mu(|F_i(1) - F_i(0)|^2) \end{aligned}$$

avec $F_i(y) = F(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_n)$ avec les $(x_j)_{j\neq i}$ fixés. On définit $\varphi_n : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi_n(x_1, ..., x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n/2}{\sqrt{n/4}}.$$

Soit $f \in \mathcal{C}_C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a alors

$$Var_\mu(f \circ \varphi_n) \leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} E_\mu(|(f \circ \varphi_n)_i(1) - (f \circ \varphi_n)_i(0)|^2).$$

Par construction, les $X_i : x \in \{0,1\}^n \mapsto x_i$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de même loi $\beta(1/2)$. On peut donc appliquer le théorème central limite, ce qui donne que la mesure image de μ par φ_n converge en loi vers $d\gamma$ quand n tend vers $+\infty$, et on a :

$$Var_\mu(f \circ \varphi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Var_\gamma(f).$$

Etudions maintenant le membre de droite de l'inégalité qu'on vient d'obtenir. Comme $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe $K > 0$ qui majore les 2 premières dérivées de f.
Soit $1 \leq i \leq n$. Fixons $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$. On a $(f \circ \varphi_n)_i(y) = f(\frac{\sum_{j\neq i} x_j + y - n/2}{\sqrt{n/4}})$. On peut alors étendre $(f \circ \varphi_n)_i$ en une fonction continue sur [0,1]. Posons $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall y \in [0,1],\ g(y) = f(\frac{\sum_{j\neq i} x_j + y - n/2}{\sqrt{n/4}}).$$

Alors par construction, $g \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. Par la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0,1[$ tel que :

$$g(1) - g(0) - g'(0) = \frac{1}{2}g''(c).$$

Par définition de g, on a donc :

$$(f \circ \varphi_n)_i(1) - (f \circ \varphi_n)_i(0) - \sqrt{\frac{4}{n}} f'(\frac{\sum_{j\neq i} x_j - n/2}{\sqrt{n/4}}) = \frac{2}{n} f''(\frac{\sum_{j\neq i} x_j + c - n/2}{\sqrt{n/4}}).$$

Posons $\varphi_{n,i}(x = (x_1, ..., x_n)) = \sqrt{\frac{4}{n}}(\sum_{j\neq i} x_j - n/2)$. Soit $x \in \{0,1\}^n$, on a alors :

$$|(f \circ \varphi_n)_i(1) - (f \circ \varphi_n)_i(0)| \leq \sqrt{\frac{4}{n}}|f' \circ \varphi_{n,i}(x)| + \frac{2K}{n}.$$

Passons au carré, on a :

$$|(f \circ \varphi_n)_i(1) - (f \circ \varphi_n)_i(0)|^2 \leq \frac{4}{n}|f' \circ \varphi_{n,i}(x)|^2 + \frac{8K}{n\sqrt{n}}|f' \circ \varphi_{n,i}(x)| + \frac{4K^2}{n^2}.$$

Notons ν_n la mesure image de μ par $\varphi_{n,i}$, qui ne dépend pas de i puisque les X_i sont identiques. Notons que ν_n est une mesure de probabilités. Alors en intégrant selon μ l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} E_\mu(|(f \circ \varphi_n)_i(1) - (f \circ \varphi_n)_i(0)|^2) &\leq \frac{4}{n}E_{\nu_n}(|f'|^2) + \frac{8K}{n\sqrt{n}}E_{\nu_n}(|f'|) + \frac{4K^2}{n^2} \\ &\leq \frac{4}{n}E_{\nu_n}(|f'|^2) + \frac{8K^2}{n\sqrt{n}} + \frac{4K^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Maintenant on somme :

$$\sum_{i=1}^{n} E_\mu(\mathcal{E}_{\mu_i}(f \circ \varphi_n)) \leq E_{\nu_n}(|f'|^2) + \frac{8K^2}{\sqrt{n}} + \frac{4K^2}{n}.$$

On veut maintenant faire tendre n vers $+\infty$. Par le théorème central limite (même si il manquait une coordonnée dans $\varphi_{n,i}$, ce qui devient négligeable quand $n \to +\infty$) on a $\nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} \gamma$ en loi. D'où :

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} E_\mu(\mathcal{E}_{\mu_i}(f \circ \varphi_n)) \leq 4E_\gamma(|f'|^2) = 4\mathcal{E}_\gamma(f).$$

Au final, on a donc :

$$Var_\gamma(f) \leq \mathcal{E}_\gamma(f).$$

Donc :

$$c_P(\gamma) \leq 1.$$

On veut maintenant montrer que $c_P(\gamma) = 1$. Pour cela, on va travailler sur la fonction $f = id_{\mathbb{R}}$. En effet, par des calculs d'intégrales simples, on remarque que $Var_\gamma(f) = 1 = \mathcal{E}_\gamma(f)$. Cependant, $f \notin \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On va donc construire une suite $(f_k)_{k\geq 0} \subset \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui converge vers f. Pour cela, on va s'intéresser aux fonctions plateaux, qu'on appellera ici p_k pour $k \geq 0$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et valent 1 sur $[-k, k]$ et 0 sur $]-\infty, -k-1] \cup [k+1, +\infty[$. Elles sont donc à support compact, et on sait par construction de ces fonctions qu'il existe $C > 0$ majorant la première dérivée de chaque fonction plateau, et en particulier ne dépendant pas de k. Posons alors $\forall k \geq 0,\ f_k = fp_k$. La suite $(f_k)_{k\geq 0}$ converge simplement vers f, et $\forall k \geq 0$, $|f_k| \leq |f|$. Et comme $|f|$ est intégrable selon gamma (par un calcul simple d'intégrale), par théorème de convergence dominée,

$$E_\gamma(f_k) \underset{k\to+\infty}{\to} E_\gamma(f).$$

Pour vérifier qu'on a la même convergence pour la variance, il suffit de travailler sur $((f_k)^2)_{k\geq 0}$. Cette suite converge simplement vers f^2 et est majorée par f^2 qui est intégrable selon gamma (le calcul nécessite une intégration par partie mais reste simple). Donc à nouveau par le théorème convergence dominée,

$$Var_\gamma(f_k) \underset{k\to+\infty}{\to} Var_\gamma(f).$$

La convergence de l'énergie demande plus de calculs. Soit $k \geq 0$.

