

UNIVERSITÉ LYON I

43, Boulevard du 11 novembre 1918, 69100, Villeurbanne

PROJET L3 MATHÉMATIQUES

Groupe Fondamental, Revêtements

25 Juin 2024

Auteur
QUENTIN MOSSOYAN

Maître de stage
SERGE PARMENTIER

E-Mail : quentin.mossoyan@etu.univ-lyon1.fr

Table des matières

1	Introduction et Rappels	4
1.1	Motivations et Prérequis	4
1.1.1	Motivations	4
1.1.2	Prérequis	5
1.2	Rappels et Définitions	5
1.2.1	Définitions topologiques	5
1.2.1.1	Notions d'espaces	5
1.2.1.2	Connexité	6
1.2.1.3	Compacité	6
1.2.2	Rappels sur les groupes	7
2	Groupe Fondamental	10
2.1	Chemins, Lacets	10
2.1.1	Définition	10
2.1.2	Exemples de chemins et de lacets	10
2.2	Homotopies, Classes d'Equivalences	12
2.2.0.1	Définitions	12
2.2.1	Equivalence des chemins	18
2.3	Groupe Fondamental	20
2.3.1	Définition	20
2.3.2	Structure de groupe	21
2.3.3	Indépendance du point	27
2.4	Fonction Associée	30

3	Revêtements et Relèvements	35
3.1	Revêtements	35
3.1.0.1	Définitions	35
3.1.1	Exemples classiques de revêtements	36
3.2	Relèvements	49
3.2.1	Définitions et résultats préliminaires	49
3.2.1.1	Définition	49
3.2.1.2	Groupe d'automorphisme	52
3.2.1.3	Topologie quotient	55
3.2.2	Caractérisation des revêtements	58
4	Lien entre Revêtements et Groupe Fondamental	66
4.1	Relever les Chemins et les Homotopies	66
4.1.1	Lemme de Lebesgue, topologie analytique	66
4.1.2	Relèvement des chemins	67
4.1.3	Relèvement des homotopies	74
4.2	Théorèmes Importants	82
5	Classification d'Espaces	94
5.1	Type d'Homotopie	94
5.1.1	Applications homotopes	94
5.1.2	Type d'homotopie d'espaces topologiques	96
5.2	Espaces Contractiles et Rétractes	100
5.2.1	Contractions	100
5.2.2	Rétractions	102
5.3	Espaces Produits	104
6	Applications aux Espaces Classiques	108
6.1	Groupe Fondamental de \mathbb{R}^n	108
6.2	Groupe Fondamental des Convexes de \mathbb{R}^n	109
6.3	Groupe Fondamental du Cercle \mathbb{S}^1	109
6.4	Groupe Fondamental de la Sphère \mathbb{S}^n	112
6.5	Groupe Fondamental de l'Espace Epointé \mathbb{R}^{n*}	120
6.6	Groupe Fondamental du Tore \mathbb{T}	121
6.7	Groupe Fondamental de l'Espace Projectif Réel $P_n(\mathbb{R})$	122

6.8	Groupe Fondamental du Ruban de Möbius	125
6.9	Groupe Fondamental de la Bouteille de Klein	130
6.10	Groupe Fondamental du Huit	140
	Références	155

Chapitre 1

Introduction et Rappels

1.1 Motivations et Prérequis

1.1.1 Motivations

Nous étudierons le long de cet écrit, le groupe fondamental et quelques-unes de ses applications. Il s'agit d'un sujet plutôt abstrait lié à la topologie algébrique mais également imagé, rempli d'exemples et souvent même dessiné. Cet objet est né par *Henri Poincaré* en 1895.

Ce sujet a la polyvalence de relier les notions de groupes, celles de topologie avec l'utilisation centrale d'applications continues et se marie bien avec une branche de l'analyse complexe dans le cas particulier de la dimension deux.

Le groupe fondamental montre son utilité dans la classification d'espaces. On associe à tout espace un objet : le groupe fondamental. L'idée sera de mettre dans la même case deux espaces ayant un groupe fondamental similaire, ou de la même manière, de séparer deux espaces qui n'ont pas le même groupe fondamental (critère de non homéomorphisme). Il est également présent dans des sujets plus concrets tels que la théorie des nœuds par exemple.

Le chapitre 1 sera destiné à des rappels, le 2nd, à la définition du groupe fondamental. Le chapitre 3 portera sur les revêtements dont nous ferons le lien avec le calcul du groupe fondamental d'un espace dans le chapitre 4. Le chapitre 5 fera référence à certaines méthodes permettant de calculer le groupe fondamental et le chapitre 6, qui sera le dernier, introduira des exemples et le calcul concret des groupes fondamentaux de certains espaces.

1.1.2 Prérequis

Ce sujet s'adresse à un public ayant déjà quelques connaissances en topologie, et en groupes. Malgré cela, nous ferons un 1^{er} chapitre de rappels afin d'assurer des bases communes.

1.2 Rappels et Définitions

1.2.1 Définitions topologiques

1.2.1.1 Notions d'espaces

Définition (espace topologique). Soit X un ensemble. Soit \mathcal{T} une famille de parties de X . \mathcal{T} sera dite *topologie sur X* si :

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$
- $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
- $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ où I est un ensemble.

On appellera ainsi tout ensemble X muni d'une topologie un *espace topologique*

Définition (ouverts et fermés). Soit X un espace topologique. Notons \mathcal{T} sa topologie. Soit $A \subset X$. A sera dit :

- ouvert si $A \in \mathcal{T}$
- fermé si $A^c \in \mathcal{T}$

Ici, A^c désigne $X \setminus A$

Définition (voisinage). Soit X un espace topologique. Soient $a \in X$ et $V \subset X$. On dira V voisinage de a s'il existe un ouvert U de X vérifiant :

$$a \in U \subset V$$

Remarque. On notera l'ensemble des voisinages de $a \in X$ ainsi : $\mathcal{V}(a)$

Définition (continuité). Soient E, F deux espaces topologiques. Soit f une application de E dans F . f sera dite continue si :

$$\forall W \in \mathcal{V}(f(a)), f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(a)$$

On notera l'ensemble des applications continues de E dans F ainsi :

$$\mathcal{C}(E, F)$$

Proposition. Soient E, F deux espaces topologiques. Soit f une application de E dans F . f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert dans F par f est un ouvert de E

Définition (homéomorphisme). Soient E, F deux espaces topologiques. Soit f une application de E dans F . f sera dite un homéomorphisme si :

- f est continue
- f est bijective
- f^{-1} est continue

On dira alors que E et F sont homéomorphes.

Proposition. *Tout homéomorphisme est une application ouverte c'est-à-dire que l'image de tout ouvert par une telle application est ouverte.*

Démonstration. Soient E, F deux espaces topologiques et f un homéomorphisme de E dans F . f^{-1} est continue de F dans E . On a donc que pour tout ouvert U de E , $(f^{-1})^{-1}(U)$ est un ouvert de F . C'est-à-dire que pour tout ouvert U de E , $f(U)$ est un ouvert de F . D'où f est une application ouverte. \square

1.2.1.2 Connexité

Définition (connexité). Soit X un espace topologique. Il sera dit *connexe* si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont X et \emptyset

Définition (connexité par arcs). Soit X un espace topologique. X sera dit *connexe par arcs* si quel que soit le couple de points (x, y) de X , il existe $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], X)$ tel que :

$$(\gamma(0), \gamma(1)) = (x, y)$$

Proposition. Soit X un espace topologique. Il existe $(C_i)_{i \in I}$ où I est un ensemble, une famille d'espaces connexes (resp. connexes par arcs) deux-à-deux disjoints tels que X soit la réunion de ces espaces. Chaque C_i sera appelé une *composante connexe*.

Proposition. *La propriété de connexité (resp. par arcs) est un invariant topologique. C'est-à-dire que l'image de tout connexe (resp. par arcs) par une application continue d'un espace topologique vers un autre est connexe (resp. par arcs)*

Proposition. *Soit X un espace topologique et soit $A \subset X$. Si A est connexe par arcs, alors A est connexe. On a de plus équivalence de ces notions dans le cas où A est une partie ouverte de X .*

1.2.1.3 Compacité

Définition (recouvrement ouvert). Soit X un espace topologique. On appellera *recouvrement ouvert* de X tout famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(X)^I$ telle que :

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Un tel recouvrement ouvert sera dit *fini* si I est de cardinal fini.

Définition (compacité). Soit X un espace topologique. X sera dit compact si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement ouvert fini de X

1.2.2 Rappels sur les groupes

Définition (loi de composition interne). Soit G un ensemble. Soit $*$ une application définie sur G^2 . On la dit *loi de composition interne* si son image est incluse dans G .

Définition (groupe). Soit $(G, *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne. On dit que $(G, *)$ est un *groupe* si :

- $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$
- $\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$
- $\forall x \in G, \exists y \in G, x * y = e$

Ici, $x * y$ désigne $*(x, y)$. On adopte cette notation pour une loi de composition interne. Revenons sur chaque point :

- On appelle cette propriété portant sur $*$ *l'associativité*. On dit que $*$ est *associative*.
- Un tel élément e est appelé *élément neutre*. On peut aussi noter le groupe $(G, *, e)$
- On dit que y est *l'inverse* ou *l'opposé* de x . Il sera d'ailleurs souvent noté x^{-1} .

Remarque. Notons que ces trois axiomes entraînent celui-ci parfois contenu dans le troisième (dans la définition) : $y * x = e$.

Définition (groupe abélien). Soit G un groupe. Il sera dit *abélien* ou *commutatif* si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall x, y \in G, x * y = y * x$$

Définition (morphisme de groupe). Soient $(G, *)$ et (G', \cdot) deux groupes.

Soit f une application de G dans G'

f sera dite *morphisme de groupe* si :

$$\forall g_1, g_2 \in G, f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$$

Définition (isomorphie). Soient G et G' deux groupes. Soit f un morphisme de G dans G' . Si f est bijective, on pourra la qualifier d'*isomorphisme*. On dira de plus que G et G' sont isomorphes. Cela signifie qu'ils sont exactement les mêmes à notation près.

On notera :

$$G \simeq G'$$

Définition (noyau, image d'un morphisme). Soient G, G' deux groupes et f un morphisme de G dans G'

On appelle noyau de f l'ensemble :

$$\text{Ker}(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_{G'}\}$$

On appelle image de f l'ensemble :

$$\text{Im}(f) = \{g' \in G' \mid \exists g \in G, f(g) = g'\}$$

Théorème (premier théorème d'isomorphisme). Soient G, G' deux groupes et f un morphisme de groupes de G dans G'

On a :

$$G/\text{Ker}(f) \approx f(G)$$

Dans le sens où ces deux ensembles sont en bijection.

Remarque. Nous ne ferons pas la preuve de ce théorème, réservée aux ouvrages sur la théorie des groupes ; mais ce même résultat nous permettra de montrer d'importants théorèmes concernant le groupe fondamental.

Définition (action de groupe). Soit $(G, *)$ un groupe et A un ensemble. Soit \cdot une application :

$$\cdot : \begin{cases} G \times A & \longrightarrow A \\ (g, a) & \longmapsto g \cdot a \end{cases}$$

\cdot sera dit une action de G sur A si elle vérifie :

$$\begin{aligned} &— \forall g, g' \in G, \forall a \in A, g \cdot (g' \cdot a) = (g * g') \cdot a \\ &— \forall a \in A, e \cdot a = a \end{aligned}$$

Remarque. Si on a une action de groupe de G sur A , on dira que G agit sur A et on notera $G \curvearrowright A$.

On peut - grâce à la manière dont on a défini les actions - associer à tout élément $g \in G$ une bijection de A dans A :

$$\phi_g : \begin{cases} A & \longrightarrow A \\ a & \longmapsto g \cdot a \end{cases}$$

On dit alors que l'application :

$$\Phi : \begin{cases} G & \longrightarrow \mathcal{S}_A \\ g & \longmapsto \phi_g \end{cases}$$

est le morphisme de groupe associé à l'action $G \curvearrowright A$.

Définition (orbite, stabilisateur). Soit $G \curvearrowright A$ une action de groupe. Soit $a \in A$.

— On appelle *orbite de a* l'ensemble :

$$\mathcal{O}_a = \{g \cdot a, g \in G\}$$

— On appelle *stabilisateur de a* l'ensemble :

$$St_a = \{g \in G, g \cdot a = a\}$$

Théorème (formule des classes).

$$\forall a \in A, G/St_a \simeq \mathcal{O}_a$$

Dans le sens où ces deux groupes sont isomorphes

Définition. Une action de groupe $G \curvearrowright A$ est dite :

— *fidèle* si :

$$\forall g \in G, (\forall a \in A, g \cdot a = a \Rightarrow g = e)$$

(c'est-à-dire que le morphisme associé Φ est injectif)

— *libre* si :

$$\forall g \in G, g \neq e \Rightarrow \forall a \in A, g \cdot a \neq a$$

(c'est-à-dire que quel que soit $a \in A, St_a = \{e\}$)

— *transitive* si :

$$\forall a, b \in A, \exists g \in G, g \cdot a = b$$

(C'est-à-dire que quel que soit $a \in A, \mathcal{O}_a = A$)

Remarque. Toute action libre est fidèle.

Chapitre 2

Groupe Fondamental

2.1 Chemins, Lacets

2.1.1 Définition

Définition (chemin, lacet). Soit X un espace topologique. On appelle *chemin dans X* toute application continue $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$. On appellera *origine* de γ le point $\gamma(0)$, *extrémité* de γ le point $\gamma(1)$ et *support* de γ l'ensemble $Im(\gamma)$ noté $supp(\gamma)$

Si de plus, on a :

$$\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$$

Alors on dira que le chemin γ est un *lacet* de *base* x_0

Remarque. Un chemin défini sur $[0, 1]$ sera dit *simple* s'il est injectif sur $[0, 1[$. Graphiquement, un chemin simple ne revient jamais sur son tracé, sauf éventuellement à l'origine (attention, la réciproque est fausse selon la paramétrisation du chemin).

2.1.2 Exemples de chemins et de lacets

Exemple. Voici quelques chemins tracés dans $X = \mathbb{R}^2$:

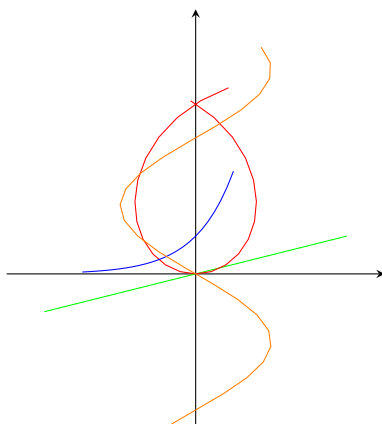


FIGURE 2.1 – Des chemins tracés dans \mathbb{R}^2

Ces chemins sont un peu aléatoires... Voyons des lacets plus concrets.

Exemple (cercle unité). $X = \mathbb{C}$
l'application $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall t \in [0, 1], \gamma(t) = \exp(2i\pi t)$$

est un lacet dans \mathbb{C} , de base $1_{\mathbb{C}}$.

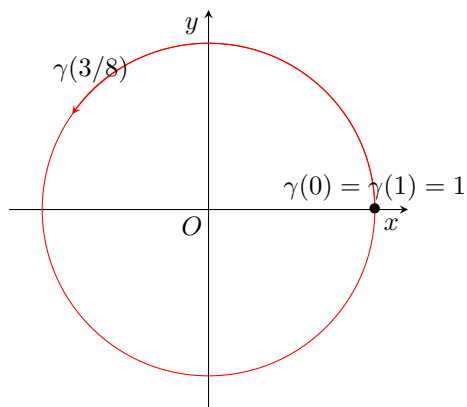


FIGURE 2.2 – Cercle unité

Exemple (lemniscate de Geronno). $X = \mathbb{R}^2$

Voici un autre lacet intéressant. On peut le définir de manière implicite :

$$x^4 - x^2 + y^2 = 0 \quad (1)$$

Se lit "le lieu géométrique des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation (1)."

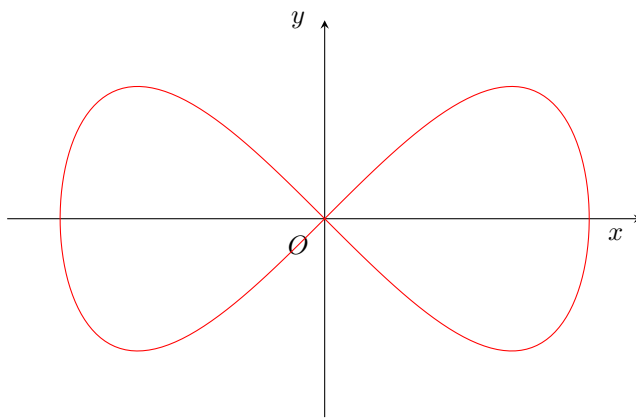


FIGURE 2.3 – Lemniscate de Geronno, de paramètre $a = 1$

La forme explicite ici sera :

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t) \sin(2\pi t)) \end{cases}$$

Remarquons que nous avons ici un lacet qui n'est pas simple (non injectif).

En espérant que ces quelques exemples éclaircissent les notions de chemins et de lacets. Essayons désormais de classer ceux-ci.

2.2 Homotopies, Classes d'Equivalences

2.2.0.1 Définitions

Dans cette partie, X désignera un espace topologique, et (X, x_0) un espace topologique pointé ($x_0 \in X$).

Définition (homotopie). Soient γ_1, γ_2 deux chemins tracés dans X . On les suppose de même origine et de même extrémité. (resp. x_0, x_1). On appelle *homotopie de γ_1 à γ_2* toute application $H : [0, 1]^2 \longrightarrow X$ continue telle que :

- $\forall t \in [0, 1], H(0, t) = \gamma_1(t)$
- $\forall t \in [0, 1], H(1, t) = \gamma_2(t)$
- $\forall s \in [0, 1], H(s, 0) = x_0$
- $\forall s \in [0, 1], H(s, 1) = x_1$

Remarque.

On n'a pas toujours l'existence d'une telle application. Cela dépend des chemins γ_1 et γ_2 .

Cette définition à première vue abstraite, se révélera très imagée. Nous la comprendrons à travers de multiples exemples.

Deux chemins d'un espace topologique seront donc dits homotopes s'ils ont les mêmes origines et extrémités, et s'il existe une homotopie de l'un à l'autre.

Exemple. Considérons les deux chemins γ_1, γ_2 , de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 définis comme suit :

$$\forall t \in [0, 1], \gamma_1(t) = (0, 2t - 1)$$

$$\forall t \in [0, 1], \gamma_2(t) = \begin{cases} (2t, 2t - 1) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (-2t + 2, 2t - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il existe une homotopie $H : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui relie γ_1 à γ_2 . La voici :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (s, t) & \longmapsto & \begin{cases} (2st, 2t - 1) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (2s(1 - t), 2t - 1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On peut tracer le support de ces deux chemins ainsi que deviner l'homotopie les reliant :

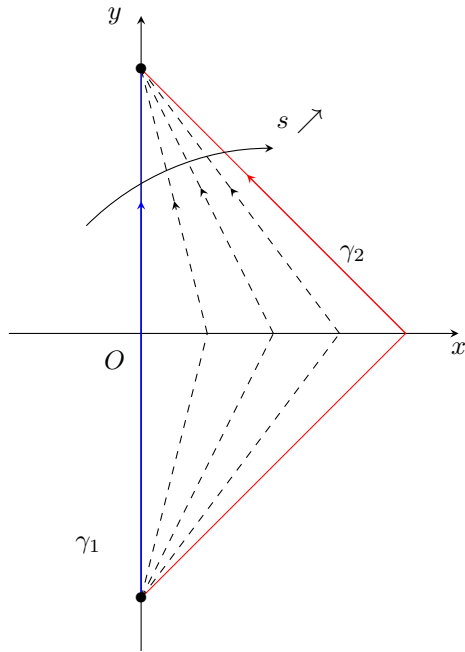


FIGURE 2.4 – Deux chemins homotopes

Ici on a nos deux chemins (tracés en bleu et en rouge) ainsi que la déformation continue de l'un vers l'autre (en noir) avec l'homotopie décrite précédemment. On remarque ainsi que deux chemins sont homotopes si et seulement si l'on peut déformer l'un vers l'autre sans le rompre ou le casser, ni le recoller.

Exemple. $X = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| > 1\}$

Voici un exemple de deux chemins qui ne sauraient être homotopes dans X :

$$\gamma_1 : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto (2t + 2, 0) \end{cases}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto (2t + 2)(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{cases}$$

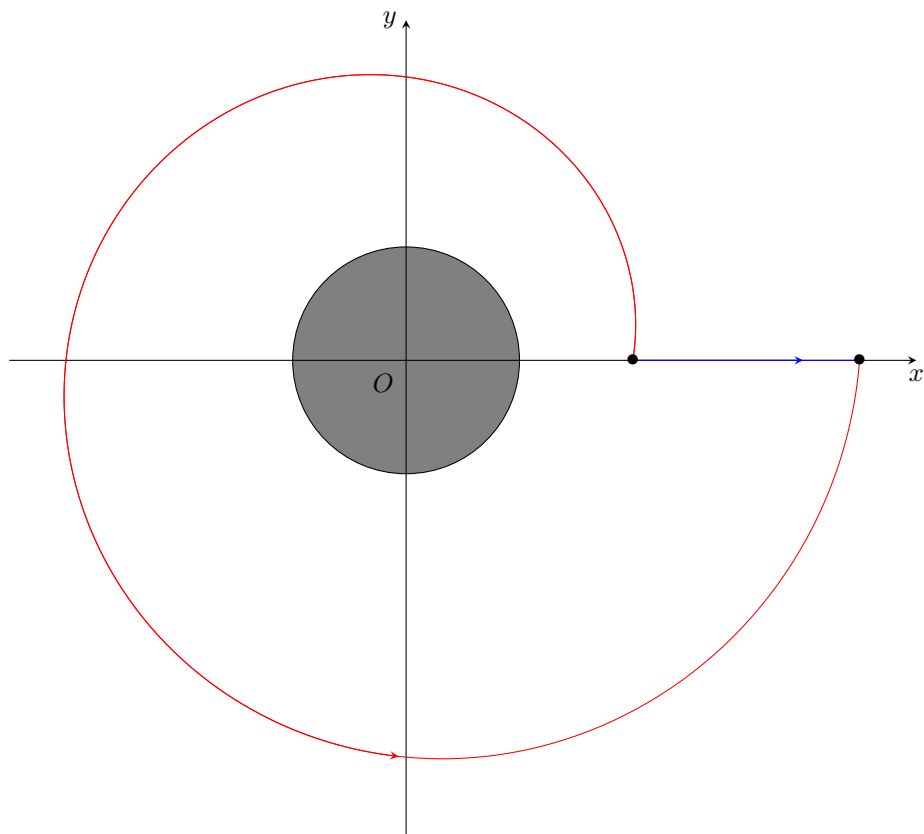


FIGURE 2.5 – Deux chemins non-homotopes

Sur cette figure, il faut imaginer que la zone grise n'appartient pas au plan. On se propose de démontrer par le calcul que ces deux chemins (rouge et bleu) ne sont pas homotopes. Cela utilise le théorème de passage à la douane (théorème de topologie, son nom n'est pas universel). Commençons par le rappeler :

Théorème (passage à la douane). Soit X un espace topologique. Soient $A, B \subset X$ deux parties de l'espace. Supposons A connexe. Supposons :

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$$

Alors on a :

$$A \cap Fr(B) \neq \emptyset$$

Où $Fr(B)$ désigne la frontière de B . C'est-à-dire :

$$Fr(B) = \bar{B} \setminus \overset{\circ}{B}$$

Pour ceux qui connaissent l'intérieur et l'adhérence d'une partie d'un espace métrique. Sinon, il suffit de penser $Fr(B)$ comme le "bord" de B .

Poursuivons :

On pose ici X comme défini au début de l'exemple. Cet espace est clairement topologique.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que ces deux chemins (bleu et rouge, respectivement γ_1 et γ_2) soient homotopes avec H l'homotopie de γ_2 à γ_1 .

On a :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow X \\ (s, t) & \longmapsto H(s, t) \end{cases}$$

Une application continue.

Soit $t_0 \in]0, 1[$ fixé, vérifiant que $\gamma_2(t_0)$ ait une ordonnée non nulle. Par continuité de H , on a en particulier :

$$\begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow X \\ s & \longmapsto H(s, t_0) \end{cases}$$

Une application continue.

De plus, $[0, 1]$ est un espace connexe. On en déduit par invariance topologique de la connexité (voir chapitre 1) que :

$$A = \{H(s, t_0), s \in [0, 1]\}$$

Est une partie connexe de X .

Posons désormais :

$$B = \{(x, 0), x > 1\}$$

Qui est contenue dans X .

On a :

$$H(0, t_0) = \gamma_2(t_0) \in X \setminus B$$

Car on a supposé $\gamma_2(t_0)$ d'ordonnée non nulle.

Donc $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$

Et :

$$H(1, t_0) = \gamma_1(t_0) \in B$$

D'où $A \cap B \neq \emptyset$

On en déduit par le théorème de passage à la douane que :

$$A \cap Fr(B) \neq \emptyset$$

Mais ici, $Fr(B) = \{(1, 0)\}$

Il existe donc $s \in]0, 1[$ tel que :

$$H(s, t_0) = (1, 0)$$

Ce qui est absurde car $(1, 0) \notin X$.

On a donc contradiction. Une telle application continue H n'existe pas. C'est-à-dire que γ_1 et γ_2 ne sont pas homotopes.

Exemple. Voici un dernier exemple de deux chemins non homotopes afin de s'assurer de la compréhension du lecteur. Attention, ceux-ci sont des lacets et X est le plan privé de deux points ici en noirs :

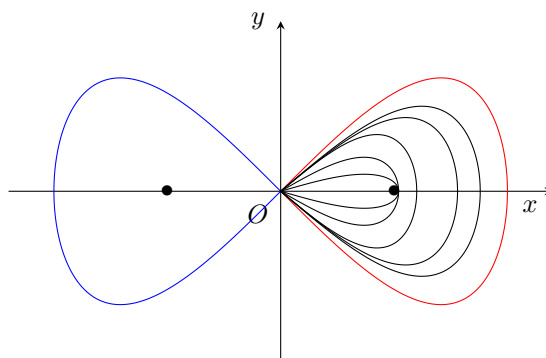


FIGURE 2.6 – Encore deux chemins non-homotopes

Si on essaye de déformer le lacet rouge (la déformation est en noire), on peut essayer de l'amener au bleu jusqu'à être bloqué par le "trou" dans le plan. (Le gros point noir). Il en est de même pour le lacet bleu, et donc les deux ne peuvent pas se rejoindre continûment (sans se couper en deux). On a ici une première intuition : le plan privé d'un ou plusieurs points peut contenir des chemins non-homotopes.

Remarque. On peut tout aussi bien penser l'homotopie comme un "pincement". On peut la représenter sous la forme d'un diagramme qu'on appellera donc *diagramme d'homotopie* et cela se présente sous cette forme :

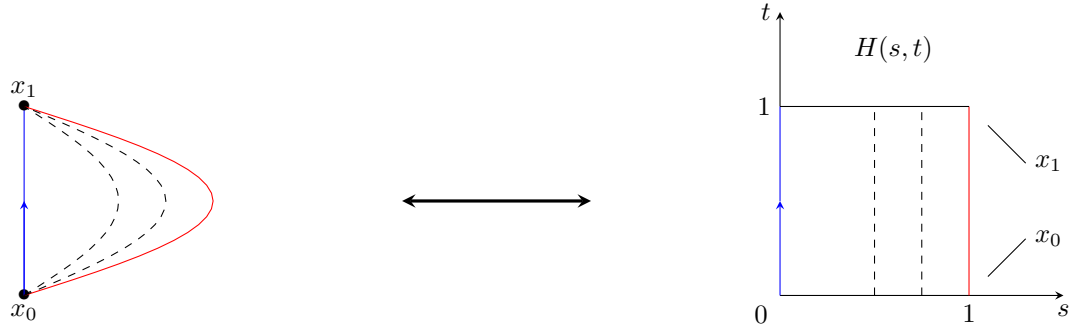


FIGURE 2.7 – Représentation du diagramme d'homotopie

On représente ici le diagramme de l'homotopie entre le chemin *rouge* et le chemin *bleu*. Sur la figure ci-dessus, on a sur le diagramme, s qui part de 0 avec le chemin vertical γ_1 en bleu, puis on augmente s ce qui nous amène jusqu'aux chemins intermédiaires en pointillés, pour finalement arriver en $s = 1$ au chemin rouge. Le côté horizontal du haut sur le carré représente donc x_1 , l'extrémité des chemins, tandis que le côté horizontal du bas représente l'origine x_0 comme indiqué.

2.2.1 Equivalence des chemins

Définition. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins tracés dans X . On notera désormais $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si ces deux chemins sont homotopes.

Proposition. \sim est une relation d'équivalence

On rappelle que si Z est un ensemble, $\mathcal{R} : Z^2 \longrightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$ est une relation d'équivalence si :

- *réflexivité* : $\forall z \in Z, \quad z \mathcal{R} z$
- *symétrie* : $\forall z_1, z_2 \in Z, \quad z_1 \mathcal{R} z_2 \Rightarrow z_2 \mathcal{R} z_1$

— *transitivité* : $\forall z_1, z_2, z_3 \in Z, \quad z_1 \mathcal{R} z_2 \text{ et } z_2 \mathcal{R} z_3 \Rightarrow z_1 \mathcal{R} z_3$

(on note $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $\mathcal{R}(x, y)$ est *Vrai* au sens fonctionnel)

Démonstration. Montrons donc que \sim vérifie ces trois propriétés.

Soit X un espace topologique. Considérons \sim comme définie précédemment.

★ *réflexivité*

Soit γ un chemin dans X . Posons :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow X \\ (s, t) & \longmapsto \gamma(t) \end{cases}$$

On considère ici l'homotopie constante, toujours égale à γ , clairement continue. Ainsi, \sim est réflexive.

★ *symétrie*

Soient γ_1, γ_2 deux chemins tracés dans X . Supposons que l'on ait $\gamma_1 \sim \gamma_2$. C'est-à-dire qu'il existe :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow X \\ (s, t) & \longmapsto H(s, t) \end{cases}$$

une homotopie de γ_1 à γ_2 .

Pour avoir une homotopie de γ_2 à γ_1 , il suffirait de prendre celle qu'on a déjà et de la parcourir en sens inverse.

Il suffit donc de poser :

$$\tilde{H} : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow X \\ (s, t) & \longmapsto H(1 - s, t) \end{cases}$$

On a donc exhibé une homotopie de γ_2 à γ_1 . On a donc $\gamma_2 \sim \gamma_1$ et notre relation est symétrique.

★ *transitivité*

Soient donc $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ trois chemins dans X tels que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ et $\gamma_2 \sim \gamma_3$. C'est-à-dire qu'on a l'existence de deux homotopies :

$$K : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow X \\ (s, t) & \longmapsto K(s, t) \end{cases}$$

$$L : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow X \\ (s, t) & \longmapsto L(s, t) \end{cases}$$

où K connecte γ_1 à γ_2 et L , γ_2 à γ_3 .

On sait déjà une chose :

$$\forall t \in [0, 1], K(1, t) = L(0, t)$$

Autrement dit, nos deux homotopies ont un chemin commun : γ_2 . Il serait suffisant pour montrer $\gamma_1 \sim \gamma_3$ de parcourir K deux fois plus vite que prévu, de se reposer en γ_2 à mi-chemin puis de parcourir L deux fois plus vite également. C'est-à-dire que l'application :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow X \\ (s, t) & \longmapsto \begin{cases} K(2s, t) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ L(2s - 1, t) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est une homotopie de γ_1 à γ_3 . Elle est continue car l'est en γ_2 et est continue par morceaux ailleurs. On a donc $\gamma_1 \sim \gamma_3$.

Finalement, \sim est transitive.

Ainsi, \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins tracés dans X . \square

2.3 Groupe Fondamental

2.3.1 Définition

Définition (groupe fondamental). Comme vu ci-dessus, l'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins. Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On définit le *groupe fondamental* de (X, x_0) comme étant l'ensemble quotient :

$$\pi_1(X, x_0) = A / \sim$$

où A est l'ensemble des lacets de base x_0 .

L'idée est d'affirmer que deux chemins homotopes sont les mêmes. Si γ_1 est homotope à γ_2 , on peut noter $[\gamma_1]$ la classe de γ_1 . C'est-à-dire l'ensemble de tous les chemins homotopes à γ_1 . On a ainsi γ_1 homotope à γ_2 dans A , ce qui est équivalent au fait de dire $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ dans $\pi_1(X, x_0)$ (ou bien dans A / \sim)

Remarque. Nous travaillons avec des lacets désormais et non plus des chemins. Nous justifierons cette restriction plus tard.

2.3.2 Structure de groupe

Dans cette partie, (X, x_0) désigne un espace topologique pointé.

Définition (concaténation). Soient $[\gamma_1], [\gamma_2]$ deux éléments de $\pi_1(X, x_0)$. On appelle *concaténation* de ces deux chemins la nouvelle classe de lacet définie par :

$$[\gamma] : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \begin{cases} [\gamma_1](2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ [\gamma_2](2t - 1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

$[\gamma]$ est bien défini car lorsque $t = 1/2$ qui est le seul point d'éventuelle discontinuité, on a $\gamma(1/2) = \gamma_1(1) = x_0 = \gamma_2(1) = \gamma(1/2)$

On peut noter de manière plus explicite $[\gamma]$ comme étant $[\gamma_1 * \gamma_2]$

Définition (lacet constant). On définit le *lacet constant* en x_0 l'application :

$$c_{x_0} : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & x_0 \end{cases}$$

Dont on notera la classe ainsi : $[c_{x_0}]$

Définition (lacet inverse). Soit γ un lacet de base x_0 . On définit son *lacet inverse* :

$$[\tilde{\gamma}] : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & [\gamma](1 - t) \end{cases}$$

Cette application reste bel et bien un lacet de base x_0 .

Théorème. $(\pi_1(X, x_0), *, [c_{x_0}])$ est un groupe.

Démonstration. Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. $*$ est clairement une loi de composition interne. La concaténation de deux lacets basés au même point en reste un. On l'a affirmé dans la définition de la concaténation $*$. Montrons donc les axiomes du groupe :

★ associativité de $*$

Soient $[\gamma_1], [\gamma_2], [\gamma_3] \in \pi_1(X, x_0)$.

On a d'une part :

$$[(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3] : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow X \\ t \longmapsto \begin{cases} [\gamma_1](4t) & \text{si } t \in [0, 1/4] \\ [\gamma_2](4t - 1) & \text{si } t \in]1/4, 1/2[\\ [\gamma_3](2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} \end{cases}$$

et d'autre part :

$$[\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)] : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow X \\ t \longmapsto \begin{cases} [\gamma_1](2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ [\gamma_2](4t - 2) & \text{si } t \in]1/2, 3/4[\\ [\gamma_3](4t - 3) & \text{si } t \in [3/4, 1] \end{cases} \end{cases}$$

A première vue, ces lacets ne sont pas les mêmes. Mais alors, $*$ n'est pas associative ? et $\pi_1(X, x_0)$, le groupe fondamental n'est pas un groupe ?...

Bien sûr que si ! Rappelons-nous une chose : dans $\pi_1(X, x_0)$, deux lacets homotopes sont les mêmes. Il suffit donc de montrer que les lacets $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ et $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ sont homotopes.

Notons aussi une chose, ces lacets sont "presque" les mêmes. Il s'agit seulement du temps de parcours qui diffère. On comprend donc pourquoi ces deux lacets sont les mêmes dans $\pi_1(X, x_0)$.

Exhibons tout de même l'homotopie en question pour cette fois :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 \longrightarrow X \\ (s, t) \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(4t/(1+s)) & \text{si } t \in [0, (1+s)/4] \\ \gamma_2(4t - (s+1)) & \text{si } t \in](1+s)/4, (2+s)/4[\\ \gamma_3((4t - s - 2)/(2-s)) & \text{si } t \in [(2+s)/4, 1] \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi, notre loi de composition interne est bien associative.

★ $[c_{x_0}]$ *élément neutre*

Soit donc γ un lacet de base x_0 . Montrons que $[\gamma * c_{x_0}] = [c_{x_0} * \gamma] = [\gamma]$

On doit donc montrer :

$$\gamma * c_{x_0} \text{ homotope à } \gamma \text{ lui-même homotope à } c_{x_0} * \gamma$$

Commençons par exprimer les deux lacets :

$$[\gamma * c_{x_0}] : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow X \\ t \longmapsto \begin{cases} [\gamma](2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ [c_{x_0}] & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

$$[c_{x_0} * \gamma] : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow X \\ t \longmapsto \begin{cases} [c_{x_0}] & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ [\gamma](2t - 1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

L'Homotopie qui permet de passer de l'un à l'autre est décrite par ce diagramme :

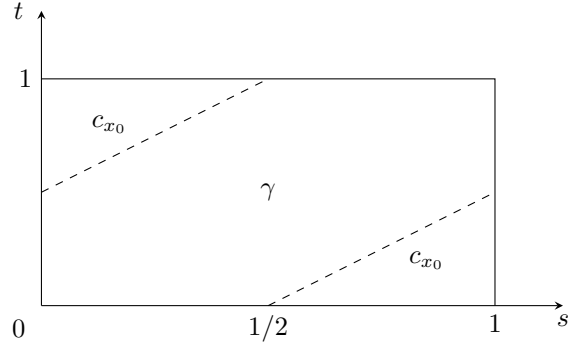


FIGURE 2.8 – Diagramme d'homotopie de $\gamma * c_{x_0}$ à $c_{x_0} * \gamma$ en passant par γ

Cela se lit ainsi :

A $s = 0$, le chemin augmente avec t linéairement sur l'axe vertical. Il parcourt γ à vitesse double (quand $t \geq 1/2$) puis se repose en x_0 . On a donc $H(0, t) = \gamma * c_{x_0}(t)$. s augmente jusqu'en $1/2$, on trouve le chemin γ à vitesse normale, puis s continue de croître jusqu'en 1 où nous retrouvons $c_{x_0} * \gamma$

Traduisons ce diagramme en application continue. Après un bref calcul à la main, on trouve l'homotopie suivante :

$\forall s, t \in [0, 1] :$

★ si $s \leq 1/2 :$

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma(2t/(2s+1)) & \text{si } t \in [0, (2s+1)/2] \\ x_0 & \text{si } t \in](2s+1)/2, 1] \end{cases}$$

★ si $s \geq 1/2 :$

$$H(s, t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } t \in [0, (2s-1)/2] \\ \gamma((2t-2s+1)/(3-2s)) & \text{si } t \in](2s-1)/2, 1] \end{cases}$$

On peut justifier que H est continue en remarquant qu'elle l'est par morceaux, puis de voir qu'elle l'est en les éventuels points de discontinuité ($1/2$).

Ainsi, on a bien $[c_{x_0}]$ élément neutre pour $*$. Tout lacet avant ou après composition par ce chemin trivial reste inchangé.

★ *existence d'inverses*

Soit $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ un lacet de base x_0 . Peut-on le composer par un autre avec $*$ pour rendre ce dernier égal (resp. homotope) à $[c_{x_0}]$ (resp. c_{x_0}) ?

Pour cela, composons $[\gamma]$ par ce qu'on a défini précédemment sont *lacet inverse* noté $[\tilde{\gamma}]$.

On a après simplification :

$\forall t \in [0, 1] :$

$$[\gamma * \tilde{\gamma}](t) = \begin{cases} [\gamma](t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ [\gamma](2 - 2t) & \text{si } t \in]1/2, 1] \end{cases}$$

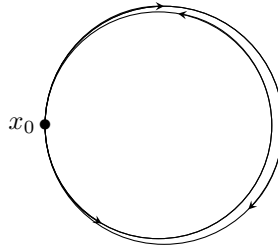


FIGURE 2.9 – Un lacet composé de son inverse

L'idée est la suivante : on part de x_0 pour y revenir via γ (on parcourt le lacet classiquement) pour ensuite revenir littéralement sur nos pas. C'est-à-dire parcourir γ à l'envers. De cette manière, on revient à x_0 . C'est donc bien un lacet et reste à montrer qu'il est égal à $[c_{x_0}]$. C'est-à-dire homotope à c_{x_0} .

Sur la figure 2.9, il faut imaginer que les deux "cercles" sont donc confondus.

On peut donc considérer l'homotopie qui va partir du "bout de γ " pour réduire petit à petit ce demi-tour en un point. Laissons le dessin l'expliquer :

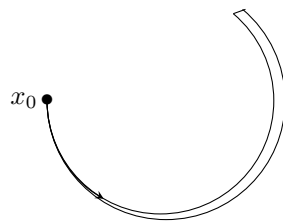


FIGURE 2.10 – $H(1/3, t)$

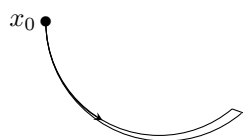


FIGURE 2.11 – $H(2/3, t)$

Posons donc le diagramme d'homotopie suivant :

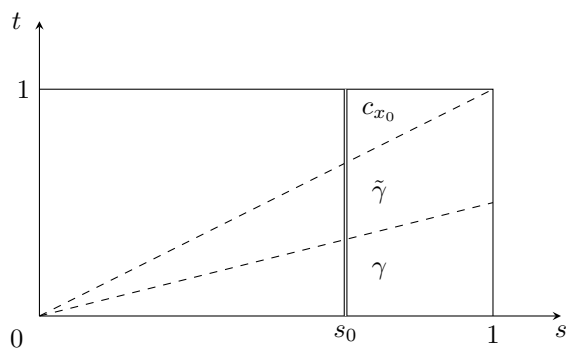


FIGURE 2.12 – Diagramme d'homotopie de c_{x_0} à $\gamma * \tilde{\gamma}$

Ici, on tracé l'homotopie de c_{x_0} à $\gamma * \tilde{\gamma}$ mais puisqu'on a vu que \sim est symétrique, cela revient à dire qu'on a homotopé $\gamma * \tilde{\gamma}$ à c_{x_0} (ce qu'on voulait).

On en déduit la formule explicite de l'homotopie :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow X \\ (s, t) & \longmapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, s/2] \\ \gamma(2s - 2t) & \text{si } t \in]s/2, s[\\ x_0 & \text{si } t \in [s, 1] \end{cases} \end{cases}$$

On a bien H continue et on a montré que dans $\pi_1(X, x_0)$, $[\gamma * \tilde{\gamma}] = [c_{x_0}]$. \square

Résumé :

Si l'on garde les mêmes notations, on a montré :

- $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$
- $c_{x_0} * \gamma \sim \gamma * c_{x_0} \sim \gamma$
- $\gamma * \tilde{\gamma} \sim c_{x_0}$

Ce qui est équivalent au fait d'affirmer que dans $\pi_1(X, x_0)$

- $[(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3] = [\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)]$
- $[c_{x_0} * \gamma] = [\gamma * c_{x_0}] = [\gamma]$
- $[\gamma * \tilde{\gamma}] = [c_{x_0}]$

Remarque. Voici donc l'utilité de travailler désormais avec des lacets et non plus des chemins. Cela nous permet de construire un groupe. Un groupe relatif à tout espace.

Désormais, on pourra donc remplacer $[c_{x_0}]$ par 0 (comme élément neutre du groupe), et $[\tilde{\gamma}]$ par $[\gamma^{-1}]$ comme inverse d'un élément (du groupe).

2.3.3 Indépendance du point

On cherche dans cette partie, à se débarrasser du x_0 dans $\pi_1(X, x_0)$. On a pour cela un théorème :

Théorème (indépendance du point). *Soit X un espace topologique. Soient x_0, y_0 deux points de X .*

Si ces deux points sont dans la même composante connexe par arcs de X , alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, y_0)$ sont isomorphes. Ils sont les mêmes à notation près.

Démonstration. Soient donc X un espace topologique. Soient x_0 et y_0 supposés dans la même composante connexe par arcs. On a donc l'existence d'un chemin c qui relie y_0 à x_0 :

$$c : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & c(t) \end{cases}$$

Tel que $(c(0), c(1)) = (y_0, x_0)$

On peut définir comme pour les lacets, le chemin inverse :

$$c^{-1} : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & c(1 - t) \end{cases}$$

Tel que $(c^{-1}(0), c^{-1}(1)) = (x_0, y_0)$ Et posons désormais :

$$\varphi_c : \begin{cases} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, y_0) \\ [\gamma] & \longmapsto & [c * \gamma * c^{-1}] \end{cases}$$

★ φ_c bien définie

Il nous faut tout d'abord montrer que φ_c est une application *bien définie*. C'est-à-dire que deux éléments qui sont les mêmes dans l'espace de départ ont même image à l'arrivée (ce qui pour le moment n'est pas tout à fait clair).

Soient donc $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ dans $\pi_1(X, x_0)$.

Supposons $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. C'est-à-dire que les deux lacets sont homotopes.

A-t-on $\varphi_c([\gamma_1]) = \varphi_c([\gamma_2])$?

Autrement dit, ces deux lacets sont-ils homotopes ?

Montrons-le :

$$\begin{aligned} & [\gamma_1] = [\gamma_2] \\ \Rightarrow & [c * \gamma_1] = [c * \gamma_2] \\ \Rightarrow & [c * \gamma_1 * c^{-1}] = [c * \gamma_2 * c^{-1}] \\ \Rightarrow & \varphi_c([\gamma_1]) = \varphi_c([\gamma_2]) \end{aligned}$$

On a donc bien φ_c bien définie. Montrons désormais qu'elle ne dépend que de la classe d'équivalence du chemin c et non pas de c lui-même.

Pour cela, prenons $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ ainsi que c, c' deux chemins envoyant y_0 sur x_0 qui sont homotopes.

On a :

$$\begin{aligned}
& [c] = [c'] \\
\Rightarrow [c * \gamma] &= [c' * \gamma] \\
\Rightarrow [c * \gamma * c^{-1}] &= [c' * \gamma * c'^{-1}] \\
\Rightarrow \varphi_c([\gamma]) &= \varphi_{c'}([\gamma]) \text{ On a donc } \varphi_c = \varphi_{c'} \text{ pour peu que } c \text{ et } c' \text{ soient homotopes. (car}
\end{aligned}$$

on l'a montré pour tout γ). Nous pouvons poursuivre.

★ φ_c *morphisme*

Soient $[\gamma_1], [\gamma_2]$ deux éléments de $\pi_1(X, x_0)$. On a :

$$\varphi_c([\gamma_1 * \gamma_2]) = [c * \gamma_1 * \gamma_2 * c^{-1}] = [c * \gamma_1 * c^{-1} * c * \gamma_2 * c^{-1}] = \varphi_c([\gamma_1]) * \varphi_c([\gamma_2])$$

Attention à ne pas s'emmeller les pinces dans les différentes lois. Elles portent le même symbole mais l'une est sur $\pi_1(X, x_0)$, l'autre sur $\pi_1(X, y_0)$. De plus, remarquons que l'on peut établir tout cela grâce à l'associativité montrée plus haut.

★ φ_c *isomorphisme*

★ *Injectivité*

Soit $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$.

On a :

$$\begin{aligned}
& \varphi_c([\gamma]) = 0 \\
\Rightarrow [c * \gamma * c^{-1}] &= 0 \\
\Rightarrow [c * \gamma] &= [c] \\
\Rightarrow [\gamma] &= [c^{-1} * c] \\
\Rightarrow [\gamma] &= 0
\end{aligned}$$

D'où φ_c est injective.

★ *Surjectivité*

Soit $[\gamma] \in \pi_1(X, y_0)$

Posons $[\alpha] = [c^{-1} * \gamma * c]$.

α est continue (car continue en $1/3$ et $2/3$) et :

$$[\alpha](0) = [c^{-1}](0) = [c](1) = x_0 \quad [\alpha](1) = [c](1) = x_0$$

Donc $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ et il est très simple de vérifier que $\varphi_c([\alpha]) = [\gamma]$. On a donc

prouvé notre morphisme φ_c surjectif

On a donc φ_c un isomorphisme.

On a ainsi montré qu'au sein d'une composante connexe d'un espace, le groupe fondamental ne dépend pas du point choisi. \square

On en déduit la remarque qui suit :

Remarque. Si X est un espace connexe par arcs, noter $\pi_1(X)$ est donc légitime. Il suffit de prendre n'importe quel point $x_0 \in X$ comme base pour définir le groupe fondamental de X , puisqu'ils sont tous isomorphes. Nous nous réservons donc le droit à cette notation pour les espaces connexes par arcs, avec lesquels nous travaillerons beaucoup dans nos exemples.

Définition (connexité simple). Soit X un espace topologique connexe par arcs. X sera dit simplement connexe si :

$$\pi_1(X) \simeq \{0\}$$

C'est-à-dire que tous les chemins dans X sont homotopes entre eux. On peut aussi dire que X est 1-connexe.

Notations :

Nous noterons désormais $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ où (X, x_0) est un espace topologique pointé quelconque en omettant les crochets habituels qui mentionnent la classe du lacet : $[\gamma]$. C'est-à-dire qu'à partir de maintenant, si γ et γ' sont homotopes (pas nécessairement égaux), on notera $\gamma = \gamma'$ sans se soucier des crochets.

2.4 Fonction Associée

Le but de cette partie est de comparer les groupes fondamentaux d'espaces par les applications continues. On se propose pour cela la définition d'un nouvel objet, la *fonction associée*.

Définition (fonction associée). Soient X, Y deux espaces topologiques. Soit $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Pointons l'espace X en x_0 . On appelle *fonction associée* à f l'application :

$$f_* : \begin{cases} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ \gamma & \longmapsto & f \circ \gamma \end{cases}$$

Proposition. Soit $f \in \mathcal{C}((X, x_0), Y)$. f_* est un morphisme de groupe.

Démonstration. Faisons la preuve en deux temps :

★ f_* bien définie

Soit $f \in \mathcal{C}((X, x_0), Y)$. Commençons par vérifier que f_* est bien définie. Il suffit de montrer que :

Pour tout γ_1 et γ_2 des chemins dans la même classe d'homotopie (c'est-à-dire $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ où encore γ_1 et γ_2 homotopes) alors $[f \circ \gamma_1] = [f \circ \gamma_2]$ (c'est-à-dire $f \circ \gamma_1$ est homotope à $f \circ \gamma_2$).

Supposons donc qu'il existe une homotopie reliant γ_1 à γ_2 :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow & X \\ (s, t) & \longmapsto & H(s, t) \end{cases}$$

Puis considérons :

$$\tilde{H} : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow & Y \\ (s, t) & \longmapsto & (f \circ H)(s, t) \end{cases}$$

\tilde{H} est continue comme composée d'application continue, et on peut vérifier aisément que c'est une homotopie de $f \circ \gamma_1$ à $f \circ \gamma_2$.

En effet :

- $\forall t \in [0, 1], \tilde{H}(0, t) = f \circ H(0, t) = (f \circ \gamma_1)(t)$
- $\forall t \in [0, 1], \tilde{H}(1, t) = f \circ H(1, t) = (f \circ \gamma_2)(t)$
- $\forall s \in [0, 1], \tilde{H}(s, 0) = f \circ H(s, 0) = f(x_0)$
- $\forall s \in [0, 1], \tilde{H}(s, 1) = f \circ H(s, 1) = f(x_0)$

On a donc construit une homotopie de $f_*(\gamma_1)$ à $f_*(\gamma_2)$. Ainsi f_* ne dépend que de la classe d'homotopie, c'est donc une application bien définie sur $\pi_1(X, x_0)$.

★ f morphisme

Montrons maintenant que c'est un morphisme de groupe.

Il suffit d'avoir :

$$f(\gamma_1 * \gamma_2) = (f \circ \gamma_1) * (f \circ \gamma_2)$$

Ce qui est évident car d'une part : $f(\gamma_1 * \gamma_2) = f \circ \gamma$ où :

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow X \\ t \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } t \in]1/2, 1[\end{cases} \end{cases}$$

Ainsi :

$$f(\gamma_1 * \gamma_2) : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow Y \\ t \longmapsto \begin{cases} (f \circ \gamma_1)(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (f \circ \gamma_2)(2t - 1) & \text{si } t \in]1/2, 1[\end{cases} \end{cases}$$

Et d'autre part :

$$(f \circ \gamma_1) * (f \circ \gamma_2) : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow Y \\ t \longmapsto \begin{cases} (f \circ \gamma_1)(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (f \circ \gamma_2)(2t - 1) & \text{si } t \in]1/2, 1[\end{cases} \end{cases}$$

D'où f_* est bien un morphisme de groupe. □

Proposition. Dans les mêmes conditions, si f est un homéomorphisme de X dans Y , alors f_* est un isomorphisme de groupe. En particulier, $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, f(x_0))$ sont les mêmes (isomorphes).

Démonstration. Puisque f est un homéomorphisme, f est continue. On a donc d'emblée avec notre proposition qui précède que f_* est un morphisme de groupe. Il suffit de montrer qu'il est en plus bijectif.

★ Injectivité

Soit donc $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. Supposons $f_*(\gamma) = c_{f(x_0)}$ (l'élément neutre de l'espace d'arrivée).

Rappelons que f^{-1} est une application continue de Y dans X . On a donc :

$$f^{-1}(f_*(\gamma)) = (f^{-1} \circ f)(\gamma) = \gamma$$

Et de plus :

$$f^{-1}(f_*(\gamma)) = f^{-1}(c_{f(x_0)}) = c_{x_0}.$$

Pourquoi peut-on écrire cette dernière égalité ? Car on sait :

$$f(c_{x_0}) = c_{f(x_0)}$$

Et f est bijective donc l'antécédent est unique ici.

On a montré en combinant nos deux égalités :

$$\gamma = c_{x_0}$$

On reconnaît l'élément neutre du groupe $\pi_1(X, x_0)$ (espace de départ).

On a donc prouvé que f_* était injective.

★ Surjectivité

Soit $\gamma \in \pi_1(Y, f(x_0))$.

Posons $\alpha = f^{-1}(\gamma)$.

On a bien α lacet en x_0 :

$$\alpha(0) = f^{-1}(\gamma(0)) = (f^{-1} \circ f)(x_0) = x_0$$

$$\alpha(1) = f^{-1}(\gamma(1)) = (f^{-1} \circ f)(x_0) = x_0$$

α est continue comme composition d'application continue (f est un homéomorphisme).

Donc c'est bien un élément de $\pi_1(X, x_0)$.

De plus, il est trivial de constater :

$$f_*(\alpha) = \gamma$$

Le morphisme f_* est donc surjectif

Mais il est de plus injectif

C'est donc bien un isomorphisme de groupes. Et on a :

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, f(x_0)).$$

Dans le sens où ces deux groupes sont isomorphes. □

Remarque. On a ces corollaires intéressants :

- Si $f : (X, x_0) \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ où X, Y, Z sont des espaces topologiques et f, g des applications continues, alors on a :

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

- $(I_d)_* = I_d$

Deux espaces homéomorphes ont donc le même groupe fondamental. On a exhibé une condition suffisante pour comparer les groupes fondamentaux des différents espaces topologiques (ou bien pour montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes par contraposée).

Chapitre 3

Revêtements et Relèvements

3.1 Revêtements

3.1.0.1 Définitions

Oublions l'espace d'un instant nos homotopies, les groupes fondamentaux pour admirer de nouveaux concepts qui - à première vue - n'ont pas de rapport avec ce qu'on a déjà étudié. Ils montreront néanmoins leur utilité capitale pour trouver le groupe fondamental d'un espace topologique quelconque.

Définition (revêtement). Soient E, B deux espaces topologiques. Soit $p \in \mathcal{C}(E, B)$. p sera dit *revêtement* si :

- p est surjective
- Pour tout b dans B , il existe un voisinage ouvert V de b tel que $p^{-1}(V)$ soit une union disjointe d'ouverts $(V_i)_{i \in I}$ (où I est un ensemble discret non vide) telle que p restreinte à l'un de ces ouverts soit un homéomorphisme de V_i dans $p(V_i)$.

Ecrit en langage mathématiques, cela donne :

- $\forall b \in B, \exists x \in E, p(x) = b$
- $\forall b \in B, \exists V \in \mathcal{V}(b), \quad p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} V_i \quad \text{et} \quad p|_{V_i} \text{ homéomorphisme.}$

Remarque. On notera ici les unions disjointes \sqcup (et les unions en générales \cup)
 Tout comme l'homotopie, la définition est à première vue assez complexe. Des exemples nous aideront à la comprendre.

L'espace B sera appelé *base*, E l'*espace total*, et les V_i les *fibres* du revêtement. Il est aussi fréquent de dire V un voisinage *bien revêtu par p* si l'union disjointe existe avec p homéomorphisme sur ces espaces restreints.

3.1.1 Exemples classiques de revêtements

Commençons par illustrer cette définition par un premier exemple classique dans ce domaine : l'*exponentielle*.

Exemple (exponentielle). Considérons le revêtement suivant :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{cases}$$

\mathbb{R} et \mathbb{S}^1 sont clairement des espaces topologiques. \mathbb{R} est donc l'espace total, et \mathbb{S}^1 la base. Au passage, peut-être est-il judicieux de rappeler la définition de la sphère en dimension n :

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

\mathbb{S}^1 se représente donc ainsi :

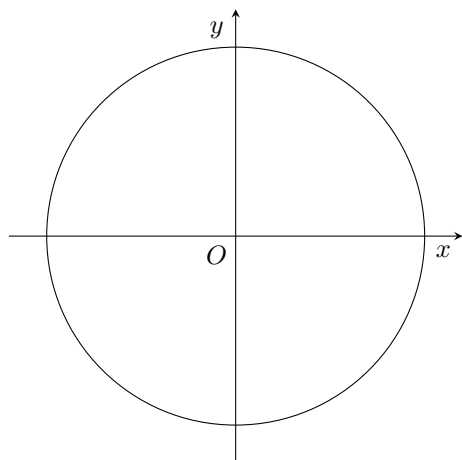


FIGURE 3.1 – \mathbb{S}^1

L'application \exp est clairement surjective. Pour $x \in \mathbb{S}^1$, il suffit de prendre un argument de x . Reste à vérifier la propriété la moins triviale.

Soit donc $x_0 \in \mathbb{S}^1$. On peut distinguer deux cas :

★ si $x_0 \neq (1, 0)$: Prendre le voisinage : $\mathbb{S}^1 \setminus (1, 0)$ convient.

De plus :

$$\exp^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus (1, 0)) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, 2k\pi + 2\pi[$$

Ce qui forme bel et bien une union disjointe. Il est ensuite simple de vérifier que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exp|_{]2\pi k, 2\pi k + 2\pi[} \text{ est un homéomorphisme sur } \mathbb{S}^1 \setminus (1, 0)$$

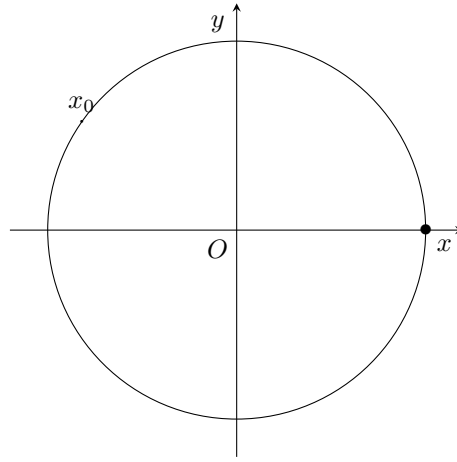


FIGURE 3.2 – $\mathbb{S}^1 \setminus (1, 0)$

Le voisinage de x_0 est tout le cercle sauf le point noir sur l'axe des abscisses. On a en observant $\exp^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus (1, 0))$:

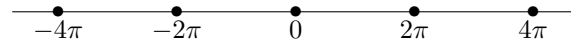


FIGURE 3.3 – $\exp^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus (1, 0))$

On a donc découpé \mathbb{R} en plusieurs petits intervalles ouverts disjoints explicités sur le dessins. Et en effet sur chaque composante de ce découpage, \exp parcourt exactement tout le cercle sauf $(1, 0)$ et est bijective.

C'est l'analyse complexe qui permet d'affirmer que sa réciproque est elle aussi continue notamment grâce à un théorème : *il existe une détermination holomorphe du logarithme sur tout espace connexe par arcs ne comprenant pas 0*. Mais cela n'est pas essentiel dans notre étude.

★ si $x_0 = (1, 0)$:

On peut dresser exactement le même raisonnement que celui pris jusqu'à maintenant en prenant comme voisinage $\mathbb{S}^1 \setminus (-1, 0)$ au lieu de $\mathbb{S}^1 \setminus (1, 0)$.

Nous laissons au lecteur s'appropriier les notions si nécessaire avec cette seconde partie de la preuve. Remarquons finalement, que pour l'exponentielle avec ces espaces, la fibre est \mathbb{Z} .

Exemple (application puissance). Considérons cette fois l'application :

$$p_n : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z^n \end{cases}$$

Où $n \in \mathbb{N}^*$ fixé

La base et l'espace total sont les mêmes. Il s'agit du corps des complexes privé de son neutre additif 0. On le note \mathbb{C}^*

Pour ce qui suit, un peu d'analyse complexe est utile. Commençons par le plus simple. p_n est-elle surjective ?

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. On peut le poser sous sa forme polaire :

$$z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

Avec $\theta_0 \in [0, 2\pi[$

Puisque $z_0 \neq 0$, on a $r_0 > 0$ et donc 0 et $-z_0$ sont distincts.