$$\begin{aligned}|f_k'| &= |f'p_k + fp_k'| \\ &\leq |f'p_k| + |fp_k'|.\end{aligned}$$

Le premier terme converge simplement vers $|f'|$. Pour le deuxième terme, on remarque déjà que $\forall k \geq 0$, p_k' est nulle sauf sur $]-k-1,-k[\cup]k,k+1[$. On va montrer la convergence uniforme de $(fp_k')_{k\geq 0}$ vers 0 :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |fp_k'| d\gamma &\leq C \int_{]-k-1,-k[\cup]k,k+1[} |f| d\gamma \\ &= \frac{2C}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{k+1} x e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\ &= \frac{2C}{\sqrt{2\pi}} (e^{\frac{-k^2}{2}} - e^{\frac{-(k+1)^2}{2}}) \\ &\underset{k\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Donc $(fp_k')_{k\geq 0}$ converge uniformément et donc simplement vers 0. Donc $(|f_k'|^2)_{k\geq 0}$ converge simplement vers $|f'|^2$. On veut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée. Soit $k \geq 0$.

$$\begin{aligned}|f'p_k + fp_k'|^2 &\leq |f'p_k|^2 + 2|ff'p_kp_k'| + |fp_k'|^2 \\ &\leq |f|^2 + 2C|ff'| + C^2|f|^2.\end{aligned}$$

Au vu de la forme de f, le dernier terme de l'inégalité est clairement intégrable. Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\mathcal{E}_\gamma(f_k) \underset{k\to+\infty}{\to} \mathcal{E}_\gamma(f).$$

Comme on a la convergence de la variance et de l'énergie, par la définition de $c_P(\gamma)$, on obtient $c_P(\gamma) \geq 1$, et donc :

$$c_P(\gamma) = 1.$$

□

3.2.2 Inégalité de Sobolev logarithmique

Théorème 11.

$$c_{LS}(\gamma) = 2.$$

Preuve. Avec les mêmes notations que pour la sous-partie précédene, par le théorème de tensorisation appliqué à l'entropie, on a pour $F : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}Ent_\mu(F^2) &\leq \sum_{i=1}^n E_\mu(Ent_{\mu_i}(F^2)) \\ &\leq 2\sum_{i=1}^n E_\mu(\mathcal{E}_{\mu_i}(F)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n E_\mu(|F_i(1) - F_i(0)|^2)\end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{C}_C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ_n définie comme dans la sous-partie précédente, on a alors :

$$Ent_\mu((f \circ \varphi_n)^2) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} E_\mu(|(f \circ \varphi_n)_i(1) - (f \circ \varphi_n)_i(0)|^2).$$

Le terme de droite de l'inégalité étant (à un coefficient près) exactement le même que dans l'étude de l'inégalité de Poincaré, on montre de la même façon que sa limite supérieure en $n \to +\infty$ est inférieure à $2\mathcal{E}_\gamma(f)$. Et pour l'autre terme, par le théorème central limite on a à nouveau que la mesure image de μ par φ_n converge en loi vers $d\gamma$ quand n tend vers $+\infty$. On en conclut que $Ent_\mu((f \circ \varphi_n)^2) \underset{n \to +\infty}{\to} Ent_\gamma(f^2)$. On a donc :

$$Ent_\gamma(f^2) \leq 2\mathcal{E}_\gamma(f).$$

D'où :

$$c_{LS}(\gamma) \leq 2.$$

Pour établir que $c_{LS}(\gamma) = 2$, on pourrait constater que $Ent_\gamma(\exp^2) = 2\mathcal{E}_\gamma(\exp)$. Cependant $\exp \notin \mathcal{C}_C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc il on peut à nouveau travailler avec les fonctions plateaux pour se replacer sur des fonctions compactes et utiliser le théorème de convergence dominée pour vérifier des convergences sur l'énergie et l'entropie du carré. Mais ici il y a plus simple, on peut utiliser la propriété 1 : en effet on a montré que γ vérifie une inégalité de Poincaré et de Sobolev logarithmique sur la classe de foncions bornées $\mathcal{C}_C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a donc :

$$c_{LS}(\gamma) \geq 2c_P(\gamma) = 2.$$

Finalement,

$$c_{LS}(\gamma) = 2.$$

□

Bibliographie

ABRAHAM, Céline (2010). « Concentration de la mesure et inégalité de Sobolev logarithmique. » In : URL : https://perso.univ-rennes1.fr/christophe.dupont/Enseignements/logsob.pdf.

ANÉ, Cécile et al. (2000). *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques.* T. 10. Société mathématique de France Paris.

CHAFAI, Djalil (2005). « Inégalités de Poincaré et de Gross pour les mesures de Bernoulli, de Poisson, et de Gauss ». In : *Unpublished, available at http ://hal. archives-ouvertes. fr/ccsd-00012428.*