Il existe donc une et une unique demi-droite du plan en 0 qui passe par $-z_0$. Notons-la Δ_{z_0} .

$$\Delta_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \in \arg(z_0) + \pi + 2\pi\mathbb{Z}\}$$

C'est-à-dire que :

$$re^{i\theta} \in \Delta_{z_0} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta - \theta_0 = 2k\pi + \pi$$

Représentons la situation :

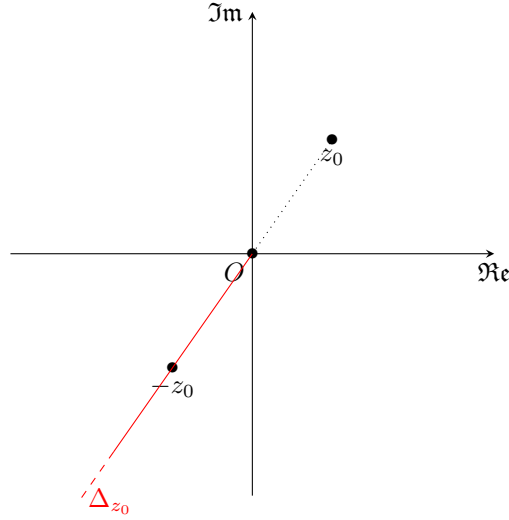


FIGURE 3.4 – Δ_{z_0} pour un certain z_0

Nous ferons désormais de l'analyse complexe dans cet exemple. Si cela ne vous parle pas, le troisième et dernier exemple utilise lui aussi les complexes sans gros théorème d'analyse. Vous pouvez vous y référer également.

Continuons donc notre exemple ici. Il existe une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \Delta_{z_0}$ car c'est un plan privé d'une demi-droite.

Posons Log_Δ une telle détermination. Elle est définie ainsi :

$$\text{Log}_\Delta : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \Delta_{z_0} & \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto \ln(|z|) + i \arg_\Delta(z) \end{cases}$$

Avec : $\arg_\Delta(z)$ l'argument de z compris entre $[\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$

Bien. On a montré qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme, et qu'on pouvait calculer le logarithme complexe de z_0 .

Cette première étape nous permet de montrer la surjectivité du revêtement p_n . Effectivement, à $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, il nous suffit de poser :

$$z_s = \exp\left(\frac{\text{Log}_\Delta(z_0)}{n}\right)$$

Pour avoir :

$$p_n(z_s) = z_s^n = \exp(n \text{Log}_\Delta(z_s)) = \exp\left(n \text{Log}_\Delta\left(\exp\left(\frac{\text{Log}_\Delta(z_0)}{n}\right)\right)\right)$$

Puis :

$$p_n(z_s) = \exp\left(n \frac{\text{Log}_\Delta(z_0)}{n}\right) = \exp(\text{Log}_\Delta(z_0))$$

Et finalement :

$$p_n(z_s) = z_0$$

On a bien $z_s \in \mathbb{C}^*$ et ainsi, l'application p_n est surjective.

Montrons désormais la propriété la plus dure. On cherche un voisinage de z_0 *bien revêtu* par p_n .

Pour cela posons $V(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in]r_0/2, 3r_0/2[, \arg(z) \in]\theta_0/2, 3\theta_0/2[\}$

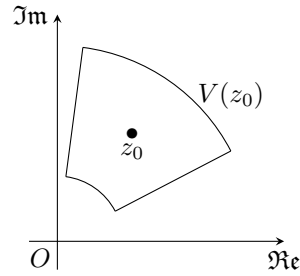


FIGURE 3.5 – voisinage du point z_0

A-t-on désormais $V(z_0)$ bien revêtu par p_n ?

Tout d'abord, $V(z_0)$ est inclus dans $\mathbb{C} \setminus \Delta_{z_0}$. Le logarithme existe donc dans tout le voisinage $V(z_0)$.

Soit alors $z \in p_n^{-1}(V(z_0))$

Posons $z = re^{i\theta}$

On a $z^n \in V(z_0)$

Or on sait que multiplier un complexe par un autre revient à multiplier les modules, et à additionner les arguments.

On a alors avec $z^n \in V(z_0)$:

- $r^n \in]r_0/2, 3r_0/2[$
- $n\theta \in]\theta_0/2, 3\theta_0/2[+ 2\pi\mathbb{Z}$

C'est-à-dire exactement :

- $r \in \left[\sqrt[n]{\frac{r_0}{2}}, \sqrt[n]{\frac{3r_0}{2}} \right[$
- pour l'argument, on pourrait être tenté de poser $\left] \frac{\theta_0}{2n}, \frac{3\theta_0}{2n} \right[$ mais rappelons-nous qu'il existe plusieurs autres solutions ! Il s'agit ici des racines n -ièmes. On a en fait :

$$\theta_k \in \left] \frac{\theta_0/2 + 2\pi k}{n}, \frac{3\theta_0/2 + 2\pi k}{n} \right[$$

Où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ sont nos n solutions pour θ

Il suffit alors de poser :

$$V_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \in \left[\sqrt[n]{\frac{r_0}{2}}, \sqrt[n]{\frac{3r_0}{2}} \right[, \arg(z) \in \left] \frac{\theta_0/2 + 2\pi k}{n}, \frac{3\theta_0/2 + 2\pi k}{n} \right[\right\}$$

Où, encore une fois, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

Les V_k sont clairement des ouverts de \mathbb{C}^*

Il est facile de vérifier que les V_k ne s'intersectent pas (cela repose sur le fait que $\theta_0 < 2\pi$) et il est simple également de vérifier l'inclusion réciproque :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, p_n(V_k) \subset V(z_0)$$

On a donc montré ce résultat :

$$\forall z_0 \in \mathbb{C}^*, \exists V(z_0) \in \mathcal{V}(z_0), p_n^{-1}(V(z_0)) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} V_k$$

Où, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$V_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \in \left[\sqrt[n]{\frac{r_0}{2}}, \sqrt[n]{\frac{3r_0}{2}} \right[, \arg(z) \in \left] \frac{\theta_0/2 + 2\pi k}{n}, \frac{3\theta_0/2 + 2\pi k}{n} \right[\right\}$$

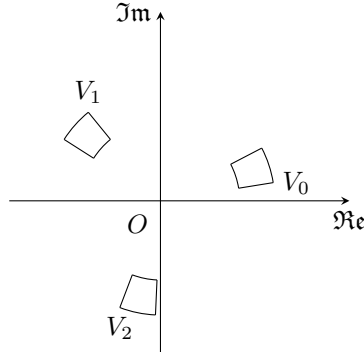


FIGURE 3.6 – Représentations des V_k dans le cas particulier $n = 3$

On a donc montré l'union disjointe. Voici notre dernière question : l'application p_n est-elle un homéomorphisme sur l'un des V_k ? Soit donc $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

p_n est évidemment continue car polynomiale et on a effectivement une réciproque continue car sur V_k comme justifié précédemment, il existe une détermination holomorphe du logarithme. On a donc une réciproque locale à notre revêtement :

$$g_k : \begin{cases} V(z_0) & \longrightarrow & V_k \\ z & \longmapsto & \exp\left(\frac{\log_{\Delta}(z) + 2i\pi k}{n}\right) \end{cases}$$

Voici la réciproque continue recherchée. On a finalement montré que l'application :

$$p_n : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z^n \end{cases}$$

Est un revêtement à n fibres (notre premier exemple présentant un nombre fini de fibre !)

Exemple (exponentielle complexe). Voici un autre exemple. On considère la même application que dans notre premier exemple mais l'on change l'espace total et ainsi la base :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{cases}$$

où \mathbb{C}^* désigne $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

L'espace total est donc \mathbb{C} , la base \mathbb{C}^* .

Alors lançons-nous : l'application est-elle surjective ?

La réponse est évidemment oui. Démontrons-le :

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. On peut écrire cet élément sous sa forme polaire :

$$z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

Puisque $z_0 \neq 0$, on a $r_0 > 0$. Le logarithme naturel de r_0 est donc défini, et on peut

poser $a = \ln(r_0)$. Posons aussi $b = \theta_0$. On a :

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^{\ln(r_0)} \cdot e^{i\theta_0} = r_0 e^{i\theta_0} = z_0$$

On a donc prouvé que l'exponentielle complexe était surjective. Elle est de plus continue. On peut donc poursuivre. Vérifions que la seconde propriété sur les revêtements est vraie. Rappelons-la :

$$\forall b \in B, \exists V \in \mathcal{V}(b), \quad p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} V_i \quad \text{et} \quad p|_{V_i} \text{ homéomorphisme}$$

Soit donc $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Posons d'abord $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ avec $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$.

Distinguons deux cas :

★ si $\theta \neq 0$

Dans ce cas-là, posons encore une fois :

$$V(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = r e^{i\theta}, \quad r \in]r_0/2, 3r_0/2[, \quad \theta \in]\theta/2, 3\theta/2[\}$$

un voisinage de z_0 .

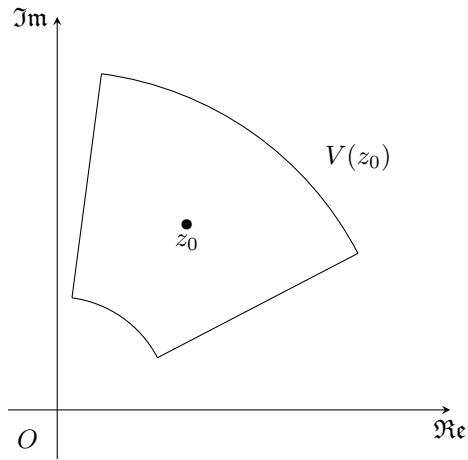


FIGURE 3.7 – voisinage d'un point à partie imaginaire non nulle

On a par la suite :

$$\exp^{-1}(V(z_0)) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} V_k$$

où pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$V_k = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \in]\ln(r_0/2), \ln(3r_0/2)[, \Im(z) \in]2\pi k + \theta_0/2, 2\pi k + 3\theta_0/2[\}$$

Cette petite propriété n'est pas trop ardue à montrer. Nous ne le ferons pas ici.

Remarquons que la famille $(V_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est bel et bien une famille de parties disjointes de \mathbb{C} . C'est-à-dire que les V_k sont deux-à-deux disjoints.

Représentons-les sur le plan complexe :

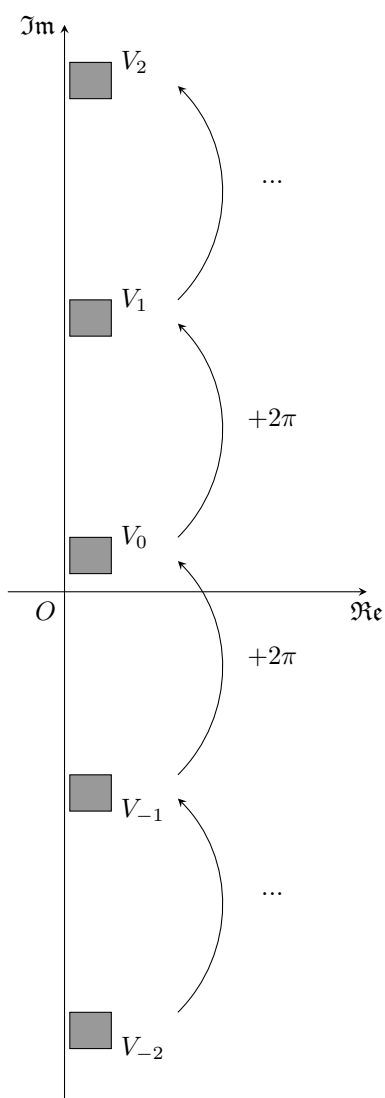


FIGURE 3.8 – $\exp^{-1}(V(z_0))$ ou encore l'union disjointe des V_k

Il faut imaginer que cette famille de pavés ouverts et donc infinie en haut comme en bas.

Finalement, remarquons qu'à k fixé, nous avons \exp un homéomorphisme de V_k sur $\exp(V_k)$. Cela vient du fait que sur chaque V_k , le choix de l'argument nous est imposé. Il doit appartenir à $]2\pi k + \theta_0/2, 2\pi k + 3\theta_0/2[$. On transforme donc notre exponentielle (non injective dans \mathbb{C}) en un homéomorphisme sur un voisinage ouvert.

L'argument de la continuité de la réciproque repose encore sur des théorèmes d'analyse complexe. (On choisit $V(z_0)$ connexe par arcs, ne rencontrant 0.)

De cette manière on aura $V(z_0)$ bien revêtu par p et $\forall i \in I$, V_i est homéomorphe à $\exp^{-1}(V(z_0))$ comme l'illustre la figure ci-dessous :

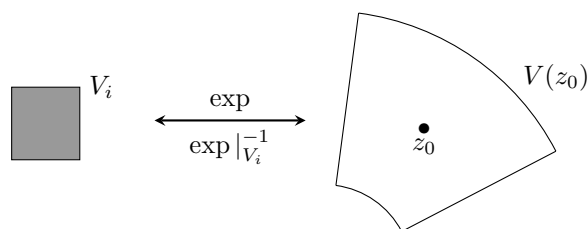


FIGURE 3.9 – $V(z_0)$ bien revêtu

★ si $\theta = 0$:

La démonstration est sensiblement la même, on peut prendre comme voisinage le même pour le rayon, et $[-\pi/4, \pi/4]$ pour l'argument par exemple. Le voisinage est encore une fois connexe par arcs donc il n'y a pas de problème pour construire \exp un homéomorphisme local.

Garder cet exemple en tête peut s'avérer utile lorsque l'on parle de revêtements. Dit vulgairement, p est un revêtement si l'image réciproque de l'application p est une "pile d'espaces superposés qui ne se touchent pas" vérifiant que p est un homéomorphisme sur chacun d'eux. Tout cela de manière locale. On illustre cette explication ci-dessous :

On a ici le revêtement p représenté par la flèche en pointillé

L'espace total E est situé au dessus de l'espace de base B

En quelconque point de l'espace de base, il existe cette "pile d'espaces superposés disjoints" qui sont en fait des voisinages ouverts qui nous donnent toujours V_x si on y applique p . Il s'agit d'une sorte de projection qui peut avoir beaucoup de réciproques (autant que de V_i). Il peut y en avoir une infinité ou non. On sait juste que la numérotation des V_i est discrète (C'est-à-dire qu'ils sont au plus dénombrables).

Remarquons qu'en définissant le revêtement ainsi, la première condition portant sur la surjectivité de p devient sous-entendue.

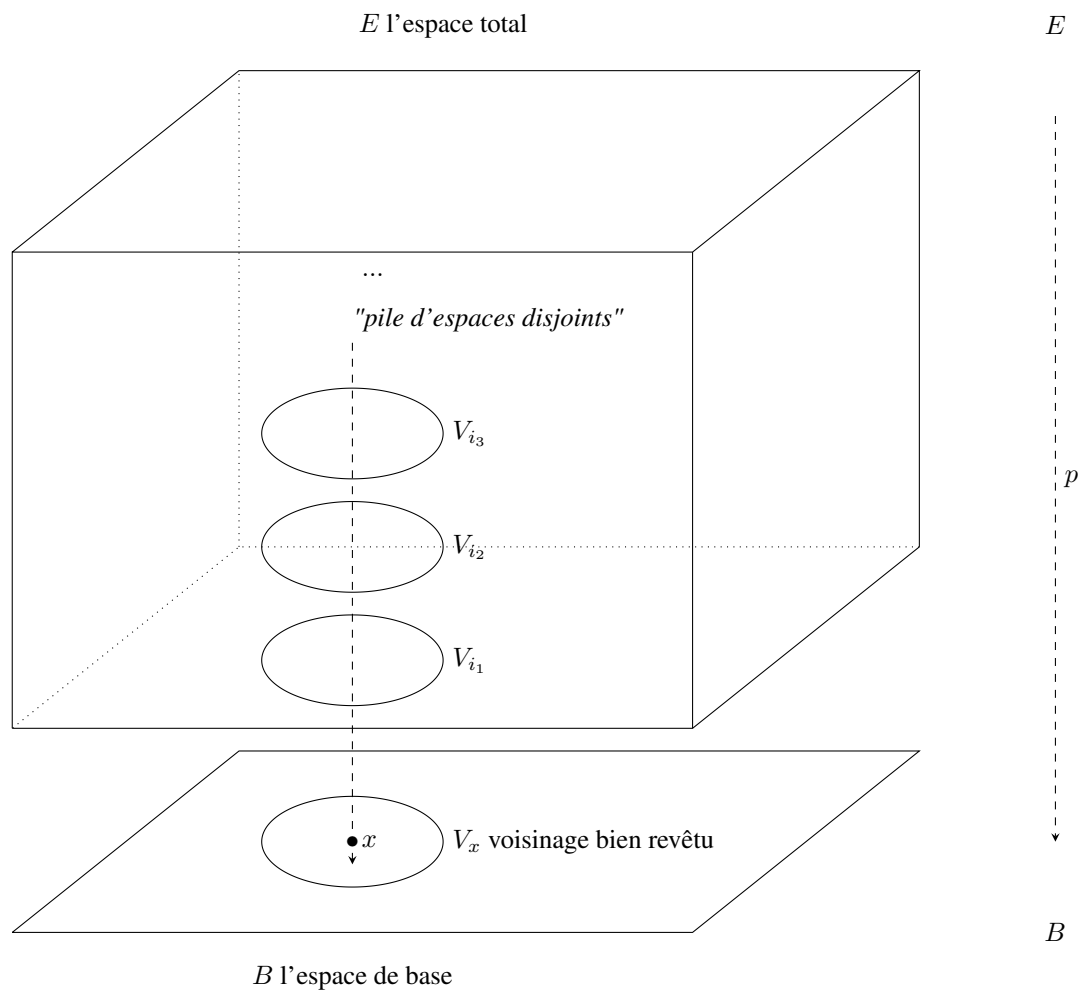


FIGURE 3.10 – Illustration *représentative* d'un revêtement

Remarque. Le nombre de fibres est constant quel que soit le point dans l'espace de base choisi. On sait juste que ce nombre de fibres est au plus dénombrable. On peut autant en avoir une fibre, en avoir 10 sur un autre espace et \aleph_0 (une infinité) encore ailleurs. Il dépend simplement de l'espace de base, de l'espace total et bien sûr du revêtement choisi.

3.2 Relèvements

3.2.1 Définitions et résultats préliminaires

3.2.1.1 Définition

Définition (relèvement). Soient E , F , B trois espaces topologiques. Soit p un revêtement de E dans B . Soit f une application continue de F dans B . \tilde{f} une application continue de F dans E est appelée un *relèvement* de f si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ F & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

C'est-à-dire, si l'on a :

$$p \circ \tilde{f} = f$$

Remarque. Commençons par remarquer que le relèvement est relatif à un revêtement, et à une application continue.

Commençons cette partie par un premier résultat agréable :

Proposition. Soient E , F , B trois espaces topologiques. Soit p un revêtement de E dans B fixé. Soit f une application continue de F dans B . Soient \tilde{f}_1 , \tilde{f}_2 deux relèvements de f (qui vont donc de F dans E). Alors :

$$A = \{a \in F \mid \tilde{f}_1(a) = \tilde{f}_2(a)\}$$

est une partie ouverte et fermée de F

Démonstration. Montrons donc A ouverte, puis fermée.

★ A est une partie ouverte :

Soit $a \in A$. Le but est de montrer qu'il existe un ouvert de F contenant a , sur lequel \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 sont égales. Trouver un voisinage vérifiant les mêmes propriétés est suffisant. Pour cela posons :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(a) &= \tilde{f}_2(a) = x \\ f(a) &= b \end{aligned}$$

Rappelons que :

$$p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2 = f$$

Donc ici on a :

$$p(x) = p \circ \tilde{f}_1(a) = f(a) = b$$

Donc $p(x) = b$. Mais p est un revêtement, il existe donc V un voisinage de b tel que V est *bien revêtu* par p .

C'est-à-dire :

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$$

où I est discret (inclus dans \mathbb{Z} par exemple) et V_i une famille d'ouverts disjoints.

Mais l'on sait $x \in p^{-1}(V)$. x est donc dans l'un de ces ouverts. Puisqu'ils sont disjoints, il est dans exactement un seul d'entre eux. Posons donc :

$$x \in V_{i_0}, \quad i_0 \in I$$

Où i_0 est donc unique ici. V_{i_0} est ouvert dans E l'espace total. Mais $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathcal{C}(F, E)$ (sont continues de F dans E).

Rappelons la définition de continuité :

$$\tilde{f} \in \mathcal{C}(F, E) \iff \forall a \in F, \forall W \in \mathcal{V}(\tilde{f}(a)), \tilde{f}^{-1}(W) \in \mathcal{V}(a)$$

Se lit " \tilde{f} est continue de F dans E si et seulement si pour tout a dans F , pour tout voisinage de $\tilde{f}(a)$, l'image réciproque de ce voisinage par \tilde{f} est un voisinage de a "

Ici, on sait \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 continues. Donc, avec V_{i_0} voisinage de x et avec $x = \tilde{f}_1(a) = \tilde{f}_2(a)$, on a :

$$\tilde{f}_1^{-1}(V_{i_0}), \tilde{f}_2^{-1}(V_{i_0}), \text{ deux voisinages de } a$$

Posons W l'intersection de ces deux voisinages. W est un voisinage de a dans F et :

$$\tilde{f}_1(W) \subset V_{i_0} \quad \tilde{f}_2(W) \subset V_{i_0}$$

On peut le montrer pour \tilde{f}_1 par exemple (cela fonctionne pareillement pour \tilde{f}_2).

On a :

$$W \subset \tilde{f}_1^{-1}(V_{i_0}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V_{i_0}) \subset \tilde{f}_1^{-1}(V_{i_0})$$

D'où :

$$\tilde{f}_1(W) \subset V_{i_0}$$

Il nous reste à montrer $W \subset A$. On aura alors exhibé un voisinage de a contenu dans A et - la propriété étant vraie pour tout $a \in A$ - on aura montré A ouvert.

Soit donc $w \in W$. On peut dire deux choses :

$$f(w) = p(\tilde{f}_1(w)) = p(\tilde{f}_2(w))$$

$$f(w) \in V_{i_0}$$

On sait finalement que p est un homéomorphisme de V_{i_0} dans V . On peut donc - avec notre seconde condition - composer par $p|_{V_{i_0}}^{-1}$ pour trouver :

$$\tilde{f}_1(w) = \tilde{f}_2(w)$$

Donc \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 sont égales sur W puis $W \subset A$ et A est ouvert.

★ A est une partie fermée :

Il nous suffit pour cela de montrer que $F \setminus A$ est ouvert.

Cette seconde partie ressemble à la première, nous irons donc un peu plus vite.

Soit $a \in F \setminus A$. On a $\tilde{f}_1(a) \neq \tilde{f}_2(a)$. Comme précédemment, on pose :

$$(\tilde{f}_1(a), \tilde{f}_2(a)) = (x_1, x_2)$$

$$f(a) = b$$

On a par la suite :

$$p(x_1) = p(x_2) = b$$

On prend le même voisinage V de b que précédemment et l'on a :

$$x_1, x_2 \in p^{-1}(V) \subset \bigsqcup_{i \in I} V_i$$

Rappelons que les V_i sont disjoints.

Posons donc : $x_1 \in V_{i_1}$, $x_2 \in V_{i_2}$ où i_1 et i_2 sont uniques.

Si $i_1 = i_2$ alors avec p homéomorphisme sur $V_{i_1} = V_{i_2}$ et $p(x_1) = p(x_2)$, on aurait $x_1 = x_2$ donc $\tilde{f}_1(a) = \tilde{f}_2(a)$ ce qui est absurde.

Donc $i_1 \neq i_2$.

Soit $j \in \{1, 2\}$

On a :

$$V_{i_j} \text{ voisinage de } x_j$$

Par continuité de \tilde{f}_j , on a :

$$\exists W_j \in \mathcal{V}(a) \mid \tilde{f}_j(W_j) \subset V_{i_j}$$

Posons $W = W_1 \cap W_2$. W est un voisinage de a dans F et :

$$\tilde{f}_1(W) \subset V_{i_1} \quad \tilde{f}_2(W) \subset V_{i_2}$$

Mais V_{i_1} et V_{i_2} sont disjoints. Donc $\tilde{f}_1(W)$ et $\tilde{f}_2(W)$ le sont aussi avec les deux inclusions qui précédent.

On a donc un voisinage W de a tel que :

$$\forall w \in W, \tilde{f}_1(w) \neq \tilde{f}_2(w)$$

C'est-à-dire $W \subset F \setminus A$ et donc A est fermée.

$\{a \in F \mid \tilde{f}_1(a) = \tilde{f}_2(a)\}$ est donc une partie ouverte et fermée de F .

□

Corollaire. *On en déduit que si F est connexe, alors deux relèvements de f égaux en un point sont les mêmes.*

La preuve de ce petit corollaire est simple :

Démonstration. Supposons F connexe, et \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 deux relèvements de $f : F \longrightarrow B$ égaux en un point x de F . On sait $\{a \in F \mid \tilde{f}_1(a) = \tilde{f}_2(a)\}$ une partie ouverte et fermée de F . Avec F connexe, une telle partie est donc soit F tout entier, soit \emptyset . Mais elle n'est pas vide car x y appartient. Donc $\{a \in F \mid \tilde{f}_1(a) = \tilde{f}_2(a)\} = F$. Autrement dit, $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. □

3.2.1.2 Groupe d'automorphisme

Définition (groupe d'automorphisme d'un revêtement). Soient E, B des espaces topologiques. Soit $p : E \longrightarrow B$ un revêtement. Soit $\psi : E \longrightarrow E$ un homéomorphisme. ψ sera dit *automorphisme du revêtement* p si :

$$p \circ \psi = p$$

On notera l'ensemble des automorphismes du revêtement p ainsi :

$$Aut_p(E)$$

Proposition. $Aut_p(E)$ est un sous-groupe de l'ensemble des morphismes de E dans lui-même.

Démonstration. Il nous suffit de vérifier les axiomes de groupe. Cela n'est pas trop ardu :

- On a bien $I_d \in Aut_p(E)$
- Soient $\psi_1, \psi_2 \in Aut_p(E)$. $\psi_1 \circ \psi_2$ est clairement un homéomorphisme et :

$$p \circ \psi_1 \circ \psi_2 = p \circ \psi_2 = p$$

- Si $\psi \in Aut_p(E)$ alors on a ψ homéomorphisme par définition. On a donc ψ^{-1} son inverse une application continue de E dans lui-même. et de plus :
Pour tout $y \in E$ alors on peut poser $x = \psi^{-1}(y)$ et avoir :

$$p \circ \psi^{-1}(y) = p \circ \psi^{-1}(\psi(x)) = p(x) = p(\psi(x)) = p(y)$$

Et avoir :

$$p \circ \psi^{-1} = p$$

L'avant dernière égalité provient du fait que $\psi \in Aut_p(E)$
On a donc bel et bien $Aut_p(E)$ un sous-groupe de l'ensemble des homéomorphismes de E dans E . \square

Remarque. Tout élément du groupe $Aut_p(E)$ est un relèvement de p . En effet, Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \psi & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Proposition. Soient E, B des espaces topologiques avec E connexe. Soit $p : E \longrightarrow B$ un revêtement. $Aut_p(E)$ agit librement sur E .

Démonstration. Il nous suffit pour montrer cette proposition de considérer l'action :

$$\begin{cases} Aut_p(E) \times E & \longrightarrow E \\ (\psi, x) & \longmapsto \psi(x) \end{cases}$$

On a bel et bien une action de groupe.

Montrons donc qu'elle est libre Soit $\psi \in Aut_p(E)$. Supposons $\psi \neq I_d$.

Soit $x \in E$. si $\psi \cdot x = x$ alors on a $\psi(x) = x$

Mais E étant connexe, si ψ coïncide en un point avec l'application I_d alors les deux sont égales (cela est vrai car I_d est un relèvement). Mais on a supposé $\psi \neq I_d$ d'où absurdité !

Ainsi, $\psi \cdot x \neq x$ quel que soit $x \in E$. C'est-à-dire que $Aut_p(E)$ agit librement sur E et que notre action est libre. \square

Proposition. On peut même aller plus loin avec l'affirmation suivante : Soient E, B des espaces topologiques, $p \in \mathcal{C}(E, B)$ un revêtement. Supposons E connexe. On a :

$$\forall x \in E, \exists V \in \mathcal{V}(x), \forall \psi \in Aut_p(E) \setminus I_d, \psi(V) \cap V = \emptyset$$

C'est-à-dire que tout point admet un voisinage ouvert sur lequel ψ déplace tous les points hors de celui-ci (sauf bien sûr si ψ est l'identité).

Démonstration. Soient donc $x \in E$. On sait par définition du revêtement qu'il existe V un voisinage de $p(x)$ bien revêtu par p . C'est-à-dire :

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$$

On peut poser $x \in V_{i_0}$ où i_0 est unique dans I (car p restreinte à V_i est un homéomorphisme).

Montrons par contraposée que si $\psi(V_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$ alors $\psi = I_d$

Supposons donc qu'il existe $z \in E$ qui vérifie :

$$z \in V_{i_0} \text{ et } z \in \psi(V_{i_0})$$

On peut poser $z = \psi(y)$ et l'on a :

$$p(y) = p(\psi(y)) = p(z)$$

et puisque y et z sont dans le même voisinage ouvert V_{i_0} et que p restreint à ce voisinage est un homéomorphisme, on a $y = z$.

On a donc $\psi(y) = y$ pour un certain point. Mais E étant connexe, on en déduit par nos résultats précédents que :

$$\psi = I_d$$

On a montré par contraposée que si $\psi \neq I_d$ on avait :

$$\psi(U_{i_0}) \cap U_{i_0} = \emptyset$$

Où U_{i_0} est un voisinage ouvert de x qui existe. On a donc exhibé un voisinage qui convient et ainsi montré la proposition. \square

Remarque. On dira que $\text{Aut}_p(E)$ agit librement et discrètement sur E . Librement dans le sens déjà expliqué et discrètement dans le sens où ψ "bouge" tout le voisinage de tout point donné (si différente de l'identité).

3.2.1.3 Topologie quotient

Le but de cette partie est de munir un ensemble d'une topologie. On prépare en fait le terrain pour relier continuité et groupes. Pour cela on a donc besoin d'ensembles topologiques servant de base et d'applications continues.

Définition (topologie engendrée). Soient X un espace topologique, soit Y un ensemble. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application surjective.

On peut munir Y d'une famille $\{A_i, i \in I, \}$ avec $\forall i \in I, A_i \subset Y$.

Notons pour cela \mathcal{T}_X la topologie sur X et T notre famille composée des A_i . On la définit ainsi :

$$\forall A \subset Y, \quad A \in T \iff f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$$

Lemme. Dans le même cadre que celui de la définition ci-dessus, T est une topologie sur Y . Elle sera appelée topologie engendrée par f (ou bien topologie engendrée tout court).

Démonstration. Vérifions donc les axiomes de topologie :

On a :

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_X \text{ donc } \emptyset \in T$$

$$f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}_X \text{ donc } Y \in T$$

On a vérifié le premier axiome. Continuons :

Supposons $A, B \in T$. On a :

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X \text{ et } f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$$

Mais \mathcal{T}_X étant une topologie sur X , on a :

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$$

C'est-à-dire :

$$f^{-1}(A \cap B) \in \mathcal{T}_X$$

D'où finalement :

$$A \cap B \in T$$

Il ne nous reste plus que le dernier axiome.

Soit $(A_i)_{i \in I} \in T^I$ une famille d'éléments de T . Il nous faut vérifier que l'union de cette famille est bien dans T .

Soit $i \in I$

On a : $A_i \in T$ donc $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{T}_X$.

Cela étant vrai pour tout $i \in I$ et \mathcal{T}_X étant une topologie, on a donc :

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \in \mathcal{T}_X$$

Ce qui revient à affirmer :

$$f^{-1} \left[\bigcup_{i \in I} A_i \right] \in \mathcal{T}_X$$

Et enfin :

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in T$$

On a donc montré le troisième axiome.

On a donc T topologie sur Y que l'on appellera topologie engendrée et que l'on notera désormais \mathcal{T}_Y \square

Remarque. Cette définition (relative à une application f) rend cette fonction instantanément continue puisque l'image réciproque de tout ouvert est *défini* comme ouvert.

Définition (action continue). Soit $G \curvearrowright E$ une action de groupe où E est un espace topologique. Cette action sera dite *continue* si son morphisme associé :

$$\Phi : \begin{cases} G & \longrightarrow \mathcal{S}_E \\ g & \longmapsto \phi_g \end{cases}$$

vérifie que :

$$\forall g \in G, \phi_g \text{ est une application continue de } E \text{ dans } E.$$

Dans ce cas on aura que quel que soit $g \in G$, ϕ_g continue, et sa réciproque $\phi_{g^{-1}}$ continue également (car $g^{-1} \in G$) et ainsi ϕ_g est un homéomorphisme de E dans E quel que soit $g \in G$.

Définition (topologie sur l'ensemble des orbites). On a défini des objets nous permettant maintenant de relier topologie et groupes.

Soit donc $G \curvearrowright E$ une action de groupe avec E espace topologique.

Notons E/G l'ensemble des orbites de cette action. On peut aussi noter :

$$p : \begin{cases} E & \longrightarrow E/G \\ x & \longmapsto O_x \end{cases}$$

On peut munir E/G de la topologie engendrée par p et on a donc $p \in \mathcal{C}(E, E/G)$

Lemme. p définie comme précédemment est une application ouverte. C'est-à-dire que l'image directe de tout ouvert par p est ouverte.

Démonstration. Soit donc U un ouvert inclus dans E . Puisque E/G est muni de la topologie engendrée, on a $p(U)$ ouvert si et seulement si :

$$p^{-1}(p(U)) \text{ est ouvert}$$

Soit $x \in p^{-1}(p(U))$. On a donc :

$$p(x) \in p(U)$$

Ce qui est vrai si et seulement s'il existe $u \in U$ vérifiant : $p(x) = p(u)$

Mais l'application p envoie un élément sur son orbite. Affirmer que $p(x) = p(u)$ revient donc à dire que x et u sont dans la même orbite. On peut alors assurer l'existence de $g \in G$ tel que :

$$x = g \cdot u$$

On a donc montré

$$x \in p^{-1}(p(U)) \iff \exists u \in U, \exists g \in G, x = g \cdot u$$

Ce qui signifie exactement :

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G, u \in U} g \cdot u$$

Ou encore :

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} \phi_g(U)$$

Mais rappelons-nous que pour tout $g \in G$, ϕ_g est un homéomorphisme. C'est donc une application ouverte (voir le chapitre 1 de cet écrit) et ainsi $p^{-1}(p(U))$ est une réunion d'ouverts donc est ouverte à son tour.

On a ainsi prouvé que p est une application ouverte. □

3.2.2 Caractérisation des revêtements

Théorème. Soient G un groupe, E un espace topologique connexe. Supposons que G agisse sur E discrètement et continûment. C'est-à-dire - en notant ϕ le morphisme associé - que l'on suppose :

$$\forall g \in G, \phi_g \in \mathcal{C}(E, E)$$

Et l'on suppose également :

$$\forall x \in E, \forall g \in G \setminus \{e\}, \exists V \in \mathcal{V}(x), \quad V \cap \phi_g(V) = \emptyset$$

Alors $p \in \mathcal{C}(E, E/G)$ qui a tout élément associe son orbite est un revêtement et :

$$\text{Aut}_p(E) \simeq G$$

(Ces deux groupes sont isomorphes)

Ce résultat est très puissant. On a déjà vu que tous les revêtements et leur groupes d'automorphismes vérifiaient cette propriété d'action libre et discrète (sous réserve d'avoir E connexe). Il s'agit ici d'une sorte de réciproque. On affirme que si l'on a une action libre et discrète sur E l'espace total, alors on a un revêtement $p : E \longrightarrow E/G$

Remarque. La preuve qui suit est assez longue. Chaque étape n'est pas compliquée en soit mais l'ensemble est dense. Un petit conseil pour suivre peut être de lire $g \cdot x$ au lieu de $\phi_g(x)$ car il s'agit de la même chose, et de revoir les définitions d'orbite et de revêtement (présentes respectivement dans le chapitre 1 et dans le chapitre 3)

Démonstration. Soient donc G un groupe, E un espace topologique connexe et supposons que G agisse sur E discrètement.

Notre objectif est de montrer que $p : E \longrightarrow E/G$ est un revêtement.

Or, p est clairement surjective. En effet si $\mathcal{O} \in E/G$ est une orbite, elle est non vide et il suffit de prendre $x \in \mathcal{O}$ pour avoir $p(x) = \mathcal{O}_x$ c'est-à-dire un antécédent qui convient.

On sait aussi que c'est une application continue car E/G est muni de la topologie engendrée, et p est surjective ce qui est la seule hypothèse pour définir cette topologie.

Il nous reste à montrer la condition la moins évidente :

$$\forall \mathcal{O} \in E/G, \exists W \in \mathcal{V}(\mathcal{O}), \quad p^{-1}(W) = \bigsqcup_{i \in I} W_i \quad \text{et} \quad p|_{W_i} \text{ homéomorphisme.}$$

Soit donc $\mathcal{O} \in E/G$. On peut poser $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x$ (c'est-à-dire de poser $x \in \mathcal{O}$ car les orbites ne sont jamais vides, et donc d'affirmer \mathcal{O} l'orbite de x).

Rappelons cette hypothèse cruciale :

$$\forall x \in E, \forall g \in G \setminus \{e\}, \exists V \in \mathcal{V}(x), \quad V \cap \phi_g(V) = \emptyset$$

Toujours pour le même $x \in E$ tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x$, posons V le voisinage de ce point (le même que celui de l'hypothèse) et posons finalement $W = p(V)$.

W est un voisinage ouvert de $p(x) = \mathcal{O}_x$. En effet, $p(x) \in W$ puisque $p(x) \in p(V)$ et que V est un voisinage de x .

De plus W est ouvert car on a montré précédemment que p est une application ouverte. Or on sait $W = p(V)$ et V ouvert, on a bien W voisinage ouvert de $p(x)$.

On a de plus, exactement comme dans la démonstration précédente :

$$p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{g \in G} \phi_g(V)$$

C'est-à-dire :

$$p^{-1}(W) = \bigcup_{g \in G} \phi_g(V)$$

Posons :

$$I = G$$

$$\forall i \in I, W_i = \phi_i(V)$$

On a finalement :

$$p^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} W_i$$

Il nous reste à montrer que cette union est disjointe, que les W_i sont ouverts et que p restreint à un W_i est un homéomorphisme. Commençons par le fait d'avoir la réunion

disjointe.

Soient donc $g_1, g_2 \in G$

Supposons qu'il existe $a \in W_{g_1} \cap W_{g_2}$. On a donc $a \in \phi_{g_1}(V) \cap \phi_{g_2}(V)$ puis :

$$a = \phi_{g_1}(v_1) = \phi_{g_2}(v_2)$$

où $v_1, v_2 \in V$

Rappelons aussi :

$$\forall g \in G, (\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$$

On aurait donc en combinant nos deux lignes précédentes :

$$v_1 = \phi_{g_1^{-1} \cdot g_2}(v_2)$$

Posons $g = g_1^{-1} \cdot g_2$. On aurait donc :

$$v_1 = \phi_g(v_2)$$

C'est-à-dire :

$$v_1 \in V \cap \phi_g(V)$$

Mais avec E connexe, on en déduit $g = e$. C'est-à-dire :

$$g_1^{-1} \cdot g_2 = e$$

Puis :

$$g_1 = g_2$$

Ainsi, on a $W_{g_1} = W_{g_2}$. On a donc montré :

$$\forall i_1, i_2 \in I, W_{i_1} \cap W_{i_2} \neq \emptyset \implies W_{i_1} = W_{i_2}$$

C'est-à-dire que la réunion est disjointe. On a finalement :

$$p^{-1}(W) = \bigsqcup_{i \in I} W_i$$

Poursuivons. Il nous faut montrer que les W_i sont tous ouverts.

En effet, soit $i \in I$

$$W_i = \phi_i(V)$$

Mais rappelons que les ϕ_i sont des applications continues (il s'agit d'une hypothèse sur l'action). On a donc les ϕ_i homéomorphismes de E dans E de réciproque $\phi_{i^{-1}}$ puis des applications ouvertes.

Puisque V est un voisinage ouvert, $\phi_i(V)$ est ouvert pour tout $i \in I$. Puis :

$$\forall i \in I, W_i \text{ est ouvert}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que p restreint chacun des W_i est un homéomorphisme.

Soit donc encore une fois $i \in I$.

Posons :

$$p_i : \begin{cases} W_i & \longrightarrow p(V) \\ x & \longmapsto \mathcal{O}_x \end{cases}$$

Montrons que cette application est un homéomorphisme.

★ *bijektivité*

★ *injectivité*

Soient $x, y \in W_i$. Supposons $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$. ($p_i(x) = p_i(y)$) x et y sont dans la même orbite.

On a donc pour un certain $g \in G$:

$$y = \phi_g(x)$$

Puis :

$$y \in W_i \cap \phi_g(W_i)$$

Car $x \in V$

Finalement, encore sous l'hypothèse E connexe, on peut écrire : $g = e$

Et puis $y = g \cdot x = e \cdot x = x$ et les antécédents sont donc les mêmes. L'application est donc injective.

★ *surjectivité*

Cette application est clairement surjective sur $p(W_i)$. Si $y \in p(W_i)$, alors il existe $x \in W_i$ tel que :

$$p(x) = y$$

Reste à constater que $p(V) = p(\phi_i(V))$

En effet ϕ_i , à i fixé, est une bijection de V dans V ($\phi_i \in \mathcal{S}_V$ car action de groupe)

On a ainsi :

$$p(V) = p(\phi_i(V)) = p(W_i)$$

Et puisque l'application est surjective sur $p(W_i)$, elle l'est aussi sur $p(V)$ puisqu'il s'agit du même ensemble.

Notre application $p|_{W_i}$ est donc une bijection. Elle est clairement continue car p l'est. Il reste à montrer que sa réciproque l'est elle aussi.

★ *bijektivité réciproque*

Cette partie est en fait déjà réglée. Remarquons que p est une application ouverte. On a donc $p|_{W_i}$ (ou bien p_i) application ouverte également par restriction. Posons :

$$p_i^{-1} : \begin{cases} p(V) & \longrightarrow W_i \\ \mathcal{O}_x & \longmapsto x \end{cases}$$

Il nous faut montrer cette application continue. Soit U un ouvert de W_i . Montrons que l'image réciproque de U par p_i^{-1} est ouvert c'est-à-dire de montrer :

$$(p_i^{-1})^{-1}(U) \text{ ouvert}$$

ou encore :

$$p_i(U) \text{ ouvert}$$

Ce qui est automatique avec p application ouverte.

On a donc p_i^{-1} continue et $p|_{W_i}$ un homéomorphisme. On a montré que p est donc un revêtement.

Cette longue preuve n'est pas encore finie. Il nous reste à prouver le résultat suivant :

$$Aut_p(E) \simeq G$$

Rappelons que deux groupes sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de groupe de l'un vers l'autre. Considérons l'application suivante :

$$\Phi : \begin{cases} G & \longrightarrow \mathcal{S}_E \\ g & \longmapsto \phi_g \end{cases}$$

Commençons par voir quelque chose, $\Phi(G) \subset Aut_p(E)$. En effet, si $g \in G$, on a ϕ_g un homéomorphisme (d'inverse $\phi_{g^{-1}}$) car l'action est supposée continue et de plus :

$$\forall x \in E, p(x) = \mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y = (p \circ \phi_g)(x)$$

On a posé $y = g \cdot x = \phi_g(x)$.

On a bien $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$ car x et y sont dans la même orbite. Cela vient du fait que $y = g \cdot x$.

On a donc :

$$\forall g \in G, p = p \circ \phi_g$$

Ainsi $\phi_g \in Aut_p(E)$ et on peut réécrire :

$$\Phi : \begin{cases} (G, *, e) & \longrightarrow & (Aut_p(E), \circ, I_d) \\ g & \longmapsto & \phi_g \end{cases}$$

A-t-on un morphisme de groupes ?

Pour le savoir, soient $g_1, g_2 \in G$. Soit aussi $x \in E$

On a :

$$\Phi(g_1 * g_2)(x) = \phi_{g_1 * g_2}(x) = (g_1 * g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$$

Puis :

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot (\phi_{g_2}(x)) = \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(x)) = (\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2})(x) = (\Phi(g_1) \circ \Phi(g_2))(x)$$

C'est-à-dire :

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad \Phi(g_1 * g_2) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)$$

Donc Φ est un morphisme de groupe. Il s'agissait en fait seulement des axiomes des actions. Montrons-le bijectif et on aura construit un isomorphisme de G dans $Aut_p(E)$.

★ *injectivité*

L'action Φ est supposée discrète ce qui implique qu'elle est libre. Mais souvenons-nous que toute action libre est fidèle. En particulier Φ est injective. (voir le chapitre 1).

★ *surjectivité*

Soit ψ un automorphisme du revêtement. ψ est un homéomorphisme de E dans E et on a :

$$p = p \circ \psi$$

Cette seconde égalité nous affirme que ψ conserve les orbites. C'est-à-dire :

$$y \in \mathcal{O}_x \implies \psi(y) \in \mathcal{O}_x$$

Ce qui signifie que pour tout $x, y \in E$:

$$\exists g \in G, y = g \cdot x \implies \exists g' \in G, \psi(y) = g' \cdot x$$

On a donc :

$$y = g \cdot x \implies \exists g'' \in G, \psi(y) = g'' \cdot y$$

Avec ici $g'' = g' * g^{-1}$. Pour un certain $y \in \mathcal{O}_x$, on a donc :

$$\psi(y) = \phi_{g''}(y)$$

Rappelons que E est connexe et donc que deux relèvements qui coïncident en un point sont les mêmes. On a finalement :

$$\psi = \phi_{g''}$$

On a montré ici : $Aut_p(E) \subset \Phi(G)$ mais l'on sait déjà que $\Phi(G) \subset Aut_p(E)$

On a donc :

$$\Phi(G) = Aut_p(E)$$

C'est-à-dire que Φ est surjective.

Ainsi, Φ est un morphisme de groupe bijectif. Donc un isomorphisme de groupe.

On peut donc assurer :

$$G \simeq Aut_p(E)$$

□

Résumé :

- On a montré que dans le cas où E l'espace total est un espace connexe et qu'il existe un revêtement p défini sur E , alors $Aut_p(E)$ agit discrètement sur E .
- On a exhibé une sorte de réciproque. Si G est un groupe qui agit discrètement et continûment sur E connexe, alors l'application $E \longrightarrow E/G$ qui à tout élément associe son orbite est un revêtement et :

$$G \simeq Aut_p(E)$$

Chapitre 4

Lien entre Revêtements et Groupe Fondamental

4.1 Relever les Chemins et les Homotopies

L'objectif de cette partie est de relever les chemins puis les homotopies d'un espace topologique. Pour cela, nous reprendrons nos notations du 2nd chapitre : **Groupe fondamental**. Nous ferons une première partie courte destinée à des rappels topologiques qui nous serviront par la suite.

4.1.1 Lemme de Lebesgue, topologie analytique

Définition (distance). Soit X un ensemble. $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sera appelée *distance* sur X si elle vérifie :

- $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Ces axiomes sont respectivement appelés *symétrie*, *séparation*, *inégalité triangulaire*

Définition (espace métrique). On appelle *espace métrique* tout ensemble X muni d'une distance d . On pourra noter un tel espace (X, d)

Définition (boule ouverte). Soit (X, d) un espace métrique. Soit $x \in X$. Soit $r > 0$. On appellera *boule ouverte en x de rayon r* que l'on notera $B(x, r)$ l'ensemble :

$$B(x, r) = \{z \in X, d(x, z) < r\}$$

Définition (point intérieur). Soit (X, d) un espace métrique. Soit $x \in X$. x sera dit *intérieur* à X s'il existe $r > 0$ tel que :

$$B(x, r) \subset X$$

Définition (ouvert métrique). Soit (X, d) un espace topologique. Soit $A \subset X$. A sera dit *ouvert métrique* de X si tout point de A est intérieur à A . C'est-à-dire, si :

$$\forall a \in A, \exists r > 0, B(a, r) \subset A$$

Proposition. *Tout espace métrique est un espace topologique*

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique. Posons \mathcal{T} l'ensemble des ouverts métriques de X . Il est simple de vérifier \mathcal{T} topologie sur X . Elle sera appelée *topologie métrique*. Cela signifie juste que tous nos travaux faits jusqu'ici s'appliquent aussi sur ces espaces munis d'une distance. \square

Remarque. Dans la pratique, la plupart de nos espaces sont métriques (tous nos exemples reposent sur ces ensembles munis d'une distance). Notre écrit se focalise sur les espaces topologiques simplement pour rester dans un contexte le plus général possible.

Ces brefs rappels étant faits, on peut énoncer un théorème important (dont on ne présentera pas la démonstration).

Lemme (lemme de Lebesgue). Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, \exists i \in I, B(x, \delta) \subset U_i$$

δ sera appelée la *constante de Lebesgue* ou bien le *nombre de Lebesgue*

4.1.2 Relèvement des chemins

Ce théorème - dont nous ne ferons pas la démonstration - ayant été vu, nous sommes désormais en disposition pour relever les chemins. Commençons sans plus tarder :

Proposition (relèvement des chemins). Soient E, X deux espaces topologiques. Soit $p \in \mathcal{C}(E, X)$ un revêtement. Soit $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], X)$ un chemin tracé dans X .

Alors il est possible de relever γ en $\bar{\gamma}$ un chemin de $[0, 1]$ dans E .

Ce relèvement est de plus unique à un "point de départ" près. Nous éclaircirons cette idée dans la preuve qui suit.

Démonstration. Le but est de relever γ . C'est-à-dire, rappelons-le :

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \bar{\gamma} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

On essaye de trouver $\bar{\gamma}$ une application continue telle que le diagramme ci-dessus commute. C'est-à-dire de construire un chemin qui arrive dans l'espace total à partir d'un chemin arrivant dans la base et d'un revêtement fixé.

Pour cela prenons quelques dispositions. Posons :

$$\gamma(0) = y_0$$

De plus, on a :

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

Mais l'on sait que chaque élément de X possède un voisinage bien revêtu par p . (qui vérifie la seconde propriété des revêtements). On peut donc poser :

$$\forall x \in X, \quad V_x \in \mathcal{V}(x) \quad \text{un voisinage de } x \text{ bien revêtu par } p$$

De telle manière à avoir :

$$X = \bigcup_{x \in X} V_x$$

On sait de plus que :

$$\gamma^{-1}(X) = [0, 1]$$

Car tous les points de γ sont à arrivée dans X . Avec notre recouvrement exhibé ci-dessus, on obtient :

$$\gamma^{-1} \left[\bigcup_{x \in X} V_x \right] = [0, 1]$$

C'est-à-dire exactement :

$$\bigcup_{x \in X} \gamma^{-1}(V_x) = [0, 1]$$

On a donc ici déterminé un recouvrement ouvert de l'ensemble $[0, 1]$ (ouvert car les V_x sont ouverts et γ est continue). Mais ce dernier ensemble est compact (fermé borné en dimension finie). On peut donc finalement extraire un sous recouvrement fini. Posons :

$$[0, 1] = \bigcup_{i \in I} \gamma^{-1}(V_{x_i})$$

Où $x_i \in X$ quel que soit $i \in I$ et I est de cardinal fini.

Remarquons que l'on sait de plus que $[0, 1]$ est un espace métrique. On peut par exemple le munir de la distance :

$$d : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto |x - y| \end{cases}$$

On a donc un espace métrique compact. On a de plus un recouvrement ouvert fini de $[0, 1]$. On peut appliquer le lemme de Lebesgue :

Il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0, 1], \exists i \in I, B(t, \delta) \cap [0, 1] \subset \gamma^{-1}(V_{x_i})$$

Posons alors la subdivision arbitraire :

$$[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [t_k, t_{k+1}]$$

Avec $(t_0, t_n) = (0, 1)$, de telle manière à avoir $|t_{k+1} - t_k| < 2\delta$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

Avec une telle subdivision, on a $[t_k, t_{k+1}]$ inclus dans une boule de rayon δ quel que soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On en déduit avec le lemme de Lebesgue que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe $i \in I$ tel qu'on ait $[t_k, t_{k+1}] \subset \gamma^{-1}(V_{x_i})$

En effet :

$$[t_k, t_{k+1}] \subset B((t_k + t_{k+1})/2, \delta) \subset \gamma^{-1}(V_{x_i})$$

La première inclusion se déduit de la manière dont on a subdivisé l'intervalle $[0, 1]$, la seconde par le lemme de Lebesgue.

Soit donc $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ fixé cette fois.

On a donc l'existence d'un certain $x_i \in X$ tel que :

$$[t_k, t_{k+1}] \subset \gamma^{-1}(V_{x_i})$$

Puis qu'on a :

$$\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset V_{x_i}$$

x_i étant un point dépendant de i à chaque fois, remplaçons V_{x_i} par V_i pour simplifier.

On peut ensuite identifier $I \subset \mathbb{N}$

C'est-à-dire qu'on pose la suite d'ouverts V_1, V_2, \dots

Résumons. On a donc :

$$[0, 1] = \bigcup_{i \in I} \gamma^{-1}(V_i)$$

$$[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [t_k, t_{k+1}]$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \exists i \in I, \gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset V_i$$

Cette dernière ligne s'énoncera ainsi avec l'identification $I \subset \mathbb{N}$:

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset V_k$$

Cela signifie qu'il existe un nombre *fini* de voisinages ouverts tels que le tracé du chemin soit dans la réunion de ces voisinages.

Illustrons cela :

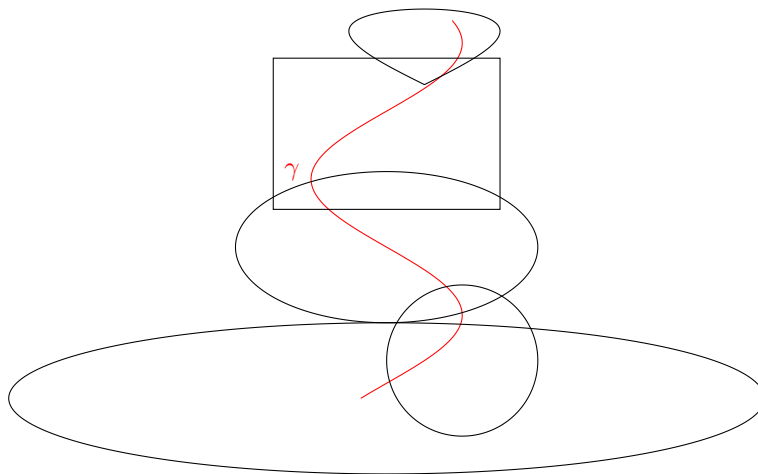


FIGURE 4.1 – Un chemin contenu dans des voisinages ouverts (ici, il y en a 5)

On remarque de plus que pour tout $k \in I$ différent de la borne supérieure de I , on a :

$$V_k \cap V_{k+1} \neq \emptyset$$

En effet, on a toujours :

$$\gamma(t_{k+1}) \in V_k \cap V_{k+1}$$

Commençons désormais la construction de notre relèvement $\bar{\gamma}$
Pour cela, nous opérerons par récurrence. Enonçons la propriété :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathcal{P}_k : \text{ "Il est possible de construire le chemin } \bar{\gamma} \text{ sur } [0, t_k] \text{ "}$$

Faisons un petit point sur les indices pour que les choses soient claires :

$$\text{On a : } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad \gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset V_{k+1}$$

Car nous avons identifiés les V_i à des V_k ce qui nous permet cette écriture. Rappelons aussi notre but étant de montrer P_n , on se propose de prouver P_{k+1} à partir de P_k pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ d'où le principe de récurrence.

Initialisation :

Montrons \mathcal{P}_1 . Est-il possible de construire $\bar{\gamma}$ jusqu'en t_1 ?

Commençons par fixer $x_0 \in p^{-1}(\{y_0\})$. (Rappelons : $y_0 = \gamma(0)$). On veut faire commencer $\bar{\gamma}$ par x_0

On sait que γ est à valeur dans V_1 sur $[0, t_1]$ mais p étant un revêtement et V_1 bien revêtu par construction, on a :

$$p^{-1}(V_1) = \bigsqcup_{j \in J} W_{1,j}$$

Posons j_0 l'unique indice tel que $x_0 \in W_{1,j_0}$
 p étant bijectif sur W_{1,j_0} . On peut alors poser :

$$\forall t \in [0, t_1], \quad \bar{\gamma}(t) = (p|_{W_{1,j_0}}^{-1} \circ \gamma)(t)$$

De telle sorte à avoir $\bar{\gamma}$ totalement inclus dans W_{1,j_0} sur $[0, t_1]$

On a réussi à construire la première partie du chemin mais celui-ci dépend de x_0 le point de base choisi. Gardons cela en tête et on peut désormais faire la seconde étape de toute récurrence : l'hérédité.

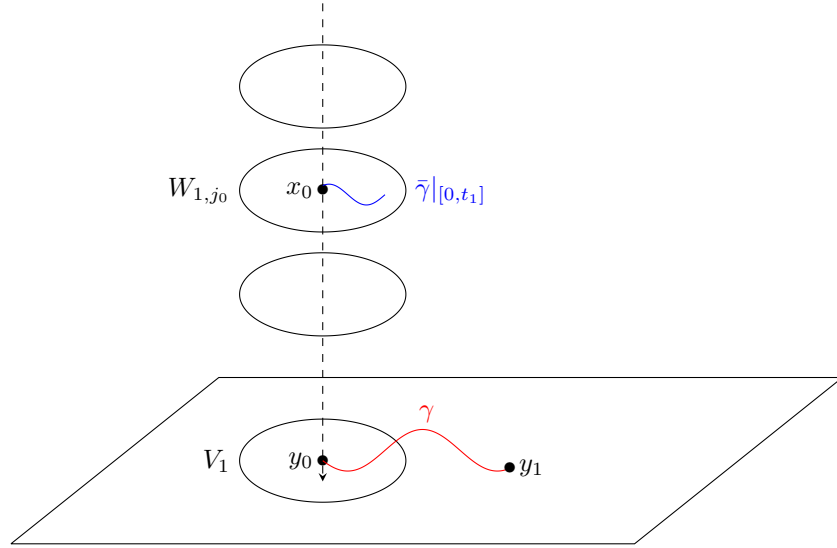


FIGURE 4.2 – Relèvement d'un chemin, première étape

Hérédité

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ Supposons \mathcal{P}_k . On a donc $\bar{\gamma}$ construit jusqu'en t_k
 Notre objectif est de prolonger $\bar{\gamma}$ jusqu'en t_{k+1}

On sait déjà une chose :

$$\gamma(t_k) \in V_k \cap V_{k+1}$$

Et on a également :

$$\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset V_{k+1}$$

Avec V_{k+1} bien revêtu par p .

On a alors :

$$p^{-1}(V_{k+1}) = \bigsqcup_{j \in J} W_{k+1,j}$$

Il nous suffit comme dans l'initialisation, de poser W_{j_0} l'unique $W_{k+1,j}$ tel que

$$\gamma(t_k) \in W_{k+1,j_0}$$

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \bar{\gamma}(t) = (p|_{W_{j_0}}^{-1} \circ \gamma)(t)$$

Ainsi, \mathcal{P}_{k+1} est vraie

En particulier, \mathcal{P}_n est vraie et donc il existe un relèvement de γ noté $\tilde{\gamma}$ un chemin de $[0, 1]$ dans l'espace total E .

The diagram shows a sequence of overlapping ellipses representing sets $W_{1,j_0}, W_{2,j_0}, \dots, W_{k,j_0}, W_{k+1,j_0}, \dots$. A blue wavy line represents a path γ starting at a black point x_0 in W_{1,j_0} and passing through a red point $\gamma(t_k)$ in W_{k,j_0} . Ellipses W_{1,j_0} and W_{2,j_0} overlap, as do W_{k,j_0} and W_{k+1,j_0} . Ellipses W_{2,j_0} and W_{k,j_0} are disjoint. Ellipses W_{1,j_0} and W_{k,j_0} are also disjoint.

Sur la figure ci-dessus, il faut imaginer que les indices j_0 des W_{k,j_0} ne sont pas tous les mêmes. Chacun d'entre eux est relatif à l'indice k associé.

A x_0 fixé, on a $[0, 1]$ un espace connexe. On a donc le relèvement de γ passant par x_0 unique (rappel : si l'espace de départ F - ici $[0, 1]$ - est connexe, deux relèvements égaux en un point sont les mêmes). Le relèvement d'un chemin est donc relatif uniquement à son origine x_0 que l'on choisit dans $p^{-1}(\{y_0\})$

On en déduit qu'il existe exactement autant de relèvements de γ que d'éléments dans $p^{-1}(\{y_0\})$. \square

Remarque. Puisque le relèvement d'un chemin dépend uniquement de son point d'origine, on notera - à un chemin γ et à un revêtement p fixé - l'unique relèvement de γ ayant pour origine x_0 ainsi :

$$\bar{\gamma}_{x_0} : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \bar{\gamma}_{x_0}(t) \end{cases}$$

Avec ainsi :

$$\bar{\gamma}_{x_0}(0) = x_0$$

4.1.3 Relèvement des homotopies

On s'attaque ici à un gros théorème. Le but est cette fois de relever les homotopies. Ennonçons sans plus tarder le théorème :

Proposition (relèvement des homotopies). *Soient E, X deux espaces topologiques. Soit $p \in \mathcal{C}(E, X)$ un revêtement. Soit $H \in \mathcal{C}([0, 1]^2, X)$. On suppose qu'il existe $y_0, y_1 \in X$ vérifiant :*

$$\forall s \in [0, 1], H(s, 0) = y_0 \quad \forall s \in [0, 1], H(s, 1) = y_1$$

Alors il est possible de relever H en \bar{H} une homotopie de $[0, 1]^2$ dans E .

Comme pour le cas des chemins, ce relèvement est unique à un "point de départ" près.

Démonstration. Le but est de relever H . C'est-à-dire de trouver une application \bar{H} telle que :

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \bar{H} & \downarrow p \\ [0, 1]^2 & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

le diagramme ci-dessus commute.

Le début de cette preuve est assez similaire à celle sur les chemins. On a :

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

Mais l'on sait que chaque $x \in X$ admet un voisinage V_x bien revêtu par p .

On a donc également :

$$X = \bigcup_{x \in X} V_x$$

On a de plus :

$$H^{-1}(X) = [0, 1]^2$$

D'où :

$$H^{-1} \left[\bigcup_{x \in X} V_x \right] = [0, 1]^2$$

Et finalement :

$$\bigcup_{x \in X} H^{-1}(V_x) = [0, 1]^2$$

Or on sait que H est continue, que les V_x sont ouverts. Ainsi, chaque $H^{-1}(V_x)$ est ouvert.

On a donc $\bigcup_{x \in X} H^{-1}(V_x)$ un recouvrement ouvert de $[0, 1]^2$

Or on sait que $[0, 1]^2$ est un espace métrique compact (fermé borné en dimension finie). On peut donc extraire du recouvrement ouvert déjà connu un sous recouvrement ouvert fini.

On peut alors poser :

$$[0, 1]^2 = \bigcup_{i \in I} H^{-1}(V_{x_i})$$

Où I est de cardinal fini.

On peut donc identifier d'ores et déjà $I \subset \mathbb{N}$ pour avoir :

$$[0, 1]^2 = \bigcup_{i=1}^m H^{-1}(V_i)$$

Où V_i est le voisinage d'un point $x \in X$ bien revêtu par p que que soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$

On a donc un recouvrement ouvert plus commode de $[0, 1]^2$

On sait déjà que $[0, 1]^2$ est un espace métrique compact. On peut donc y appliquer aussi le lemme de Lebesgue :

$$\exists \delta > 0, \forall (s, t) \in [0, 1]^2, \exists i \in \llbracket 1, m \rrbracket, B((s, t), \delta) \subset H^{-1}(V_i)$$

Il nous reste alors à subdiviser $[0, 1]^2$ en plusieurs morceaux.
Pour cela, il nous suffit de poser :

$$[0, 1]^2 = \bigcup_{k, l=0}^{n-1} P_{k, l}$$

C'est-à-dire exactement :

$$[0, 1]^2 = \bigcup_{l=0}^{n-1} \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} P_{k, l} \right)$$

Avec :

$$\forall k, l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_{k, l} = [t_k, t_{k+1}] \times [t_l, t_{l+1}]$$

Un pavé de $[0, 1]^2$ de telle sorte à avoir :

$$t_{k=0} = t_{l=0} = 0$$

$$t_{k=n} = t_{l=n} = 1$$

$$\forall k, l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_{k, l} \subset B\left(\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}, \frac{t_l + t_{l+1}}{2}\right), \delta\right)$$

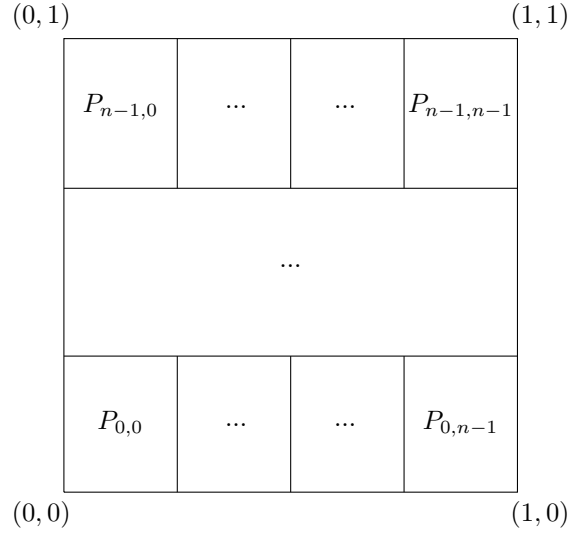


FIGURE 4.4 – Subdivision de $[0, 1]^2$

En posant arbitrairement un telle subdivision de $[0, 1]^2$, on a bien $P_{k,l}$ contenu dans une boule ouverte de rayon δ quels que soient $k, l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$
On peut alors appliquer le lemme de Lebesgue :

$$\forall k, l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \exists i \in \llbracket 1, m \rrbracket, P_{k,l} \subset H^{-1}(V_i)$$

Il nous est finalement possible de renommer chaque V_i qui convient pour $P_{k,l}$ par $V_{k,l}$ (quitte à prendre plusieurs fois le même ou bien à ne pas tous les prendre) et on a finalement :

$$\forall k, l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_{k,l} \subset H^{-1}(V_{k,l})$$

Finalement, on peut revoir notre numérotation de pavés comme une liste cette fois. Par exemple on peut prendre :

$$P_{0,0}, P_{0,1}, P_{0,2}, \dots, P_{0,n-1}, P_{1,0}, P_{1,1}, \dots, P_{n-1,n-1}$$

Puis chercher à identifier cette liste à celle-ci :

$$P_1, P_2, \dots, P_{n^2-1}, P_{n^2}$$

Et à affirmer (quitte à réindicer encore une fois) :

$$\forall k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket, P_k \subset H^{-1}(V_k)$$

On cherche simplement à rendre les choses plus claires et plus concises avec ces changements d'indices pour pouvoir démarrer la récurrence. Ce qu'on peut désormais faire. Voici notre propriété :

$$\forall k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket, \mathcal{P}_k : \text{ "Il est possible de relever } H \text{ sur } \bigcup_{j=1}^k P_j \text{ "}$$

On conclura de la même manière que pour le cas des chemins en affirmant que la propriété étant vraie pour tout $k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$, elle l'est particulièrement pour $k = n^2$ et le résultat sera montré.

Commençons donc :

Initialisation

Montrons \mathcal{P}_1 Il nous faut relever H sur P_1

Ainsi, soit $x_0 \in p^{-1}(\{y_0\})$

On sait déjà :

$$P_1 \subset H^{-1}(V_1)$$

D'où :

$$H(P_1) \subset V_1$$

Or on sait que V_1 est un voisinage ouvert dans X , bien revêtu par p

On a donc :

$$p^{-1}(V_1) = \bigsqcup_{i \in I} W_{1,i}$$

Puisque $x_0 \in p^{-1}(\{y_0\})$ on a $p(x_0) = y_0$

Puis :

$$p(x_0) \in H(P_1)$$

Ce qui nous donne :

$$p(x_0) \in V_1$$

Et finalement :

$$x_0 \in p^{-1}(V_1)$$

Puis, on peut noter $i_0 \in I$ l'unique indice tel que $x_0 \in W_{1,i_0}$ puisque l'on a une union disjointe.

Il nous suffit donc (comme pour les chemins) pour avoir $p \circ \bar{H} = H$ sur P_1 de poser :

$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2, \quad \bar{H}(s, t) = (p^{-1}|_{W_{1,i_0}} \circ H)(s, t)$$

Si l'initialisation de cette preuve ressemble beaucoup à celle sur les chemins, l'hérédité se corse.

Hérédité

Soit $k \in \llbracket 1, n^2 - 1 \rrbracket$

Supposons \mathcal{P}_k

Montrons \mathcal{P}_{k+1}

On suppose donc notre homotopie H relevée en \bar{H} sur $\bigcup_{j=1}^k P_j$

Pour la suite, on pose :

$$A = \bigcup_{j=1}^k (P_j \cap P_{k+1}) = \left(\bigcup_{j=1}^k P_j \right) \cap P_{k+1}$$

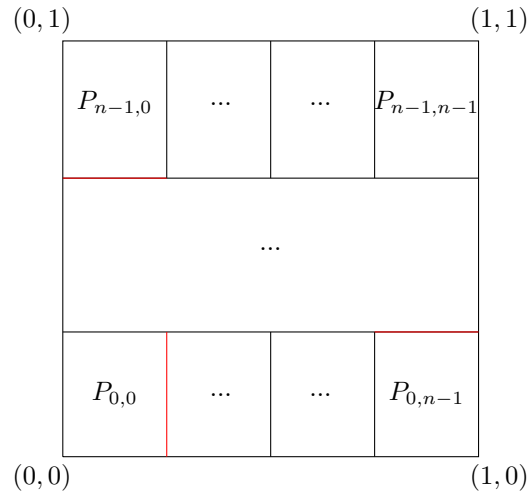


FIGURE 4.5 – Deux exemples d'où pourrait se trouver A (en rouge)

On a clairement $A \subset P_{k+1}$

On en déduit :

$$A \subset H^{-1}(V_{k+1})$$

Nous allons désormais raisonner par *Analyse-Synthèse* sur la construction de \bar{H} sur P_{k+1}

Analyse

Soit \bar{H} une application qui est relevée de H sur $\bigcup_{j=1}^{k+1} P_j$

On a déjà le résultat :

$$A \subset H^{-1}(V_{k+1})$$

D'où :

$$H(A) \subset V_{k+1}$$

Puis :

$$\bar{H}(A) \subset p^{-1}(H(A))$$

Ainsi :

$$\bar{H}(A) \subset p^{-1}(V_{k+1})$$

On a bien évidemment \bar{H} une application continue. De la manière dont on a construits les pavés, on a A connexe par arcs. (Il s'agit d'un segment). La propriété *connexe par arcs* étant un invariant topologique, on a :

$$\bar{H}(A) \text{ connexe par arcs}$$

De plus, on a V_{k+1} bien revêtu par p d'où :

$$p^{-1}(V_{k+1}) = \bigsqcup_{i \in I} W_{k+1,i}$$

Mais on a $\bar{H}(A)$ une partie connexe par arcs contenue dans une union disjointe. Elle est donc contenue dans l'une des composante de cette union. Autrement, elle ne serait pas connexe par arcs. (Impossible de relier deux points continûment dans des espaces disjoints).

On en déduit :

$$\exists i_0 \in I, \bar{H}(A) \subset W_{k+1,i_0}$$

Mais on sait que p restreint à W_{k+1,i_0} est un homéomorphisme. Si l'on doit avoir $p \circ \bar{H} = H$ sur A , il devient nécessaire de poser :

$$\forall (s, t) \in A, \bar{H}(s, t) = (p^{-1}|_{W_{k+1,i_0}} \circ H)(s, t)$$

On a donc, avec A non vide, l'existence d'un élément $(s_0, t_0) \in P_{k+1}$ tel que :

$$\bar{H}(s_0, t_0) = (p^{-1}|_{W_{k+1, i_0}} \circ H)(s_0, t_0)$$

Il nous reste à montrer que cette même propriété est vraie pour tout $(s, t) \in P_{k+1}$

On sait P_{k+1} connexe par arcs (pavé). Donc $\bar{H}(P_{k+1})$ connexe par arcs également.
Pour la même raison que pour A , et en sachant :

$$\bar{H}(P_{k+1}) \subset p^{-1}(V_{k+1})$$

Car :

$$p(\bar{H}(P_{k+1})) \subset H(P_{k+1}) \subset V_{k+1}$$

On obtient :

$$\bar{H}(P_{k+1}) \subset \bigsqcup_{i \in I} W_{k+1, i}$$

Et finalement, $\bar{H}(P_{k+1})$ est connexe par arcs et donc est contenu dans un et un seul $W_{k+1, i}$ et étant donné qu'on a montré $\bar{H}(P_{k+1}) \cap W_{k+1, i_0} \neq \emptyset$ on a le résultat :

$$\bar{H}(P_{k+1}) \subset W_{k+1, i_0}$$

Et on peut donc écrire :

$$\forall (s, t) \in P_{k+1}, \quad \bar{H}(s, t) = (p^{-1}|_{W_{k+1, i_0}} \circ H)(s, t)$$

Synthèse

Vérifions la réciproque.

On a bien \bar{H} continue comme composée d'applications continues par morceaux et continue aux éventuels points de discontinuité.

Il est trivial de vérifier :

$$p \circ \bar{H} = H$$

On a réussi à étendre un relèvement de H sur $\bigcup_{j=1}^{k+1} P_j$

On a donc montré \mathcal{P}_{k+1} vraie

Ainsi, \mathcal{P}_k est vraie pour tout $k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$ en particulier :

$$P_{n^2} \text{ est vraie}$$

C'est-à-dire qu'il est possible de relever H sur $\bigcup_{k,l=0}^{n-1} P_{k,l}$

Et finalement, il est possible de relever H sur $[0, 1]^2$

Le théorème est démontré. Chargeons-nous de la partie concernant l'unicité d'un tel relèvement.

Comme pour le cas des chemins, si l'on fixe $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ alors on a unicité du relèvement avec $[0, 1]^2$ connexe de \mathbb{R}^2

On en déduit comme pour les chemins qu'il existe autant de relèvements de H que d'éléments dans $p^{-1}(y_0)$ \square

Remarque. Exactement comme pour les chemins, on pourra donc préciser avec quel relèvement de H nous travaillons en spécifiant le point de départ :

$$\bar{H}_{x_0}$$

On a réussi à relever les chemins, relever les homotopies et ce, avec un point donné, de manière unique. Il nous reste nonobstant un résultat plus qu'intéressant à démontrer.

4.2 Théorèmes Importants

Théorème. Soient X, E deux espaces topologiques. Soit $p : E \longrightarrow X$ un revêtement. Soient γ_1, γ_2 deux lacets tracés dans X de base x_0 . Supposons les homotopes. Alors leurs relèvements par rapport à p sont deux chemins homotopes. (Notamment, $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ ont même origine et même extrémité)

Démonstration. Plaçons-nous dans le même cadre que celui de l'énoncé. On se donne donc γ_1 et γ_2 deux lacets de X de base x_0 et on peut noter $H : [0, 1]^2 \longrightarrow X$ l'homotopie de γ_1 à γ_2

Soit $z \in p^{-1}(\{x_0\})$

Considérons \bar{H}_z l'unique relèvement de H tel que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \bar{H}(0, t) = z$$

Nous allons désormais utiliser chemins pour nous aider à conclure :

$$\alpha_1 : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow E \\ s & \longmapsto \bar{H}_z(s, 0) \end{cases}$$

$$\alpha_2 : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow E \\ s & \longmapsto \bar{H}_z(s, 1) \end{cases}$$

$$\alpha_3 : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto \bar{H}_z(0, t) \end{cases}$$

$$\alpha_4 : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto \bar{H}_z(1, t) \end{cases}$$

Commençons :

On remarque tout d'abord :

$$\forall s \in [0, 1], (p \circ \alpha_1)(s) = H(s, 0) = x_0$$

$$\forall s \in [0, 1], (p \circ \alpha_2)(s) = H(s, 1) = x_0$$

Puis que l'on a par ailleurs :

$$\forall t \in [0, 1], (p \circ c_z)(t) = x_0$$

On a montré précédemment que le relèvement de chemins ayant pour origine un point donné (ici z) est unique.

On en déduit :

$$\alpha_1 = c_z$$

On pourrait être tenté d'affirmer :

$$\alpha_2 = c_z$$

Mais cela n'est pas nécessairement vrai. En effet, $\alpha_2(s)$ est égal à $\bar{H}_z(s, 1)$ mais ce dernier chemin n'est pas dans l'obligation de vérifier :

$$H(0, 1) = z$$

D'où on a pas le même point de départ et donc on ne peut pas appliquer le théorème d'unicité du relèvement pour α_2 tout du moins pas pour c_z mais on a en revanche :

$$\forall s \in [0, 1], (p \circ \alpha_2)(s) = H(s, 1) = x_0$$

Et d'autre part :

$$\forall s \in [0, 1], (p \circ c_{\bar{H}_z(1,1)})(s) = (p \circ c_{\bar{H}_z(0,1)}) = x_0$$

Et cette fois on a bien $s \mapsto \bar{H}_z(s, 1)$ ainsi que $s \mapsto \bar{H}_z(1, 1)$ et $s \mapsto \bar{H}_z(0, 1)$ trois relèvements de même origine. On peut donc appliquer le théorème d'unicité :

$$\forall s \in [0, 1], \alpha_2(s) = \bar{H}_z(1, 1) = \bar{H}_z(0, 1)$$

On retrouve encore une fois ici un lacet constant. On peut poser :

$$a = \bar{H}_z(1, 1) = \bar{H}_z(0, 1)$$

De manière à avoir :

$$\alpha_1 = c_z$$

$$\alpha_2 = c_a$$

Observons les deux autres chemins :

Pour α_3 , on sait :

$$\forall t \in [0, 1], \gamma_1(t) = H(0, t)$$

On en déduit que $\alpha_3 : t \mapsto \bar{H}_z(0, t)$ est l'unique relèvement de γ_1 ayant pour origine $\bar{H}_z(0, 0) = z$

C'est-à-dire :

$$\forall t \in [0, 1], \bar{H}_z(0, t) = \alpha_3(t) = \bar{\gamma}_{1z}(t)$$

On a notamment :

$$\bar{\gamma}_{1z}(1) = a$$

De la même manière, on a α_4 l'unique relèvement de γ_2 au point z . On a donc :

$$\forall t \in [0, 1], \bar{H}_z(1, t) = \alpha_4(t) = \bar{\gamma}_{2z}(t)$$

Et enfin :

$$\bar{\gamma}_{2z}(1) = \bar{H}_z(1, 1) = a = \bar{H}_z(0, 1) = \bar{\gamma}_{1z}(1)$$

On a donc $\bar{\gamma}_{1z}$ et $\bar{\gamma}_{2z}$ deux chemins ayant même origine (explicite : z) mais aussi même extrémité : a

Ces deux chemins ont donc une chance d'être homotopes et il suffit de constater que \bar{H}_z est une homotopie de $\bar{\gamma}_{1z}$ à $\bar{\gamma}_{2z}$

En effet, \bar{H}_z est construite continue et on a :

- $\forall t \in [0, 1], \bar{H}(0, t) = \bar{\gamma}_1(t)$
- $\forall t \in [0, 1], \bar{H}(1, t) = \bar{\gamma}_2(t)$
- $\forall s \in [0, 1], \bar{H}(s, 0) = z$
- $\forall s \in [0, 1], \bar{H}(s, 1) = a$

(On oublie ici les $|_z$ pour simplifier la lecture)

Ainsi, on a bien le relèvement de deux lacets homotopes dans X comme étant deux chemins homotopes dans E . Le résultat est montré. \square

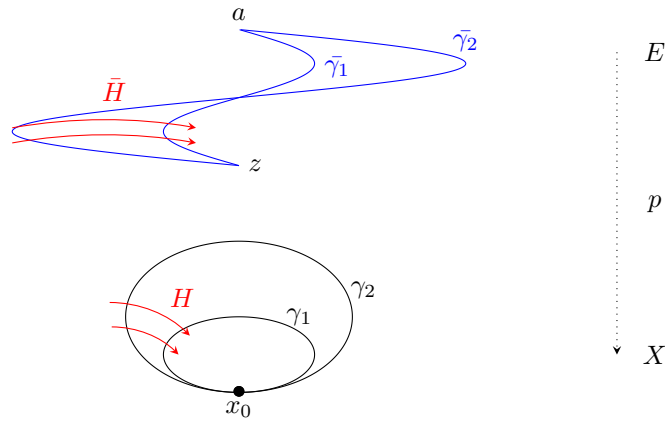


FIGURE 4.6 – Relèvement de deux lacets homotopes

Sur la figure ci-dessus il faut donc imaginer que les lacets noirs sont relevés en bleu et que deux lacets homotopes se relèvent non pas en deux lacets (pas nécessairement) mais en deux chemins. On a tout de même l'extrémité des deux chemins dans $p^{-1}(\{x_0\})$ tout comme leur origine z

Voyons désormais un théorème qui permettra d'établir un lien fort entre les notions de revêtement et celles du groupe fondamental

Définition (situation galoisienne). Soient E, X deux espaces topologiques. On suppose E connexe par arcs. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. On sera dit en situation galoisienne si $\text{Aut}_p(E)$ agit librement et transitivement sur les fibres. C'est-à-dire, si :

$$\forall x \in X, \forall a, b \in p^{-1}(\{x\}), \exists ! \psi \in \text{Aut}_p(E), \psi(a) = b$$

Dit autrement, pour tout élément de la base (ici x), quels que soient a, b dans l'image réciproque du revêtement p par $\{x\}$, il existe un unique élément du groupe d'automorphisme de p noté ψ vérifiant $\psi(a) = b$

Théorème. Soient E, X deux espaces topologiques et p un revêtement de E dans X avec E connexe par arcs. On se place en situation galoisienne.

Soit $z_0 \in E$

En notant p_* l'application associée à p (voir fin du chapitre 2) on a :

$$\pi_1(X)/p_*(\pi_1(E)) \simeq \text{Aut}_p(E)$$

Démonstration. Soient E, X deux espaces topologiques, soit p un revêtement de E dans X

On suppose E connexe par arcs et l'on se place en situation galoisienne.

Il peut être judicieux pour commencer cette preuve de rappeler un résultat déjà montré :

Soit $x \in X$ et soit γ un lacet de X en base x . Soit $z \in p^{-1}(\{x\})$. Il existe un unique relèvement de γ qui est un chemin dans E ayant pour origine z noté $\bar{\gamma}_z$

On sait de plus que : $\bar{\gamma}_z(1) \in p^{-1}(\{x\})$

On a donc deux éléments dans $p^{-1}(\{x\})$ qui sont :

- z
- $\bar{\gamma}_z(1)$

On peut donc utiliser ici le fait que nous soyons en situation galoisienne pour assurer l'existence d'un unique $\psi_\gamma \in \text{Aut}_p(E)$ élément du groupe d'automorphisme tel que :

$$\psi_\gamma(z) = \bar{\gamma}_z(1)$$

On peut désormais poser l'application :

$$\rho : \begin{cases} \pi_1(X, x) & \longrightarrow & \text{Aut}_p(E) \\ \gamma & \longmapsto & \psi_\gamma \end{cases}$$

★ ρ bien définie

Commençons comme toujours par prouver que l'application est bien définie. Il nous faut montrer que les images par ρ de deux lacets homotopes sont les mêmes.

Soient donc γ_1 et γ_2 deux lacets dans X de base x et qui soient homotopes. On pose H l'homotopie de γ_1 à γ_2 .

On sait qu'on peut relever ces trois applications, quitte à transformer les lacets en chemins d'origine $z \in E$ pour obtenir :

$$\bar{H} \text{ une homotopie de } \bar{\gamma}_1 \text{ à } \bar{\gamma}_2$$

$$\text{Avec } \bar{\gamma}_1(0) = \bar{\gamma}_2(0) = z$$

$$\text{Avec } \bar{\gamma}_1(1) = \bar{\gamma}_2(1) = a$$

Etant en situation galoisienne, il existe donc un unique homéomorphisme $\psi_{\gamma_1} \in \text{Aut}_p(E)$ vérifiant :

$$\psi_{\gamma_1}(z) = a$$

Mais on remarque alors que :

$$\psi_{\gamma_1}(z) = \bar{\gamma}_2(1)$$

Autrement dit, l'unique morphisme ψ_{γ_2} vérifie la même condition que ψ_{γ_1}

Par unicité, on a :

$$\psi_{\gamma_1} = \psi_{\gamma_2}$$

Puis :

$$\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_2)$$

On a ainsi montré l'application ρ bien définie. Poursuivons. Notre but est de montrer que ρ est un morphisme de groupe surjectif.

Commençons :

★ ρ morphisme

Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X, x)$.

Posons :

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

La concaténation dans X des deux chemins

Soit $z \in E$

On sait qu'on peut relever γ en $\bar{\gamma}$ un chemin dans E d'origine z
Il nous suffit ensuite de poser ceci :

$$\alpha : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow X \\ t & \longmapsto \begin{cases} \bar{\gamma}_{1z}(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \bar{\gamma}_{2\bar{\gamma}_{1z}(1)}(2t-1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On remarque que α est continue. Elle est continue par morceaux et l'est aussi en $1/2$ car :

$$\lim_{t \rightarrow 1/2^+} \alpha(t) = \bar{\gamma}_{2\bar{\gamma}_{1z}(1)}(0) = \bar{\gamma}_{1z}(1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1/2^-} \alpha(t) = \bar{\gamma}_{1z}(1)$$

D'où continuité. On a donc un chemin dans E d'origine z
On remarque de plus que :

$$\forall t \in [0, 1/2], (p \circ \alpha)(t) = p(\bar{\gamma}_{1z}(2t)) = \gamma_1(2t)$$

$$\forall t \in [1/2, 1], (p \circ \alpha)(t) = p(\bar{\gamma}_{2\bar{\gamma}_{1z}(1)}(2t-1)) = \gamma_2(2t-1)$$

Ce qui nous assure :

$$p \circ \alpha = \gamma$$

Par unicité du relèvement pour l'origine $z \in E$, on a :

$$\alpha = \bar{\gamma}_z$$

On a donc trouvé le relèvement de γ notre concaténation de γ_1 et γ_2

On peut également montrer :

$$\bar{\gamma}_{2\bar{\gamma}_{1z}(1)} = \psi_{\gamma_1} \circ \bar{\gamma}_{2z}$$

Effectivement, on a :

$$\bar{\gamma}_{2\bar{\gamma}_{1z}(1)}(0) = \bar{\gamma}_{1z}(1) = \psi_{\gamma_1}(z)$$

$$(\psi_{\gamma_1} \circ \bar{\gamma}_{2z})(0) = \psi_{\gamma_1}(\bar{\gamma}_{2z}(0)) = \psi_{\gamma_1}(z)$$

Ces deux chemins ont donc même origine.

On a de plus :

$$p \circ \bar{\gamma}_{2\bar{\gamma}_{1z}(1)} = \gamma_2$$

Et :

$$p \circ (\psi_{\gamma_1} \circ \bar{\gamma}_{2z}) = (p \circ \psi_{\gamma_1}) \circ \bar{\gamma}_{2z}$$

Mais ψ_{γ_1} étant dans $Aut_p(E)$, on a :

$$(p \circ \psi_{\gamma_1}) \circ \bar{\gamma}_{2z} = p \circ \bar{\gamma}_{2z}$$

Puis :

$$p \circ (\psi_{\gamma_1} \circ \bar{\gamma}_{2z}) = p \circ \bar{\gamma}_{2z} = \gamma_2$$

On a donc deux relèvements d'un même lacet égaux en leurs origines. On en conclut qu'ils sont égaux.

D'où :

$$\bar{\gamma}_{2\bar{\gamma}_{1z}(1)} = \psi_{\gamma_1} \circ \bar{\gamma}_{2z}$$

On conclut sur la nature de ρ à l'aide de cette affirmation. En effet, $\rho(\gamma_1 * \gamma_2)$ qui n'est rien d'autre que ψ_γ , est par définition l'unique automorphisme de $Aut_p(E)$ tel que :

$$\psi_\gamma(z) = \bar{\gamma}_z(1)$$

On a donc :

$$\psi_\gamma(z) = \bar{\gamma}_z(1) = \alpha(1) = \bar{\gamma}_{2\bar{\gamma}_{1z}(1)}(1)$$

Or :

$$\bar{\gamma}_{2\bar{\gamma}_{1z}(1)}(1) = (\psi_{\gamma_1} \circ \bar{\gamma}_{2z})(1)$$

Par ce qu'on a prouvé précédemment

Ce qui nous donne :

$$\forall z \in p^{-1}(\{x\}), \quad \psi_\gamma(z) = \psi_{\gamma_1}(\bar{\gamma}_{2z}(1)) = \psi_{\gamma_1}(\psi_{\gamma_2}(z)) = (\psi_{\gamma_1} \circ \psi_{\gamma_2})(z)$$

C'est-à-dire :

$$\rho(\gamma_1 * \gamma_2) = \rho(\gamma_1) \circ \rho(\gamma_2)$$

Ce qui nous prouve que ρ est un morphisme de groupes.

★ *Image de ρ*

On montre ici que ρ est surjectif.

En effet si $\psi \in \text{Aut}_p(E)$ on peut considérer $z \in p^{-1}(\{x\})$ et remarquer :

$$(z, \psi(z)) \in E^2$$

Or on a supposé E connexe par arcs.

Il existe donc un chemin α tracé dans E tel que :

$$(\alpha(0), \alpha(1)) = (z, \psi(z))$$

Puisque α est continue, que p l'est aussi, on peut poser γ le chemin tracé dans X tel que :

$$\gamma = p \circ \alpha$$

On observe que $\gamma(0) = p(z) = x$ et $\gamma(1) = (p \circ \psi)(z) = p(z) = x$

Voyons ce lacet γ comme élément de $\pi_1(X, x)$

On constate aisément que $\rho(\gamma) = \psi_\gamma$ vérifie :

$$\psi_\gamma(z) = \bar{\gamma}_z(1)$$

Or on remarque que $\bar{\gamma}_z$ est l'unique relèvement de γ ayant pour origine z

On a donc par unicité :

$$\bar{\gamma}_z = \alpha$$

Et de cette manière :

$$\psi_\gamma(z) = \alpha(1) = \psi(z)$$

Autrement dit, on a par unicité :

$$\psi_\gamma = \psi$$

Et de cette manière on a bien exhibé un antécédent $\gamma \in \pi_1(X, x)$ à ψ pour l'application ρ . Autrement dit, le morphisme est surjectif.

★ *Noyau de ρ*

On s'intéresse cette fois au noyau du morphisme de groupe ρ

Soit donc $\gamma \in \pi_1(X, x)$

On suppose :

$$\rho(\gamma) = I_d$$

Ce qui est vrai si et seulement si :

$$\bar{\gamma}_z(1) = I_d(z)$$

Ce qui équivaut exactement à :

$$\bar{\gamma}_z(1) = z$$

Autrement dit, γ fait partie du noyau de ρ si et seulement si son chemin relevé dans E est un lacet.

C'est-à-dire :

$$\gamma \in \text{Ker}(\rho) \iff \bar{\gamma}_z \in \pi_1(E, z)$$

Mais rappelons que l'on a :

$$\gamma = p \circ \bar{\gamma}_z$$

D'où, si $\gamma \in \text{Ker}(\rho)$ alors on a $\gamma \in p_*(\pi_1(E, z))$ car en effet, $\gamma = p \circ \bar{\gamma}_z$ et on a vu que $\bar{\gamma}_z$ est un lacet en z

Ici, p_* est l'application associée à p (voir chapitre 2)

On a ainsi montré :

$$\text{Ker}(\rho) \subset p_*(\pi_1(E, z))$$

La réciproque est simple. Supposons que $\gamma \in p_*(\pi_1(E, z))$

On a :

$$\gamma = p \circ \alpha$$

Où $\alpha \in \pi_1(E, z)$

On a par la suite :

$$\psi_\gamma(z) = \bar{\gamma}_z(1)$$

Mais par unicité du relèvement en origine z , on a $\bar{\gamma}_z = \alpha$

Ainsi :

$$\psi_\gamma(z) = \alpha(1) = z$$

D'où ψ_γ est l'unique morphisme de $\text{Aut}_p(E)$ tel que :

ψ_γ possède un point fixe : z

On en déduit que ψ_γ est l'identité puis que :

$$p_*(\pi_1(E, z)) \subset Ker(\rho)$$

Autrement dit, on a montré :

$$Ker(\rho) = p_*(\pi_1(E, z))$$

Il nous reste à utiliser le premier théorème d'isomorphisme

On a :

$$\pi_1(X, x)/Ker(\rho) \simeq \rho(\pi_1(X, x))$$

Ce qui se traduit ainsi avec nos résultats précédents :

$$\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(E, z)) \simeq Aut_p(E)$$

On remplace l'expression du noyau (qu'on a déterminé) et celle de l'espace d'arrivée car l'application est surjective (elle atteint chaque élément de $Aut_p(E)$)

Finalement, on sait que p est surjective (les revêtements sont par définitions surjectifs) donc on a $p(E) = X$ et on sait également que cette application est continue. Rappelons que E est supposé connexe par arcs. La propriété de connexité par arcs étant un invariant topologique, et ayant :

$$X = p(E)$$

On en déduit X connexe par arcs. (voir la sous partie sur la *connexité* à la page 6)

On a donc E et X deux espaces connexes par arcs.

Il devient donc inutile de spécifier leur point de base concernant leurs groupes fondamentaux

On obtient enfin le résultat souhaité :

$$\pi_1(X)/p_*(\pi_1(E)) \simeq Aut_p(E)$$

□

Corollaire. *On se place sous les mêmes hypothèses que dans le théorème qui précède. Si l'on suppose de plus que E est simplement connexe, alors :*

$$\pi_1(X) \simeq Aut_p(E)$$

Démonstration. La preuve de ce petit résultat n'est pas trop compliquée. Supposons E simplement connexe. On a $\pi_1(E) = \{0\}$

On sait de plus que p_* est un morphisme de groupes car c'est une application associée.

On a alors

$$p_*(\pi_1(E)) = p_*(\{0\}) = \{p_*(0)\} = \{0\}$$

Dans le sens où on trouve l'élément neutre de $\pi_1(X)$. La dernière égalité ici se justifie avec le fait d'avoir p_* morphisme.

Ainsi :

$$\pi_1(X)/p_*(\pi_1(E)) \simeq \text{Aut}_p(E)$$

Se transforme en :

$$\pi_1(X)/\{0\} \simeq \text{Aut}_p(E)$$

Puis, quotienter par le sous-groupe trivial laissant identique, on arrive finalement à :

$$\pi_1(X) \simeq \text{Aut}_p(E)$$

D'où le résultat. □

Résumé :

On a donc découvert dans cette partie qu'il était possible de relever les lacets d'un espace en chemins d'un autre tout en gardant le lien fort d'homotopie.

On a finalement réussi à - en situation galoisienne et avec E simplement connexe (ce qui entraîne la connexité par arcs) - établir un lien entre l'espace total et la base X :

Le groupe fondamental de tout espace de base d'un revêtement dont l'espace total est simplement connexe est isomorphe au groupe d'automorphisme de ce même revêtement.

Chapitre 5

Classification d'Espaces

On s'intéresse dans ce chapitre à d'autre méthode de calcul du groupe fondamental. Autre que par les revêtements, on peut déterminer un groupe fondamental d'un espace à partir d'un autre. Nous formaliserons tout cela.

5.1 Type d'Homotopie

Le but de cette partie est de regrouper les espaces ayant un point commun : le type d'homotopie. Pour cela nous devons d'abord étendre notre définition des homotopies sur les chemins, aux homotopies sur les applications continues.

5.1.1 Applications homotopes

Définition (applications homotopes). Soient X, Y deux espaces topologiques. Soient $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$. f et g seront dites *homotopes* s'il existe $H : [0, 1] \times X \longrightarrow Y$ une application continue telle que :

- $\forall x \in X, H(0, x) = f(x)$
- $\forall x \in X, H(1, x) = g(x)$

En pratique, on utilisera surtout la définition suivante (plus restreinte mais plus utile) :

Définition (applications homotopes relativement à une partie). Soient X, Y deux espaces topologiques. Soit $A \subset X$. Soient $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$. f et g seront dites *homotopes relativement à A* s'il existe $H : [0, 1] \times X \longrightarrow Y$ une application continue qui vérifie :

- $\forall x \in X, H(0, x) = f(x)$
- $\forall x \in X, H(1, x) = g(x)$
- $\forall x \in A, \forall s \in [0, 1], g(x) = f(x) = H(s, x)$

Exemple. $X = Y = \mathbb{R}$

Si l'on considère les deux applications :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (e - 1)x + 1 \end{cases}$$

Alors on a f et g homotopes, on peut transformer une application linéaire en la fonction \exp et elles le sont de plus relativement en deux points de \mathbb{R} . Une figure (non à l'échelle) illustrera cette idée :

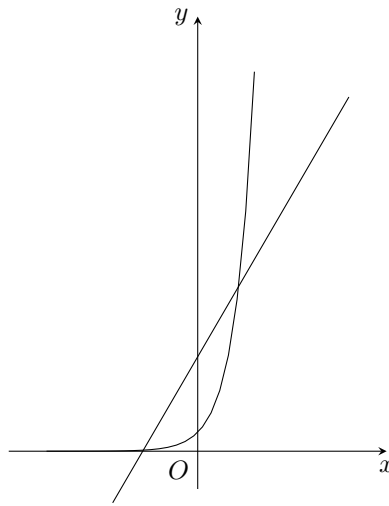


FIGURE 5.1 – deux applications homotopes

Mais l'on peut construire d'autres exemples :

Exemple. Dans le même cadre (sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), la figure représente encore une fois deux applications homotopes :

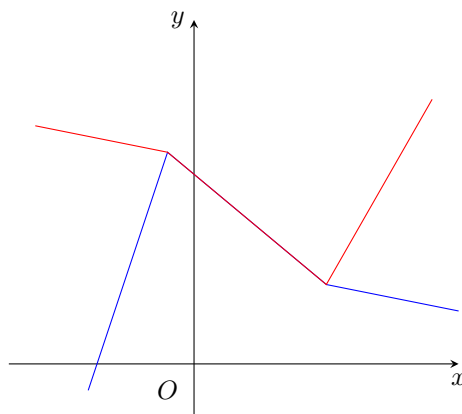


FIGURE 5.2 – Encore deux applications homotopes

Remarquons que cette fois, les deux applications sont homotopes relativement à tout un intervalle.

Remarque. Montrer que deux fonctions sont homotopes est bien plus fastidieux que dans le cas des chemins (qui l'est déjà parfois !). Nous ne nous attarderons donc pas là dessus et utiliserons surtout cette définition pour la théorie.

Notons d'ailleurs que l'on peut désormais assurer :

Deux chemins homotopes le sont relativement à $\{0, 1\}$

5.1.2 Type d'homotopie d'espaces topologiques

Définition (type d'homotopie). Soient X, Y deux espaces topologiques. On dit que X et Y ont même *type d'homotopie* s'il existe $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ et $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ telles que :

$f \circ g$ est homotope à I_{d_Y}

$g \circ f$ est homotope à I_{d_X}

Proposition. $X \approx Y \iff X$ et Y ont même *type d'homotopie* est une relation d'équivalence.

Démonstration. On connaît désormais les relations d'équivalence. Alors commençons :

★ *réflexivité*

Soit X un espace topologique. Posons $f = g = I_{d_X}$. On a bien les deux conditions :

$f \circ g$ est homotope à I_{d_X}

$g \circ f$ est homotope à I_{d_X}

vérifiées. Ainsi \approx est réflexive

★ *symétrie*

Soient X, Y deux espaces topologiques. Supposons $X \approx Y$. X et Y ont donc même type d'homotopie. Donc Y et X ont même type d'homotopie. Donc $Y \approx X$. Donc \approx est symétrique (trivial)

★ *transitivité*

Soient X, Y, Z trois espaces topologiques. Supposons $X \approx Y$ et $Y \approx Z$. On a l'existence de :

$f : X \longrightarrow Y$

$g : Y \longrightarrow X$

$h : Y \longrightarrow Z$

$i : Z \longrightarrow Y$

continues qui vérifient :

$f \circ g$ est homotope à I_{d_Y}

$g \circ f$ est homotope à I_{d_X}

$h \circ i$ est homotope à I_{d_Z}

$i \circ h$ est homotope à I_{d_Y}

Posons :

$$a : \begin{cases} X & \longrightarrow & Z \\ x & \longmapsto & (h \circ f)(x) \end{cases}$$

$$b : \begin{cases} Z & \longrightarrow & X \\ z & \longmapsto & (g \circ i)(z) \end{cases}$$

On a :

$$a \circ b = h \circ f \circ g \circ i \text{ qui est homotope à } h \circ i \text{ qui est homotope à } I_{d_X}$$

De même :

$$b \circ a = g \circ i \circ h \circ f \text{ homotope à } g \circ f \text{ homotope à } I_{d_Z}$$

De plus, a et b sont continues comme composées.

La relation \approx est donc transitive.

C'est finalement une relation d'équivalence. □

On en déduit ce corollaire intéressant :

Corollaire. *Si X et Y sont deux espaces topologiques homéomorphes (il existe f de X dans Y continue bijective à réciproque continue) alors, X et Y ont même type d'homotopie.*

Démonstration. Il suffit de considérer f^{-1} (qui est ainsi continue) à la place de g dans la définition du type d'homotopie (trivial). □

Théorème. *Soient X, Y deux espaces topologiques connexes par arcs et qui ont même type d'homotopie. On a :*

$$\pi_1(X) \text{ et } \pi_1(Y) \text{ isomorphes}$$

Démonstration. Soient donc X, Y deux espaces topologiques connexes par arcs, ayant même type d'homotopie.

Il existe $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ continues telles que :

$$f \circ g \text{ est homotope à } I_{d_Y}$$

$$g \circ f \text{ est homotope à } I_{d_X}$$

Fixons $x \in X$.

Nous allons utiliser dans cette preuve les fonctions associées à f et g :

$$f_{\star} : \begin{cases} \pi_1(X, x) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x)) \\ \gamma & \longmapsto & f \circ \gamma \end{cases}$$

$$g_{\star} : \begin{cases} \pi_1(Y, f(x)) & \longrightarrow & \pi_1(X, (g \circ f)(x)) \\ \gamma & \longmapsto & f \circ \gamma \end{cases}$$

Rappelons que l'on a :

$$(f \circ g)_{\star} = f_{\star} \circ g_{\star}$$

Notons H l'homotopie de l'identité à $f \circ g$, et notons que l'on a le résultat suivant :

$$(f \circ g)_{\star} = \varphi_c$$

où :

c est un chemin qui lie $(f \circ g)(x)$ à x

φ_c est :

$$\varphi_c : \begin{cases} \pi_1(X, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, (f \circ g)(x)) \\ \gamma & \longmapsto & c * \gamma * c^{-1} \end{cases}$$

Montrons-le :

Soit $\gamma \in \pi_1(X, x)$. On a :

$(f \circ g)(\gamma)$ un lacet de base $(f \circ g)(x)$. Donc un élément de $\pi_1(X, (f \circ g)(x))$. Il faut montrer que ce lacet est le même que $\varphi_c(\gamma)$. C'est-à-dire, puisque nous sommes dans $\pi_1(X, (f \circ g)(x))$, qu'il nous faut montrer que ces deux lacets sont homotopes.

Pour cela exhibons l'homotopie (de lacets donc) en question :

$$L : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow & X \\ (s, t) & \longmapsto & \begin{cases} c(2t) & \text{si } t \in [0, (1-s)/2] \\ H(\gamma((4t+2s-2)/3s+1), s) & \text{si } t \in [(1-s)/2, (s+3)/4] \\ c^{-1}(4t-3) & \text{si } t \in [(s+3)/4, 1] \end{cases} \end{cases}$$

On a donc montré que pour tout γ dans $\pi_1(X, x)$, $(f \circ g)_{\star}(\gamma) = \varphi_c(\gamma)$. On a donc :

$$(f \circ g)_{\star} = \varphi_c$$

On en déduit que $(f \circ g)_*$ c'est-à-dire $f_* \circ g_*$ est un isomorphisme (car égal à φ_c lui-même isomorphisme). Puis que f_* surjective.

Par exactement la même preuve en considérant $g \circ f$ au lieu de $f \circ g$, on a $g_* \circ f_*$ isomorphisme, d'où f_* est injective.

On sait déjà que f_* est un morphisme de groupe, et on a donc montré de plus qu'il était bijectif.

Finalement, f_* est un isomorphisme de groupes de $\pi_1(X)$ dans $\pi_1(Y)$. Les deux groupes fondamentaux sont donc isomorphes. \square

Proposons un résumé des dernières preuves qui ne sont pas toutes simples :

Résumé :

On a montré que deux espaces homéomorphes ont même groupe fondamental.

Par la suite, on a vu que deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie, puis que deux espaces ayant même type d'homotopie (et connexes par arcs) ont même groupe fondamental.

Traduit mathématiquement, on a :

X homéomorphe à $Y \implies X, Y$ ont même type d'homotopie $\implies \pi_1(X)$ isomorphe à $\pi_1(Y)$

On a donc trouvé de réelles conditions pour que deux espaces aient le même groupe fondamental.

5.2 Espaces Contractiles et Rétractes

5.2.1 Contractions

Définition (espace contractile). Soit X un espace topologique connexe. X sera dit *contractile* s'il a le même type d'homotopie qu'un point $\{y\}$. ($Y = \{y\}$ dans les notations prises jusqu'ici.)

Remarque. Deux espaces contractiles ont donc le même type d'homotopie.

Corollaire. Si X est un espace contractile, alors il est simplement connexe.

Démonstration. La preuve de ce corollaire est rendue simple grâce à tous nos théorèmes établis précédemment :

Si X est contractile, il a le même type d'homotopie que $\{x\}$ un point. Mais l'espace $\{x\}$ est clairement simplement connexe. Son groupe fondamental contient seulement le chemin constant c_x puisqu'il n'y a rien d'autre dans $\{x\}$. Mais rappelons-nous que :

$$X, Y \text{ même type d'homotopie} \implies \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$$

Où pour être plus exact, les groupes fondamentaux sont isomorphes. De plus, X étant ouvert, on a X connexe par arcs (car X est connexe) et ainsi on a bien :

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(\{0\}) = \{0\}$$

D'où X est simplement connexe. □

Proposition (exemple d'application). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a \mathbb{R}^n contractile.*

Démonstration. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$. On a \mathbb{R}^n un espace topologique. Il nous suffit ensuite de montrer que \mathbb{R}^n a le même type d'homotopie que $\{0\}$.

Pour cela considérons f, g nos deux applications :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \{0\} \\ x & \longmapsto & 0 \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \{0\} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^n \\ 0 & \longmapsto & 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

On a :

$$f \circ g : \begin{cases} \{0\} & \longrightarrow & \{0\} \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{cases}$$

On a donc ici déjà l'identité, même pas besoin de l'homotoper. Puis :

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

Ici il faut opérer un peu plus. Il suffit de considérer l'homotopie suivante :

$$H : \begin{cases} [0, 1] \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) & \longmapsto tx \end{cases}$$

On a bien un homotopie puisque lorsque $s = 0$, $H(s, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et lorsque $s = 1$, $H(s, x) = x$ quel que soit le vecteur x . \square

Corollaire.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}^n \text{ est simplement connexe}$$

Remarque. Voici donc ce à quoi sert le type d'homotopie. On a montré que certains espaces étaient simplement connexes sans jamais parler de chemins. Juste en remarquant qu'ils étaient contractiles. Les chemins sont donc bien cachés sous cette notion : le type d'homotopie.

Remarque. La notion d'espaces contractiles est en fait elle aussi imagée. Un espace est contractile s'il se déforme continûment en un point. On peut par exemple le comprendre pour \mathbb{R} ou encore \mathbb{R}^2 :

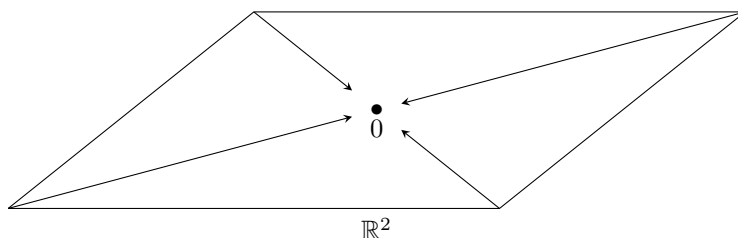


FIGURE 5.3 – \mathbb{R}^2 contractile

5.2.2 Rétractions

Définition (espace rétract). Soit X un espace topologique. Soit $A \subset X$. On dit que A est *rétract* s'il existe une application continue :

$$r : \begin{cases} X & \longrightarrow A \\ x & \longmapsto r(x) \end{cases}$$

Telle que r restreinte à A soit l'identité.

Définition (espace rétract par déformation). Soit X un espace topologique. Soit $A \subset X$. On dit que A est *rétract par déformation de X* s'il existe une application continue :

$$r : \begin{cases} X & \longrightarrow A \\ x & \longmapsto r(x) \end{cases}$$

telle que r soit homotope à I_{d_X} relativement à A .

Remarque. Concrètement, rajouter "par déformation" signifie supposer en plus, que r peut-être ramenée à l'identité continûment sur tout l'espace de départ.

Proposition. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Soit A rétract par déformation de X et connexe par arcs. On a :

$$\pi_1(A) \simeq \pi_1(X)$$

Dans le sens où ces deux groupes sont isomorphes.

Démonstration. Nous utiliserons pour cela - encore une fois - les applications associées. Pour cela on considère la surjection canonique :

$$i : \begin{cases} A & \longrightarrow X \\ a & \longmapsto a \end{cases}$$

et bien sûr son application associée (avec $a_0 \in A$ fixé) :

$$i_* : \begin{cases} \pi_1(A, a_0) & \longrightarrow \pi_1(X, a_0) \\ a & \longmapsto a \end{cases}$$

On remarque dans un premier temps que :

$$r \circ i : \begin{cases} A & \longrightarrow A \\ a & \longmapsto a \end{cases}$$

Cette application est donc l'identité. Dans un second temps, on a :

$$i \circ r : \begin{cases} X & \longrightarrow X \\ x & \longmapsto (i \circ r)(x) \end{cases}$$

On sait r homotope à l'identité. De plus, i restreinte à A (l'espace d'arrivée de r) est égale à l'identité.

On a donc $i \circ r$ homotope à I_d . On a donc exhibé f et g les fonctions qui permettent de définir le type d'homotopie et qui permettent également d'affirmer ici que A et X ont même type d'homotopie.

On en déduit finalement que $\pi_1(A) \simeq \pi_1(X)$ puisque X et A sont connexes par arcs. \square

Exemple. Voyons ensemble pour bien comprendre cette définition et cette proposition un exemple simple de rétract par déformation

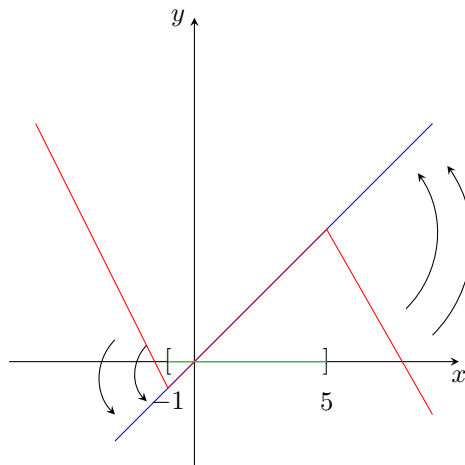


FIGURE 5.4 – Exemple simple de rétract par déformation

On a ici $X = \mathbb{R}$ et $A = [-1, 5]$. A est bien rétract par déformation de X puisque sa rétraction (tracée en rouge) est bien identique sur A et est homotope à l'identité sur X (flèches noires). On en conclut avec notre dernière démonstration et nos connaissances sur le groupe fondamental de \mathbb{R} que $\pi_1([-1, 5]) = \pi_1(\mathbb{R}) = 0$.

5.3 Espaces Produits

Dans cette courte section, nous nous intéressons au groupe fondamental de quelconque espace produit. Nous avons pour cela une proposition intéressante.

Proposition. Soient (X, x_0) , (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés. On a :

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

C'est-à-dire que ces deux groupes sont isomorphes.

Démonstration. On considère pour cette preuve les deux applications :

$$p_X : \begin{cases} X \times Y & \longrightarrow X \\ (x, y) & \longmapsto x \end{cases}$$

$$p_Y : \begin{cases} X \times Y & \longrightarrow Y \\ (x, y) & \longmapsto y \end{cases}$$

Respectivement la projection sur X et sur Y

On s'intéresse ensuite aux applications associées :

$$p_{X*} : \begin{cases} \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) & \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ \gamma & \longmapsto p_X \circ \gamma \end{cases}$$

$$p_{Y*} : \begin{cases} \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) & \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ \gamma & \longmapsto p_Y \circ \gamma \end{cases}$$

Pour finalement poser :

$$p : \begin{cases} \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) & \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ & \longmapsto (p_{X*}(\gamma), p_{Y*}(\gamma)) \end{cases}$$

Il nous reste à montrer que p est un isomorphisme de groupe.

★ *morphisme*

p est l'application associée d'une fonction continue (projections). On a donc immédiatement p morphisme de groupes.

★ *injectivité*

Soit $\gamma \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$

Supposons :

$$p(\gamma) = c_{(x_0, y_0)}$$

On a alors une homotopie :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ (s, t) & \longmapsto H(s, t) \end{cases}$$

Qui relie $p(\gamma)$ avec $c_{(x_0, y_0)}$

Mais l'espace d'arrivée de H étant $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ on peut poser l'existence de :

$$H_X : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ (s, t) & \longmapsto H_X(s, t) \end{cases}$$

$$H_Y : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ (s, t) & \longmapsto H_Y(s, t) \end{cases}$$

Deux applications continues telles que :

$$H = H_X \times H_Y$$

Dans le sens où :

$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2, \quad H(s, t) = (H_X(s, t), H_Y(s, t))$$

Et, en utilisant le fait que H soit une homotopie, on remarque :

- $\forall t \in [0, 1], \quad H_X(0, t) = (p_X \circ \gamma)(t)$
- $\forall t \in [0, 1], \quad H_X(1, t) = x_0$
- $\forall s \in [0, 1], \quad H_X(s, 0) = x_0$
- $\forall s \in [0, 1], \quad H_X(s, 1) = x_0$

On a alors bel et bien H_X une homotopie que relie $p_X(\gamma)$ à c_{x_0}

De la même manière, on a H_Y une homotopie qui relie $p_Y(\gamma)$ à c_{y_0}

On en déduit que :

$$\gamma = (p_X(\gamma), p_Y(\gamma)) \text{ est homotope à } (c_{x_0}, c_{y_0}) \text{ lui-même égal à } c_{(x_0, y_0)}$$

C'est-à-dire γ homotope au lacet constant

On obtient donc :

$$p(\gamma) = 0 \implies \gamma = 0$$

C'est-à-dire que le morphisme de groupe est injectif.

★ *surjectivité*

Soient γ_1, γ_2 deux lacets respectivement dans $\pi_1(X, x_0)$ et dans $\pi_1(Y, y_0)$

On veut montrer qu'il existe un antécédent par p à :

$$\begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ t & \longmapsto & (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{cases}$$

Pour cela il suffit simplement de prendre le même lacet, mais de le voir comme à support dans $X \times Y$ plutôt que dans deux espaces différents (on concatène les deux lacets). L'application :

$$\begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \\ t & \longmapsto & (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{cases}$$

Est bien un antécédent pour l'application précédente par p

On en déduit p surjective

On a donc trouvé un morphisme de groupes bijectif. Donc un isomorphisme de groupe

On en déduit la proposition. \square

Chapitre 6

Applications aux Espaces Classiques

Nous avons étudié tout le long de cet écrit, plusieurs méthodes et théorèmes permettant de déterminer le groupe fondamental d'un espace. Dans ce chapitre, nous proposons l'application de tous nos résultats sur certains exemples des plus simples aux plus ardues. On remplacera aussi le symbole " \simeq " par " $=$ " dans ce chapitre.

6.1 Groupe Fondamental de \mathbb{R}^n

On a déjà vu dans le chapitre 5 que :

$$\forall n \geq 1, \mathbb{R}^n \text{ est simplement connexe}$$

Autrement dit :

$$\forall n \geq 1, \pi_1(\mathbb{R}^n) = \{0\}$$

On ne spécifie pas le point de base car \mathbb{R}^n est convexe donc connexe par arcs. Les détails de cette démonstration commencent à la page 101. L'idée est de montrer que \mathbb{R}^n possède le même type d'homotopie qu'un point (par exemple $\{0\}$), d'où :

$$\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(\{0\}) = \{0\}$$

L'espace vectoriel réel le plus utilisé a donc un groupe fondamental trivial quel que soit sa dimension (finie).

6.2 Groupe Fondamental des Convexes de \mathbb{R}^n

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe non vide.

Soient γ_1 et γ_2 deux lacets tracés dans C basés en $x_0 \in C$.

Posons :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow C \\ (s, t) & \longmapsto s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_2(t) \end{cases}$$

H est continue, bien à l'arrivée dans C car celui-ci est convexe. On a donc une homotopie de γ_1 à γ_2 (les axiomes de l'homotopie sont simples à montrer ici).

Ces deux lacets étant arbitraires, on a montré que tous les lacets dans C sont homotopes entre eux. C étant convexe, il est connexe par arcs et on a donc :

$$\pi_1(C) = \{0\}$$

C'est-à-dire que tout convexe réel est simplement connexe. En particulier, le disque (ou les boules en général, qu'elles soient ouvertes ou fermées), le carré ou encore les hypercubes sont tous simplement connexes.

6.3 Groupe Fondamental du Cercle \mathbb{S}^1

Nous avons déjà beaucoup étudié \mathbb{S}^1 notamment avec le revêtement de l'exponentielle complexe définie sur les réels.

En effet on a remarqué :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t & \longmapsto e^{it} \end{cases}$$

Un revêtement (voir à la page 36) avec ici :

$$X = \mathbb{S}^1$$

L'espace de base, et :

$$E = \mathbb{R}$$

L'espace total du revêtement. Bien sûr avec $p = \exp$

Il nous faut donc nous intéresser au groupe d'automorphisme de \exp sur \mathbb{R}

Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme.

On a :

$$\psi \in \text{Aut}_{\exp}(\mathbb{R}) \iff \exp \circ \psi = \exp$$

Ce qui est vrai si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{i\psi(t)} = e^{it}$$

Si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) - t \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Posons désormais :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \psi(t) - t \end{cases}$$

On sait que f est continue comme différence d'applications continues et qu'elle atteint seulement les multiples de 2π (dans le cas où $\psi \in \text{Aut}_{\text{exp}}(\mathbb{R})$ ce qu'on suppose désormais)

Par continuité, on en déduit f constante.

En effet, pour passer de $2\pi k_1$ à $2\pi k_2$ avec $k_1 \neq k_2$ il nous faut - par le théorème des valeurs intermédiaires - atteindre des valeurs non comprises dans $2\pi\mathbb{Z}$ ce qui implique que $\psi \notin \text{Aut}_{\text{exp}}(\mathbb{R})$

Ainsi :

$$\psi \in \text{Aut}_{\text{exp}}(\mathbb{R}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, f = 2\pi k$$

C'est-à-dire :

$$\text{Aut}_{\text{exp}}(\mathbb{R}) = \{\psi_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, \psi_k(t) = t + 2\pi k\}$$

On peut donc établir un isomorphisme de groupes :

$$\begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow \text{Aut}_{\text{exp}}(\mathbb{R}) \\ k & \longmapsto \psi_k \end{cases}$$

Ce qui nous assure :

$$\text{Aut}_{\text{exp}}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$$

Bien. Vérifions si ce revêtement nous place en situation galoisienne ou non.

Soit $x \in \mathbb{S}^1$.

Soient $a, b \in \exp^{-1}(\{x\})$

On peut déjà assurer :

$$b - a \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Posons alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$b - a = 2\pi k$$

On a l'existence d'un unique élément de $\psi \in \text{Aut}_{\text{exp}}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\psi(a) = b$$

En effet, il s'agit de ψ_k

On a effectivement :

$$\psi_k(a) = a + 2\pi k = b$$

Et puisqu'aucun autre élément de $Aut_{\text{exp}}(\mathbb{R})$ ne vérifie cette condition, on est bien en situation galoisienne.

On a de plus constaté précédemment que \mathbb{R} était simplement connexe (pour $n = 1$)

On peut donc appliquer le dernier corollaire vu à la fin du chapitre 4. On a :

$$\pi_1(X) = Aut_p(E)$$

C'est-à-dire ici :

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) = Aut_{\text{exp}}(\mathbb{R})$$

On a donc :

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) = Aut_{\text{exp}}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$$

Par transitivité, on obtient finalement :

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$$

Le groupe fondamental du cercle est donc isomorphe à l'ensemble des entiers relatifs. Voici donc le pouvoir du dernier théorème montré dans cet écrit. Il permet - en passant par les revêtements - de déterminer le groupe fondamental d'espaces non triviaux.

Remarque. Voici comment comprendre intuitivement comment le groupe fondamental du cercle est isomorphe à \mathbb{Z} :

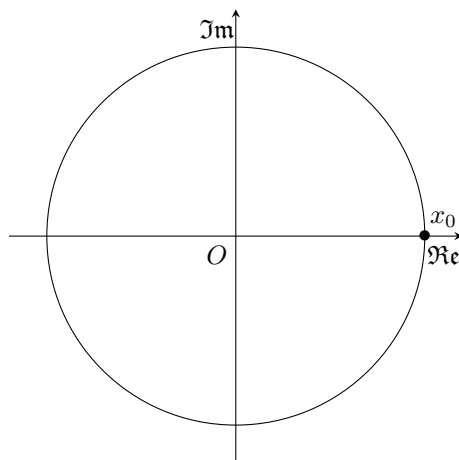


FIGURE 6.1 – $\pi_1(\mathbb{S}^1)$

Pour avoir un lacet en x_0 , il nous faut partir de x_0 et y revenir d'une manière ou d'une autre. L'isomorphisme avec \mathbb{Z} vient juste du fait que l'on "compte" le nombre de tours faits sur le cercle pour revenir à x_0 . On peut en faire 3, -1500, ou 0 par exemple.

6.4 Groupe Fondamental de la Sphère \mathbb{S}^n

Nous avons déterminé le groupe fondamental de \mathbb{S}^1 mais on s'attaque ici à plus gros. La sphère en dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons encore une fois que :

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

Avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne en dimension $n+1$. On a déjà traité le cas de \mathbb{S}^1 . On supposera donc ici $n \geq 2$.

La preuve qui suit utilise un raisonnement subtil. On suppose une certaine condition vérifiée tout d'abord, montrons le résultat voulu, et remarquons que même si cette condition n'est pas vérifiée, on peut se ramener au cas où elle l'est. Éclaircissons cela

Soit donc γ un lacet de base $x_0 \in \mathbb{S}^n$ à support dans \mathbb{S}^n

★ On suppose que :

$$\forall t \in [0, 1], \gamma(t) \neq -x_0 \quad (*)$$

C'est-à-dire que γ ne croise jamais l'opposé de sa base.

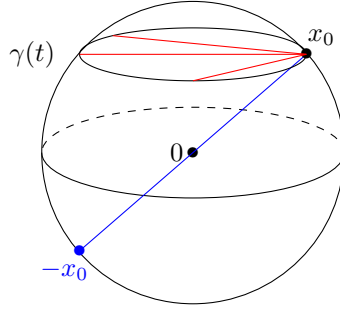


FIGURE 6.2 – γ ne croisant pas $-x_0$ en dimension deux

Sur la figure ci-dessus, on a γ un chemin tracé (l'ellipse en haut de la sphère) qui vérifie qu'aucun segment rouge ne coïncide avec le segment bleu. Cette figure est *représentative* de la véracité de la condition (*)

Remarquons que de cette manière, on a toujours le segment $[\gamma(t), x_0]$ qui ne croise pas $0_{\mathbb{R}^{n+1}}$

C'est-à-dire que l'on a :

$$\forall s \in [0, 1], \quad s\gamma(t) + (1-s)x_0 \neq 0$$

De cette manière on peut poser l'homotopie H telle que :

$$H : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (s, t) & \longmapsto \frac{sx_0 + (1-s)\gamma(t)}{\|sx_0 + (1-s)\gamma(t)\|} \end{cases}$$

On a bien H qui arrive dans \mathbb{S}^n car :

$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2, \quad H(s, t) \text{ est un vecteur de } \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2, \quad \|H(s, t)\| = 1$$

H est continue car le dénominateur ne s'annule jamais (on l'a justifié au-dessus). Elle est donc composée d'applications continues d'où continuité.

H est bien une homotopie de γ à c_{x_0}

En effet :

$$\begin{aligned}
& \text{— } \forall t \in [0, 1], H(0, t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = \frac{\gamma(t)}{1} = \gamma(t) \\
& \text{— } \forall t \in [0, 1], H(1, t) = \frac{x_0}{\|x_0\|} = \frac{x_0}{1} = x_0 \\
& \text{— } \forall s \in [0, 1], H(s, 0) = \frac{x_0}{\|x_0\|} = x_0 \\
& \text{— } \forall s \in [0, 1], H(s, 1) = \frac{x_0}{\|x_0\|} = x_0
\end{aligned}$$

On a donc bien γ homotope au lacet trivial. Autrement dit, dans $\pi_1(\mathbb{S}^n)$, on a $\gamma = 0$ quel que soit γ vérifiant la condition (*).

★ Supposons désormais que :

$$\exists t \in [0, 1], \gamma(t) = -x_0$$

C'est-à-dire que γ ne vérifie pas la condition (*)

Notre but sera d'homotoper γ à un lacet γ' en x_0 vérifiant la condition (*). C'est-à-dire d'avoir :

$$\begin{aligned}
& H \text{ une homotopie de } \gamma \text{ à } \gamma' \\
& \gamma' \text{ un lacet de } \mathbb{S}^n \text{ tel que } \forall t \in [0, 1], \gamma'(t) \neq -x_0
\end{aligned}$$

De cette manière on aura homotopé γ à un lacet qu'on sait homotope au lacet trivial, c'est-à-dire qu'on aura assuré :

$$\gamma = 0$$

Quel que soit le cas dans lequel on se trouve (que (*) soit vraie ou non).

Commençons dès maintenant.

Soit donc γ un lacet de \mathbb{S}^n , basé en $x_0 \in \mathbb{S}^n$ ne vérifiant pas la condition (*).

Soit $r > 0$ un réel strictement positif arbitrairement choisi.

Posons $B_{\mathbb{S}^n}(-x_0, r)$ la boule ouverte en $-x_0$ dans \mathbb{S}^n . C'est-à-dire :

$$B_{\mathbb{S}^n}(-x_0, r) = B_{\mathbb{R}^{n+1}}(-x_0, r) \cap \mathbb{S}^n$$

Notons désormais cette boule B_r pour nous simplifier l'écriture.

On sait que pour r suffisamment petit (plus petit que $1/2$ par exemple), on a :

$$x_0 \notin B_r$$

C'est-à-dire que si la boule B_r centrée en x_0 est "petite", on ne peut pas y croiser x_0 .

On en déduit :

$$B_r \subset \gamma(]0, 1[)$$

Puis :

$$\gamma^{-1}(B_r) \subset]0, 1[$$

Or on sait que γ est une application continue car c'est un chemin. De plus, B_r est une boule ouverte. C'est donc un ouvert de \mathbb{S}^n .

On en déduit que $\gamma^{-1}(B_r)$ est un ouvert contenu dans $]0, 1[$

Il est possible de décrire cet ouvert. En effet la figure suivante nous aide à le comprendre :

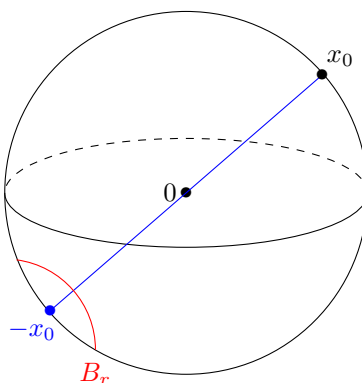


FIGURE 6.3 – B_r centrée en $-x_0$

Et voici désormais le lacet qui peut s'y trouver :

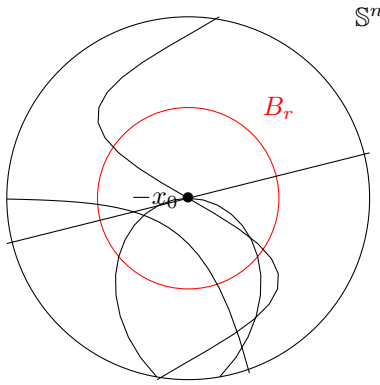


FIGURE 6.4 – L'ouvert $\gamma^{-1}(B_r)$

Sur la figure précédente, on a centré notre sphère de manière à avoir $-x_0$ au centre. De cette manière on peut tracer le lacet γ qui passe (au moins une fois) par $-x_0$. On constate que certains "bouts" de chemin rentrent et sortent dans B_r sans passer par $-x_0$. On peut finalement assurer :

$$\gamma^{-1}(B_r) = \bigsqcup_{i \in I}]a_i, b_i[$$

Où - à chaque fois - a_i est l'instant pour lequel γ commence à rentrer dans B_r , et b_i représente l'instant où le chemin sort de cette même boule. Que ce "bout" de chemin croise $-x_0$ ou non. C'est-à-dire que pour tout $i \in I$, $a_i < b_i$

Poursuivons. On s'intéresse désormais à $\gamma^{-1}(\{-x_0\})$ car on veut homotoper γ à un chemin qui ne le rencontre pas.

On sait déjà :

$$\{-x_0\} \subset B_r$$

D'où :

$$\gamma^{-1}(\{-x_0\}) \subset \gamma^{-1}(B_r)$$

Puis :

$$\gamma^{-1}(\{-x_0\}) \subset \bigsqcup_{i \in I}]a_i, b_i[$$

Ce qui nous donne le résultat :

$$\gamma^{-1}(\{-x_0\}) = \bigsqcup_{i \in I}]a_i, b_i[\cap \gamma^{-1}(\{-x_0\})$$

Puis :

$$\gamma^{-1}(\{-x_0\}) = \bigsqcup_{i \in I} (]a_i, b_i[\cap \gamma^{-1}(\{-x_0\})) \quad (1)$$

On sait que $]a_i, b_i[\cap \gamma^{-1}(\{-x_0\})$ est un ouvert de l'espace $\gamma^{-1}(\{-x_0\})$
On obtient donc ici un recouvrement ouvert de $\gamma^{-1}(\{-x_0\})$

Or on sait que $\{-x_0\}$ est fermé. On obtient par continuité de γ que $\gamma^{-1}(\{-x_0\})$ est un fermé de $[0, 1]$.

$[0, 1]$ étant lui-même un compact, on en déduit que :

$$\gamma^{-1}(\{-x_0\}) \text{ est un fermé borné de } \mathbb{R}$$

C'est-à-dire puisque \mathbb{R} est de dimension finie (égale à un) qu'on a :

$$\gamma^{-1}(\{-x_0\}) \text{ compact}$$

On en déduit que l'équation (1) nous exhibe le recouvrement ouvert d'un espace quelconque.

On peut utiliser la définition de la compacité pour extraire de ce recouvrement un recouvrement fini.

Autrement dit, on a l'existence d'un $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\gamma^{-1}(\{-x_0\}) = \bigsqcup_{i=1}^m (]a_i, b_i[\cap \gamma^{-1}(\{-x_0\}))$$

Ce qui signifie sur le dessin que γ ne passe qu'un nombre *fini* de fois sur $-x_0$. Ceci nous permet de travailler sur tous les intervalles (finis) $]a_i, b_i[$ et d'homotoper $\gamma|_{]a_i, b_i[}$ à un chemin $\tilde{\gamma}|_{]a_i, b_i[}$ qui lui ne passe pas par $-x_0$.

De cette manière on aura homotopé γ à un lacet qui vérifie (*) et nous aurons $\gamma = 0$ comme souhaité.

Soit donc $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$

Cherchons à homotoper $\gamma|_{]a_i, b_i[}$ à un chemin ne croisant pas $-x_0$

Comme expliqué précédemment, on peut représenter $\gamma|_{]a_i, b_i[}$ ainsi :

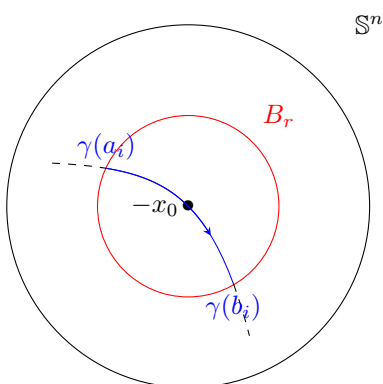


FIGURE 6.5 – L'ouvert $\gamma|_{]a_i, b_i[}$

Sur la figure ci-dessus, on fixe un bout du lacet γ qui passe par $-x_0$ en rentrant dans la boule B_r .

Posons $\tilde{\gamma}|_{]a_i, b_i[}$ le bout de chemin qui va de $\gamma(a_i)$ à $\gamma(b_i)$ en restant sur le bord de la boule B_r . On peut le représenter :

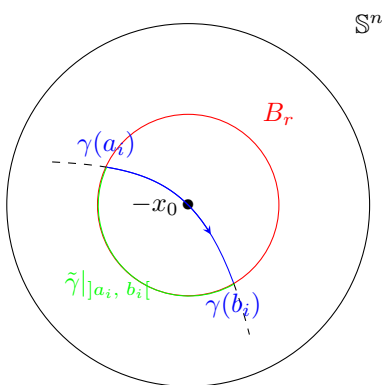


FIGURE 6.6 – $\tilde{\gamma}|_{]a_i, b_i[}$

On sait qu'on peut homotoper le chemin bleu vers le chemin vert. Ce faisant, le bout de chemin $\gamma|_{]a_i, b_i[}$ se transforme en $\tilde{\gamma}|_{]a_i, b_i[}$.

Ainsi, on a homotopé $\gamma|_{]a_i, b_i[}$ à un chemin qui ne croise plus $-x_0$. En effectuant le même raisonnement pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a bien γ homotope à $\tilde{\gamma}$ mais ce dernier ne croise jamais l'opposé de la base du lacet.

On peut même assurer que ces deux lacets sont homotopes relativement à :

$$[0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^m]a_i, b_i[$$

Car en dehors de la boule, les chemins coïncident. Illustrons cela à l'aide de la figure 6.4

En effet si l'on retrace cette figure :

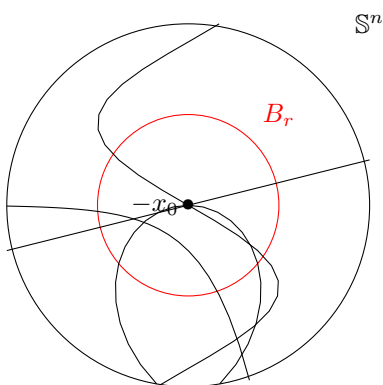


FIGURE 6.7 – Le lacet γ qui passe par $-x_0$

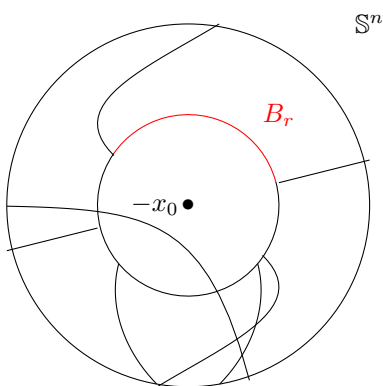


FIGURE 6.8 – Le lacet $\tilde{\gamma}$ qui ne passe pas par $-x_0$

On sait que $\tilde{\gamma}$ et γ sont homotopes car le sont par morceaux et les points d'éventuelle discontinuité (tels que les a_i, b_i) n'en rencontrent en fait pas.

Mais on a montré avec la première partie que sous l'hypothèse (*), tout lacet est trivial.

Or $\tilde{\gamma}$ respecte la condition (*)

Donc on a :

$$\gamma = \tilde{\gamma} = 0$$

Par transitivité, tout lacet γ , qu'il vérifie ou non la condition (*), est homotope au lacet constant.

On en déduit que $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ est trivial (on omet le point de base, la sphère est connexe par arcs).

Autrement dit :

$$\forall n \geq 2, \mathbb{S}^n \text{ est simplement connexe}$$

6.5 Groupe Fondamental de l'Espace Epointé \mathbb{R}^{n*}

On s'intéresse ici au groupe fondamental de l'espace vectoriel réel de dimension n dont on a omis le point 0.

Soit donc $n \geq 1$

Posons les deux applications :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{n*} & \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x & \longmapsto x / \|x\| \end{cases}$$

Qui ramène tout élément vers son vecteur directeur unitaire, et :

$$g : \begin{cases} \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow \mathbb{R}^{n*} \\ x & \longmapsto x \end{cases}$$

L'injection canonique. On a :

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x & \longmapsto x \end{cases}$$

Qui est égale à l'identité et :

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R}^{n*} & \longrightarrow \mathbb{R}^{n*} \\ x & \longmapsto x / \|x\| \end{cases}$$

Qu'on peut *homotoper* vers l'identité avec cette homotopie :

$$H : \begin{cases} [0, 1] \times \mathbb{R}^{n*} & \longrightarrow \mathbb{R}^{n*} \\ (s, x) & \longmapsto \frac{sx(\|x\|-1)+x}{\|x\|} \end{cases}$$

On a donc \mathbb{R}^{n*} et \mathbb{S}^{n-1} deux espaces qui ont même type d'homotopie.
On en déduit que leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.
Ainsi :

$$\forall n \geq 3, \pi_1(\mathbb{R}^{n*}) = \{0\}$$

Et :

$$\pi_1(\mathbb{R}^{2*}) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$$

\mathbb{R}^* n'est pas connexe par arcs. On a en revanche :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^*, \pi_1(\mathbb{R}^*, x_0) = \{0\}$$

Ce qui est vrai mais pas très intéressant. Un autre espace qui l'est plus nous attend.

6.6 Groupe Fondamental du Tore \mathbb{T}

Le *Tore* est un espace topologique. On note cet espace \mathbb{T}^n (où $n \in \mathbb{N}^*$) et celui-ci est construit comme le produit direct de n cercles \mathbb{S}^1 .

On peut représenter cet espace avec $n = 2$ car il s'agit d'une surface plongée dans \mathbb{R}^3 :

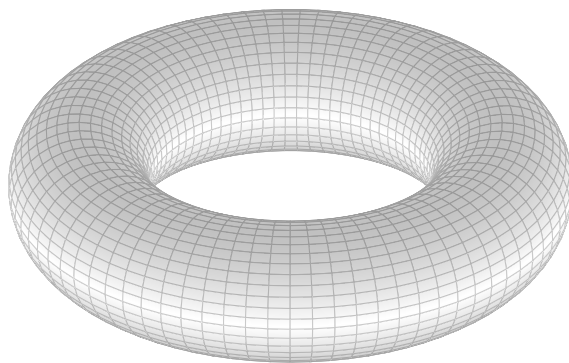


FIGURE 6.9 – Le Tore en dimension deux \mathbb{T}^2

Le Tore \mathbb{T}^n étant construit comme produit de n cercles, on a :

$$\pi_1(\mathbb{T}^n) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1)$$

On utilise le théorème sur le groupe fondamental d'espaces produits (vu à la fin du chapitre 5), et l'on a :

$$\pi_1(\mathbb{T}^n) = \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \dots \times \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$$

Puis finalement :

$$\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$$

En particulier, $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ est égal à \mathbb{Z}^2

Si l'on regarde la figure ci-dessus, cela ne paraît plus si abstrait.

Il y a en effet les lacets triviaux, il y a ceux qui "attrappent" le Tore en se plaçant sur la tranche de cercle de ce dernier, ce qui nous donne un premier groupe de lacets, ainsi que ceux qui sont "posés" sur le Tore.

On a donc deux groupes de lacets et si le groupe fondamental du cercle compte le nombre de tours faits, celui du Tore compte le nombre de tours exécutés selon la tranche du cercle mais aussi selon le haut du Tore. Cela simultanément d'où le groupe fondamental isomorphe à \mathbb{Z}^2

Voici une illustration de ces dires :

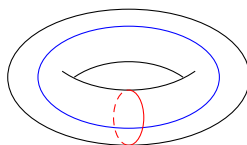


FIGURE 6.10 – Les deux tours possibles sur le Tore \mathbb{T}^2

La "tranche de cercle" désigne le lacet rouge et "posés sur le Tore" fait référence au lacet bleu.

6.7 Groupe Fondamental de l'Espace Projectif Réel $P_n(\mathbb{R})$

Soit $n \geq 2$. L'espace projectif $P_n(\mathbb{R})$ représente l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1}

Il nous est possible de le définir ainsi :

L'espace projectif réel $P_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des vecteurs de norme égale à un, à multiplication par -1 près.

Détaillons ceci. On cherche l'ensemble des droites de \mathbb{R}^{n+1} .

Pour cela les vecteurs de norme 1 suffisent. Autrement dit, l'ensemble des points de \mathbb{S}^n suffisent pour avoir toutes les droites possibles. On en a malheureusement deux fois trop dans cette configuration.

En effet, à x_0 un point donné de \mathbb{S}^n , on décrit une seule direction mais deux droites. Celle portée par le vecteur x_0 comme prévu, mais aussi celle portée par $-x_0$.

Autrement dit, on a :

$$P_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n / \mathbb{U}_2$$

Où $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$. On quotiente l'ensemble des directions par les deux destinations possibles. Ceci nous permet d'obtenir l'ensemble des droites (et non plus des directions).

Considérons désormais l'action :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{U}_2 \times \mathbb{S}^n & \longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (\epsilon, x) & \longmapsto \epsilon x \end{array} \right.$$

On affirme que cette action est discrète et continue. Développons-le :

★ *l'action est continue*

Soit $\epsilon \in \{-1, 1\}$ fixé.

L'application :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{S}^n & \longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (\epsilon, x) & \longmapsto \epsilon x \end{array} \right.$$

est clairement continue. Notre action l'est donc tout autant (par définition).

★ *l'action est discrète*

Soit $x \in \mathbb{S}^n$ fixé. Soit ϵ un élément de \mathbb{U}_2 différent de l'élément neutre. On a donc ici $\epsilon = -1$

Soit $r > 0$ un nombre positif.

Posons :

$$V = B(x, r) \cap \mathbb{S}^n$$

Un voisinage ouvert de x .

Pour r suffisamment petit, (par exemple plus petit que $1/3$) le voisinage V couvrira moins de la moitié de la surface de la sphère. De cette manière, le voisinage n'atteint aucun de ses points opposés.

Nous aurons ici :

$$\phi_\epsilon(V) = \{\epsilon \cdot z, z \in V\} = \{-1 \cdot z, z \in V\} = \{-z, z \in V\} = -V$$

Un autre ensemble totalement disjoint de V

Autrement dit, on a montré le prédicat :

$$\forall x \in \mathbb{S}^n, \forall \epsilon \in \mathbb{U}_2 \setminus \{1\}, \exists V \in \mathcal{V}(x), \phi_\epsilon(V) \cap V = \emptyset$$

C'est-à-dire que notre action est discrète.

Notre action est donc libre et discrète. On a de plus \mathbb{S}^n un espace connexe.

On en déduit par le théorème de caractérisation des revêtements (voir page 58), que l'application :

$$p : \begin{cases} \mathbb{S}^n & \longrightarrow & P_n(\mathbb{R}) \\ x & \longrightarrow & D_x \end{cases}$$

qui à chaque élément de \mathbb{S}^n associe son orbite pour l'action considérée - ce qui représente la droite portée par l'élément de \mathbb{S}^n - est un revêtement.

On sait de plus que :

$$Aut_p(\mathbb{S}^n) = \mathbb{U}_2$$

On a désormais notre revêtement à deux fibres, dont l'espace total est \mathbb{S}^n , et la base est $P_n(\mathbb{R})$

La question que nous sommes désormais en droit de nous poser est celle-ci : sommes-nous ou non en situation galoisienne ?

Essayons de le montrer :

On a clairement \mathbb{S}^n l'espace total, connexe par arcs.

Soit D_x une droite de $P_n(\mathbb{R})$. Soient $a, b \in p^{-1}(\{D_x\})$.

Autrement dit, on a a, b deux vecteurs de \mathbb{R}^{n+1} , unitaires, tels que D_x peut être portée par chacun de ces deux vecteurs.

On a donc :

$$a \in \{x, -x\}$$

$$b \in \{x, -x\}$$

Dans tous les cas possibles, on a l'existence d'un unique élément ϕ_ϵ de $\{I_d, -I_d\}$ tel que :

$$b = \psi(a)$$

Autrement dit, nous sommes dans le cadre galoisien.

Puisque nous avons montré que la sphère en dimension $n \geq 2$ est simplement connexe, on peut assurer :

$$\pi_1(X) = \text{Aut}_p(E)$$

Ce qui signifie dans notre cas :

$$\pi_1(P_n(\mathbb{R})) = \mathbb{U}_2$$

C'est-à-dire que le groupe fondamental de l'ensemble des droites dans \mathbb{R}^{n+1} contient deux éléments. Il existe seulement deux types de lacets sur cet espace qui sont non-homotopes.

6.8 Groupe Fondamental du Ruban de Möbius

Le *Ruban de Möbius* est un espace topologique non-orientable. On peut l'imaginer et même le construire.

Il suffit de prendre une feuille, d'en découper une bande ce qui nous donne un rectangle plein en dimension deux.

On recolle ensuite les deux largeurs opposées mais en recollant le point gauche du bas avec le point droit du haut et le point droit du bas avec le point gauche du haut.

La figure ci-dessous l'illustre : les deux flèches rouges sont les mêmes.

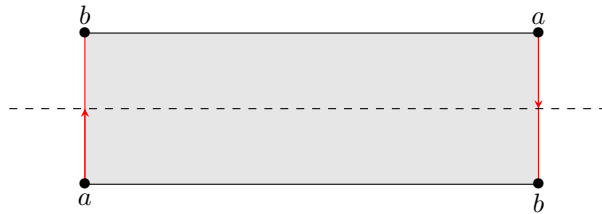


FIGURE 6.11 – Construction d'un ruban de Möbius

Une fois cette figure construite, on replie le ruban sur lui-même selon l'axe pointillé pour obtenir une surface à deux faces. On a construit notre ruban de Möbius.

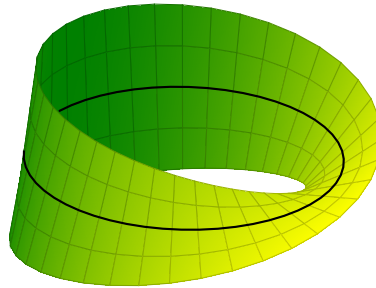


FIGURE 6.12 – Ruban de Möbius construit

On s'intéresse donc au groupe fondamental de cet espace. Commençons par remarquer qu'il est clairement connexe par arcs, donc connexe. Il nous sera aussi utile de le paramétrer. Commençons une description plus détaillée de cet espace.

On peut commencer par poser la bande dans \mathbb{R}^2 :

$$B = \mathbb{R} \times [-1, 1]$$

Dont voici la représentation :

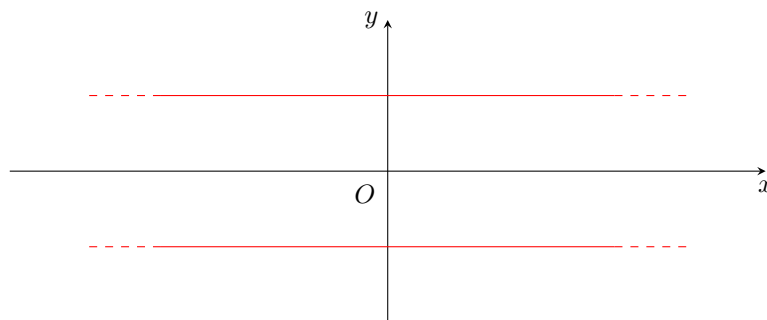


FIGURE 6.13 – Notre bande B

Si cette bande devait représenter notre ruban de Möbius, il nous faudrait la quotienter par la relation d'équivalence sur \mathbb{R}^2 :

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, (x_1, y_1) = (x_2 + k, (-1)^k y_2)$$

De telle manière à ce que si $(x, y) \in B$:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (x, y) = (x + k, (-1)^k y)$$

Effectivement, ce faisant, on a bien "recollé" les deux bords présents sur la figure 6.9. Lorsque l'ordonnée croît suffisamment, on revient au point de départ mais dans l'autre sens. Progressons encore d'une unité et on revient au point de départ.

Voici une illustration :



FIGURE 6.14 – Déplacement sur le ruban de Möbius

De cette manière, tous ces points-là sont les mêmes. En effet être d'un côté ou de l'autre de la surface, s'il s'agit du même point, ne change rien.

On a donc construit notre Ruban de Möbius.

On peut ainsi considérer l'action sur la bande $B = \mathbb{R} \times [-1, 1]$:

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times B & \longrightarrow B \\ (k, (x, y)) & \longmapsto (x + k, (-1)^k y) \end{cases}$$

Dont l'ensemble des orbites B/\mathbb{Z} , décrit l'espace M du ruban de Möbius.

Comme annoncé précédemment, M est connexe par arcs. M est donc connexe.

\mathbb{Z} agit clairement de manière continue sur B .

En effet, à $k \in \mathbb{Z}$ fixé, cette application :

$$\phi_k : \begin{cases} B & \longrightarrow B \\ (x, y) & \longmapsto (x + k, (-1)^k y) \end{cases}$$

est clairement continue.

L'action est de plus discrète. Effectivement, si $(x, y) \in B$ est fixé, alors quel que soit $k \in \mathbb{Z}^*$, il existe un voisinage ouvert de (x, y) de telle manière à avoir :

$$\phi_k(V) \cap V = \emptyset$$

Par exemple :

$$V = B((x, y), r)$$

Où r est un réel positif suffisamment petit ($1/2$ fait l'affaire).

En effet, k étant non nul, tout point dans V ayant pour première coordonnée a se verra ajouter k dans $\phi_k(V)$.

Et pour $r > 0$ inférieur à un demi, on a une intersection vide.

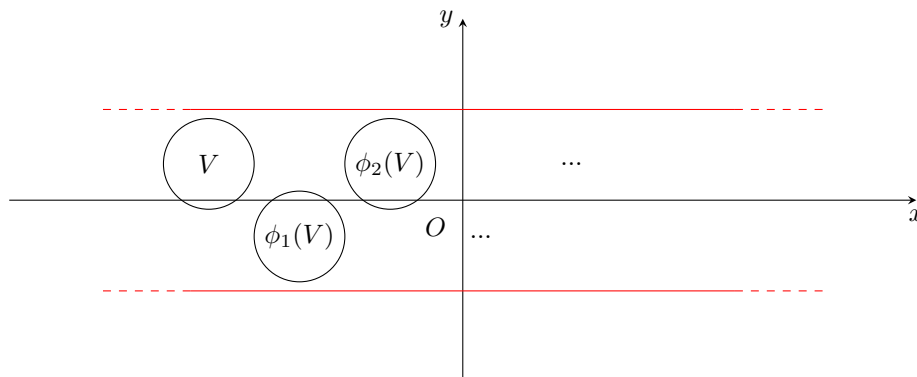


FIGURE 6.15 – V n'intersectant aucun $\phi_k(V)$

De cette manière, aucun $\phi_k(V)$ n'entre en contact avec V . On a montré ici que notre action était discrète.

On a donc une action discrète et continue. On en déduit par le théorème de caractérisation des revêtements que l'application :

$$p : \begin{cases} B & \longrightarrow M \\ (x, y) & \longmapsto \mathcal{O}_{(x, y)} \end{cases}$$

Qui a tout élément de la bande associe son orbite pour l'action considérée, est un revêtement et nous avons de plus que :

$$\text{Aut}_p(B) = \mathbb{Z}$$

Il nous reste à observer si nous sommes ou non en situation galoisienne avec ce revêtement.

Soit $(x, y) \in M$

Soient $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in p^{-1}(\{x, y\})$

Existe-il un unique $\phi_k \in \text{Aut}_p(E)$ tel que $\phi_k(a) = b$?

Puisque a et b sont dans la même orbite, on a :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, (b_1, b_2) = (a_1 + k, (-1)^k a_2)$$

Il nous suffit de poser ensuite :

$$\phi_k : \begin{cases} B & \longrightarrow B \\ (x, y) & \longmapsto (x + k, (-1)^k y) \end{cases}$$

De cette manière, on a bien $\phi_k(a) = b$ de plus, puisque tous les ϕ_k sont de cette forme, on a unicité d'un tel élément du groupe d'automorphisme de p .

On est donc placé - avec ce revêtement - en situation galoisienne.

Il nous reste à voir si B est simplement connexe ou non.

Pour cela, on peut poser :

$$f : \begin{cases} B & \longrightarrow \{0\} \\ x & \longmapsto 0 \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \{0\} & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto x \end{cases}$$

g est l'injection canonique ici.

On a :

$$f \circ g : \begin{cases} \{0\} & \longrightarrow \{0\} \\ 0 & \longmapsto 0 \end{cases}$$

Qui est donc *égale* à l'identité. Puis :

$$g \circ f : \begin{cases} B & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto 0 \end{cases}$$

$g \circ f$ est donc l'application nulle. Voici son homotopie à l'identité :

$$H : \begin{cases} [0, 1] \times B & \longrightarrow B \\ (s, x) & \longmapsto sx \end{cases}$$

On a donc montré ici que B avait le même type d'homotopie que $\{0\}$. B est donc contractile et on en déduit :

$$\pi_1(B) = \{0\}$$

On a donc B simplement connexe. Il nous suffit d'appliquer notre théorème pour conclure :

On a :

$$\pi_1(X) = \text{Aut}_p(E)$$

C'est-à-dire ici :

$$\pi_1(M) = \text{Aut}_p(B) = \mathbb{Z}$$

Ce qui signifie :

$$\pi_1(M) = \mathbb{Z}$$

Le groupe fondamental du Ruban de Möbius est donc l'ensemble des entiers relatifs. On remarque que le ruban de Möbius possède le même groupe fondamental que le cercle.

On le voit sur la figure 6.10, sur laquelle d'ailleurs est tracé un cercle noir au centre. Si l'on veut partir d'un point et y revenir, on doit effectuer un nombre entier de tours de Ruban et retrouver la base du lacet ensuite.

On a montré que le groupe fondamental du Ruban de Möbius était le groupe \mathbb{Z} .

6.9 Groupe Fondamental de la Bouteille de Klein

Après le *Ruban de Möbius*, on s'intéresse à la *Bouteille de Klein* qui est une surface topologique qui ne possède ni intérieur ni extérieur. Voici une première figure de cet espace :

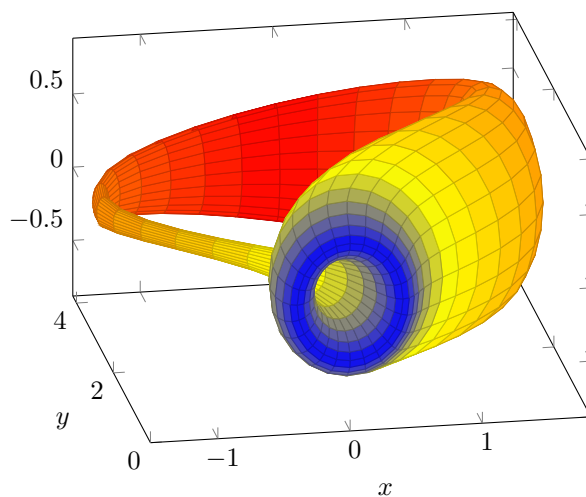


FIGURE 6.16 – Surface de la Bouteille de Klein dans \mathbb{R}^3

Commençons par une première remarque, cette illustration n'est qu'un objet qui nous permet d'imaginer la Bouteille de Klein, mais celle-ci vit en dimension 4. En effet, on ne peut normalement pas intersecter une surface avec elle-même. On fait exception ici pour pouvoir imaginer la bouteille comme un objet de dimension 2, plongé dans l'espace de dimension 3.

Normalement, la bouteille "trouve la place" pour revenir sur elle-même sans s'intersecter (elle la trouve dans la quatrième dimension).

Commençons par construire et paramétrer un tel objet.

Voici comment on opère :

On commence par se donner un petit carré dont les bords sont orientés. Une fois recollés, cela nous donnera bien une surface dans \mathbb{R}^3

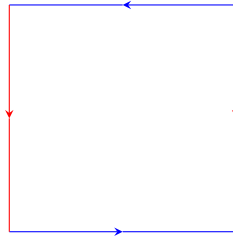


FIGURE 6.17 – Construction de la Bouteille de Klein, première étape

On commence par recoller les côtés *rouges* ce qui nous donne un cylindre :

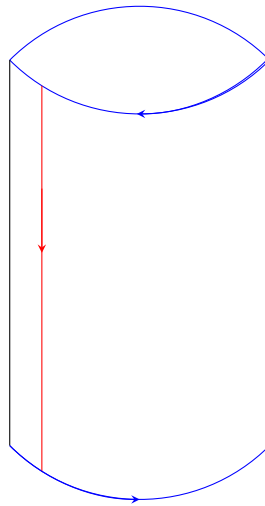


FIGURE 6.18 – Construction de la Bouteille de Klein, seconde étape

On aimerait ensuite recoller les côtés bleus mais malheureusement nos flèches sont mal orientées (et on obtiendrait un Tore en les recollant si elles étaient dans le même sens)...

Notre but est donc de tirer le cylindre du bas, pour le faire passer à l'intérieur du tube lui-même. Ceci nous permettra d'avoir nos flèches bleus dans le même sens (avec le cercle bleu du bas emboîté dans celui du haut).

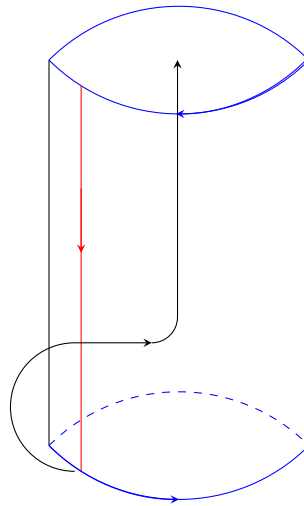


FIGURE 6.19 – Construction de la Bouteille de Klein, dernière étape

Après passage à l'intérieur et recollement, comme illustré précédemment, on obtient notre Bouteille de Klein :

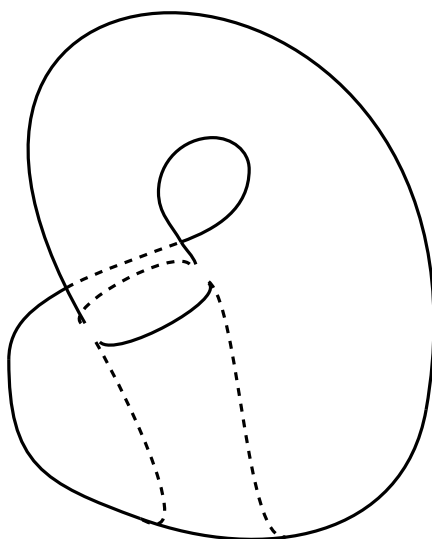


FIGURE 6.20 – Bouteille de Klein

Interrogeons-nous désormais sur son groupe fondamental. Pour cela, reconsidérons la Bouteille de Klein sous forme d'un patron (comme sur la figure 6.17). On peut essayer de le paramétrer notamment en rajoutant des *axes* sur cette figure :

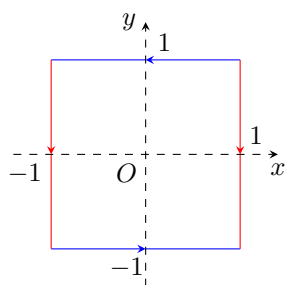


FIGURE 6.21 – Paramétrisation de la Bouteille de Klein

On remarque avec cette paramétrisation que lorsque y_0 l'ordonnée est fixée, les points (x, y_0) et $(x + k, y_0)$ où k est un entier relatif, sont confondus. En effet les flèches rouges sont orientées dans le même sens :

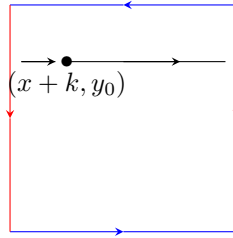


FIGURE 6.22 – Déplacement selon l'axe des abscisses sur la Bouteille de Klein

A l'inverse, lorsque - à abscisse fixée - on se déplace selon l'axe des ordonnées, on constate la même construction que pour le Ruban de Möbius :

Fixons donc l'abscisse x_0 on constate que l'on a quelle que soit l'ordonnée y :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (x_0, y) = ((-1)^k x_0, y + k)$$

Cela s'observe sur le dessin :

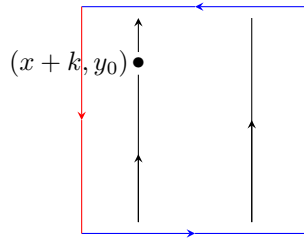


FIGURE 6.23 – Déplacement selon l'axe des ordonnées sur la Bouteille de Klein

Avec ces résultats et notre paramétrisation, on peut assurer que la Bouteille de Klein nous est donnée par le quotient du plan \mathbb{R}^2 par les deux relations :

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) \mathcal{R}_1 (x_2, y_2) \iff \exists k, \in \mathbb{Z}, (x_1, y_1) = (x_2 + k, y_2)$$

$$(x_1, y_1) \mathcal{R}_2 (x_2, y_2) \iff \exists k, \in \mathbb{Z}, (x_1, y_1) = ((-1)^k x_2, y_2 + k)$$

On peut donc considérer les deux applications :

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + 1, y) \end{cases}$$

$$\beta : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (-x, y + 1) \end{cases}$$

Posons G le -sous-groupe de $Isom(\mathbb{R}^2)$ (ensemble des isométries de \mathbb{R}^2 dans lui-même) engendré par ces deux applications.

On remarque un premier résultat intéressant :

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 :$

$$(x_1, y_1) \mathcal{R}_1 (x_2, y_2) \iff \exists k, \in \mathbb{Z}, (x_1, y_1) = \alpha^k((x_2, y_2))$$

$$(x_1, y_1) \mathcal{R}_2 (x_2, y_2) \iff \exists k, \in \mathbb{Z}, (x_1, y_1) = \beta^k(x_2, y_2)$$

On note que l'on a de plus :

$$\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}$$

En effet, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

On a :

$$\beta^{-1}\alpha\beta(x, y) = \beta^{-1}\alpha(-x, y + 1) = \beta^{-1}(1 - x, y + 1) = (x - 1, y)$$

Or :

$$\alpha^{-1}(x, y) = (x - 1, y)$$

D'où le résultat annoncé précédemment (on passe β^{-1} de l'autre côté) :

$$\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$$

A l'aide de cette égalité, on a un objet qui nous permet de permuter les α et les β . On en déduit ce résultat :

$$\forall \varphi \in G, \exists!(m, n) \in \mathbb{Z}, \varphi = \alpha^n \beta^m$$

On peut désormais poser un isomorphisme de groupes :

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} & \longrightarrow G \\ (n, m) & \longmapsto \alpha^n \beta^m \end{cases}$$

Si certains se demandent d'où vient ce nouveau groupe $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, il désigne seulement \mathbb{Z}^2 muni d'une loi de composition interne qui n'est pas usuelle.
En effet, après un bref calcul à la main, on remarque que l'on a pas :

$$(\alpha^{n_1} \beta^{m_1})(\alpha^{n_2} \beta^{m_2}) = \alpha^{n_1+n_2} \beta^{m_1+m_2}$$

Mais plutôt que l'on a :

$$(\alpha^{n_1} \beta^{m_1})(\alpha^{n_2} \beta^{m_2}) = \alpha^{n_1+(-1)^{n_2}m_1} \beta^{m_1+m_2}$$

Ainsi, dans $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ muni de sa loi $*$, on a :

$$(n_1, n_2) * (m_1, m_2) = (n_1 + \nu(n_2)(m_1), m_1 + m_2)$$

Où l'on a :

$$\nu : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & Aut(\mathbb{Z}) \\ k & \longmapsto & \nu_k \end{cases}$$

Et, quel que soit k dans \mathbb{Z} :

$$\nu_k : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ l & \longmapsto & (-1)^k l \end{cases}$$

De cette manière, on a bien isomorphie entre $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ et G car les lois de compositions internes concordent.

Remarque. On appelle ce "changement de loi" dans un espace produit de deux groupes A et B (ici on a deux fois \mathbb{Z}) le produit semi-direct de A et B noté $A \rtimes B$, ou alors de manière moins implicite :

$$A \rtimes_{\nu} B$$

Où l'on a donc :

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \rtimes_{\nu} B, (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 \cdot \nu(b_1)(a_2), b_1 \cdot b_2)$$

Avec $\nu : B \longrightarrow Aut(A)$ un morphisme ($Aut(A)$ est l'ensemble des isomorphismes de A dans lui-même, sans rapport avec $Aut_p(A)$ le groupe d'automorphisme).

On peut laisser le plaisir au lecteur de vérifier que nous avons bien une telle loi de composition interne dans notre exemple.

Poursuivons. On a donc G isomorphe à $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$
On peut finalement considérer l'action de groupe :

$$\begin{cases} G \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha^n \beta^m, (x, y)) & \longmapsto \alpha^n \beta^m(x, y) \end{cases}$$

Dont l'ensemble des orbites \mathbb{R}^2/G décrit K l'espace topologique de la Bouteille de Klein. En effet, K est quotient des deux relations d'équivalences engendrées par α et β ce qui nous donne le groupe G

On peut réécrire de manière plus concrète cette action :

$$\begin{cases} (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((n, m), (x, y)) & \longmapsto ((-1)^m x + n, y + m) \end{cases}$$

Cette action est continue, puisqu'à (n, m) dans \mathbb{Z}^2 fixé, l'application :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto ((-1)^m x + n, y + m) \end{cases}$$

Est clairement continue.

L'action est discrète. Montrons-le :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $g \in G \setminus \{e\}$

Peut-on trouver un voisinage de (x, y) tel que son image par ϕ_g lui soit totalement disjointe ?

On peut identifier g à un couple (n, m) et puisque $\phi_g \neq I_d$, on a :

$$(n, m) \neq (0, 0)$$

Si $m \neq 0$, le voisinage $V = B((x, y), r)$ pour r suffisamment petit convient. En effet les ordonnées de $\phi_g((x, y))$ et de (x, y) diffèrent de m qui est non nul. Illustrons-le :

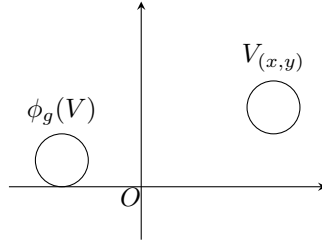


FIGURE 6.24 – $\phi_g(V)$ disjoint de V . Action discrète

On a par exemple ici $r = 1/2$, ce qui nous assure que les différentes images du voisinage, sont disjointes de ce dernier.

Dans le second cas où $m = 0$, on a $n \neq 0$ et on se retrouve avec l'action :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + n, y) \end{cases}$$

Ce qui fonctionne exactement de la même façon. On passe juste de l'axe des ordonnées à celui des abscisses.

Le voisinage $B((x, y), r)$ où $r \leq 1/2$ convient de la même manière que dans le cas $m \neq 0$.

L'action est donc discrète. Par le théorème de caractérisation des revêtements, l'application :

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow K \\ (x, y) & \longmapsto \mathcal{O}_{(x, y)} \end{cases}$$

Qui à chaque élément de \mathbb{R}^2 lui associe son orbite dans \mathbb{R}^2/G identifié à K , pour l'action considérée, est un revêtement.

On sait de plus que :

$$Aut_p(\mathbb{R}^2) = G = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$$

Il nous reste à vérifier que nous sommes - avec ce revêtement - en situation galoisienne. Soit donc $k \in K$ un point sur la Bouteille de Klein.

Soient $a, b \in p^{-1}(\{k\})$ deux éléments envoyés sur la même orbite (celle de k).

On sait que les éléments de $Aut_p(\mathbb{R}^2)$ sont de la forme :

$$\alpha^n \beta^m$$

De plus, puisque les deux éléments a et b sont envoyés dans la même orbite, on a :

$$\exists g \in G, g \cdot a = b$$

C'est-à-dire qu'il existe $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant :

$$(b_1, b_2) = ((-1)^m a_1 + n, a_2 + m)$$

(On a posé ici $b = (b_1, b_2)$ et $a = (a_1, a_2)$)

On constate qu'il existe un unique élément ψ de $Aut_p(\mathbb{R}^2)$ qui vérifie :

$$\psi(a) = b$$

Qui nous est donné par :

$$\psi = \alpha^n \beta^m$$

On est donc bel et bien en situation galoisienne.

On a déjà montré précédemment que \mathbb{R}^2 était simplement connexe.

On a donc en appliquant notre théorème vu au chapitre 4 :

$$\pi_1(K) = Aut_p(\mathbb{R}^2) = G = \mathbb{Z} \rtimes_{\nu} \mathbb{Z}$$

Ainsi, le groupe fondamental de la Bouteille de Klein n'est rien d'autre que le produit semi-direct de \mathbb{Z} sur lui-même noté $\mathbb{Z} \rtimes_{\nu} \mathbb{Z}$ avec ν le morphisme :

$$\nu : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & Aut(\mathbb{Z}) \\ k & \longmapsto & \{l \longmapsto (-1)^k l\} \end{cases}$$

On a calculé le groupe fondamental de la Bouteille de Klein. Celle-ci étant connexe par arcs, on a :

$$\pi_1(K) = \mathbb{Z} \rtimes_{\nu} \mathbb{Z}$$

C'est notre premier espace qui présente un groupe fondamental non abélien.

6.10 Groupe Fondamental du Huit

Dans cet exemple, notre espace est décrit ci-dessous :

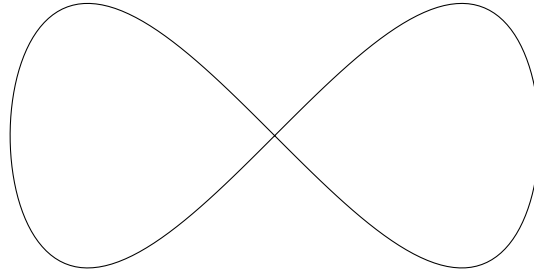


FIGURE 6.25 – Lemniscate de Gerono ou Espace topologique du Huit

Il s'agit du lemniscate de Gerono, déjà vu dans le chapitre 2. On peut le définir comme union de deux cercles par une relation d'équivalence, mais nous choisirons notre ancienne paramétrisation donnée par :

$$X = \{(\sin(2\pi t), \cos(2\pi t) \sin(2\pi t)), t \in [0, 1]\}$$

Ainsi sera défini l'espace du Huit ou bien du lemniscate. On se propose de calculer son groupe fondamental.

Pour cela, nous devons d'abord construire un nouvel espace et oublier notre Huit pour le moment.

Cet espace que nous appellerons *Arbre* et que nous désignerons par la notation A contenu dans \mathbb{R}^2 est défini par récurrence sur \mathbb{N} . On appellera alors A_0 , A_1 , etc... les espaces successifs et A en sera la réunion.

★ à $n = 0$, on pose $A_0 = \{0\}$

★ à $n = 1$, on pose $A_1 = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1, 1])$

Lorsque l'on a construit A_n où $n \in \mathbb{N}^*$, on construit A_{n+1} ainsi :

A toute arrête qui possède une extrémité libre, on trace - à $1/3^n$ de cette extrémité - un segment de longueur $2/3^n$ dont l'arrête considérée est la médiatrice.

Pour comprendre cette construction, construisons et dessinons les premiers A_i .

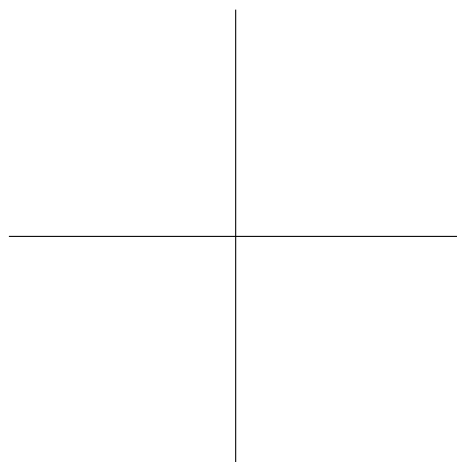


FIGURE 6.26 – A_1

Pour construire A_2 à partir de A_1 , on commence par remarquer qu'on a quatre arrêtes à extrémités libres. On peut donc tracer A_2 comme évoqué dans la récurrence :

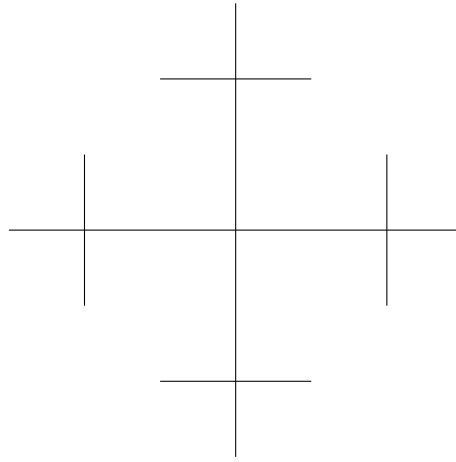


FIGURE 6.27 – $A_1 \cup A_2$

On peut en déduire son expression formelle :

$$A_2 = \{2/3\} \times [-1/3, 1/3] \cup \{-2/3\} \times [-1/3, 1/3] \cup [-1/3, 1/3] \times \{2/3\} \cup [-1/3, 1/3] \times \{-2/3\}$$

Poursuivons, pour $n = 3$ on peut encore une fois tracer sur chaque extrémité libre une nouvelle médiatrice :

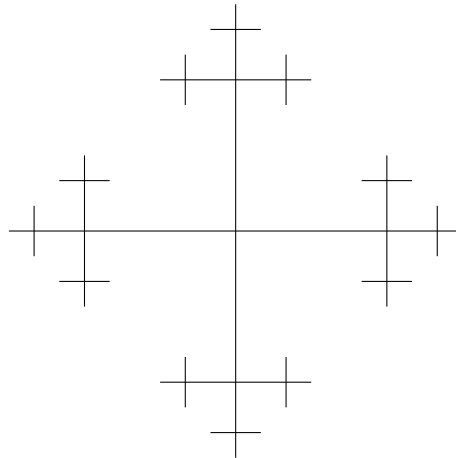


FIGURE 6.28 – $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

Dont on peut encore une fois déduire l'expression formelle :

$$A_3 = \{8/9\} \times [-1/9, 1/9] \cup \{-8/9\} \times [-1/9, 1/9] \cup [-1/9, 1/9] \times \{8/9\} \cup [-1/9, 1/9] \times \{-8/9\} \\ \cup \{-2/9\} \times [5/9, 7/9] \cup \{2/9\} \times [5/9, 7/9] \cup \{2/9\} \times [-7/9, -5/9] \cup \{-2/9\} \times [-7/9, -5/9] \\ \cup [5/9, 7/9] \times \{-2/9\} \cup [5/9, 7/9] \times \{2/9\} \cup [-7/9, -5/9] \times \{2/9\} \cup [-7/9, -5/9] \times \{-2/9\}$$

On remarque que le résultat peut très vite se complexifier. En espérant que le lecteur ait saisi la manière dont on construit l'Arbre, on le représentera ainsi :

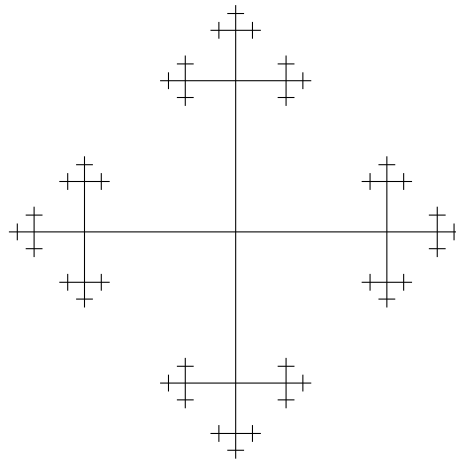


FIGURE 6.29 – $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

A défaut de pouvoir l'illustrer totalement.

On munit cet arbre A d'une distance d définie ainsi :

$$\forall (x, y) \in A, \quad d(x, y) = n$$

Où $n - 1$ est le nombre d'arrêtes qui séparent x et y (par convention, (-1) est le nombre d'arrêtes séparant un point de lui-même). Voici quelques exemples pour illustrer cette distance :

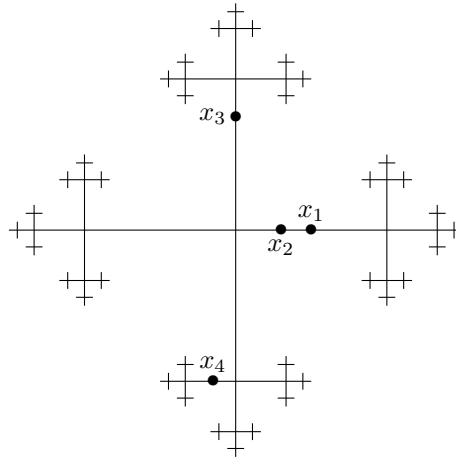


FIGURE 6.30 – La distance d

Sur cette figure :

- x_1 et x_2 sont sur la même arête, non confondus, donc $d(x_1, x_2) = 1$
- x_1 et x_3 sont séparés par une arête. On a donc $d(x_1, x_3) = 2$
- x_1 et x_4 sont séparés par deux arêtes. Tout comme x_3 et x_4 . On a donc $d(x_1, x_4) = d(x_3, x_4) = d(x_2, x_4) = 3$
- x_1 et x_1 sont confondus sur la même arête, on a donc $d(x_1, x_1) = 0$

Commençons par montrer quelques propriétés sur cet espace métrique (A, d) .

★ *A est connexe*

Montrons que A est connexe. Pour cela on opère par récurrence :

$$\mathcal{P}_n : " \bigcup_{i=0}^n A_i \text{ est connexe } "$$

★ *Initialisation*

On a clairement A_0 connexe car ne contient qu'un seul point. On a de même A_1 connexe comme réunion de deux segments qui s'intersectent (bien que nous considérons la nouvelle topologie métrique engendrée par d).

★ *Hérédité*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons \mathcal{P}_n . Montrons \mathcal{P}_{n+1}

Commençons par énoncer cette propriété (dont la preuve est facilement trouvable) :

X est un espace connexe $\iff \forall f \in \mathcal{C}(X, \{0, 1\}), f$ est constante

Il nous faut donc montrer que toutes les applications continues à arrivée dans $\{0, 1\}$:

$$f : \bigcup_{i=0}^{n+1} A_i \longrightarrow \{0, 1\}$$

Sont constante.

Soit donc f une telle fonction.

On sait que $\bigcup_{i=0}^n A_i$ est connexe. f restreinte à cet espace est donc constante.

On peut donc poser $a \in \{0, 1\}$ tel que :

$$\forall x \in \bigcup_{i=0}^n A_i, f(x) = a$$

Posons désormais :

$$A_{n+1} = \bigsqcup_{j \in J} C_{j,n+1}$$

Où chaque $C_{j,n+1}$ est une composante connexe par arcs de A_{n+1} avec ainsi J de cardinal fini dans cet exemple (on ne trace qu'un nombre fini de composantes à chaque génération).

Par construction de A , on a :

$$\forall j \in J, C_{j,n+1} \cap \bigcup_{i=0}^n A_i \neq \emptyset$$

On a donc deux espaces connexes dont l'intersection est non vide.

Ainsi :

$$\exists x_0 \in C_{j,n+1}, f(x_0) = a$$

Car en effet, on peut prendre $x_0 \in C_{j,n+1} \cap \bigcup_{i=0}^n A_i$ et on a donc f constante égale à a sur cet ensemble. D'où $f(x_0) = a$

Or on sait que $C_{j,n+1}$ est connexe.

On a donc f constante sur $C_{j,n+1}$ tout en sachant qu'elle prend la valeur a en un point de cet espace.

Ainsi :

$$f|_{C_{j,n+1}} = a$$

$j \in J$ étant arbitraire et J étant de cardinal fini, on a donc :

$$\forall j \in J, \forall x \in C_{j,n+1}, f(x) = a$$

D'où :

$$\forall x \in \bigcup_{j \in J} C_{j,n+1}, f(x) = a$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in A_{n+1}, f(x) = a$$

Puis :

$$\forall x \in \bigcup_{i=0}^{n+1} A_i, f(x) = a$$

C'est-à-dire que f est constante sur $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i$. La propriété étant vraie quelle que soit

$f \in \mathcal{C}\left(\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i, \{0, 1\}\right)$, on a finalement :

$$\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i \text{ connexe.}$$

L'hérédité est donc montrée.

On en déduit que \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que :

$$A \text{ est connexe.}$$

A étant l'espace total, il est donc fermé et surtout ouvert. On en déduit qu'il est également connexe par arcs (car connexe et ouvert). On peut alors toujours relier continûment deux points qui appartiennent à A .

On montre ensuite que A est simplement connexe.

Pour ce faire, on se propose de montrer A contractile.

Posons alors nos deux applications continues :

$$f : \begin{cases} A & \longrightarrow \{0\} \\ x & \longmapsto 0 \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \{0\} & \hookrightarrow A \\ 0 & \longmapsto 0_A \end{cases}$$

Où ici 0_A désigne le centre de notre Arbre.

On obtient :

$$f \circ g : \begin{cases} \{0\} & \longrightarrow \{0\} \\ 0 & \longmapsto 0 \end{cases}$$

Egale donc, à l'identité, et :

$$g \circ f : \begin{cases} A & \longrightarrow A \\ x & \longmapsto 0_A \end{cases}$$

Que l'on peut homotoper à l'identité par l'application :

$$H : \begin{cases} [0, 1] \times A & \longrightarrow A \\ (s, x) & \longmapsto \gamma_x(s) \end{cases}$$

Où γ_x est un chemin qui relie x à 0_A dans A . On a bien H continue et donc A possède le même type d'homotopie qu'un point. Notre Arbre est contractile.

On en déduit par notre corollaire sur ces espaces contractiles, que notre Arbre A est simplement connexe.

Ces résultats préliminaires étant vus, on peut faire désormais le lien entre A et notre espace du Huit X .

Pour cela on commence par orienter nos deux espaces :

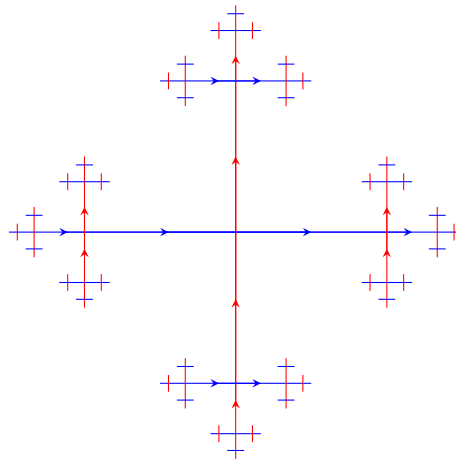


FIGURE 6.31 – l'Arbre A orienté

On n'a pas vraiment la place de le faire sur chaque arrête donc on le trace sur les plus grandes mais il faut bien imaginer que chaque arrête verticale est orientée du bas vers le haut, et que chaque arrête horizontale est orientée de gauche à droite.

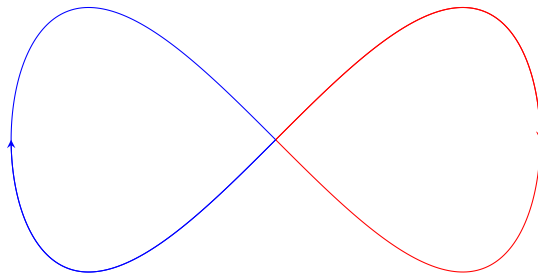


FIGURE 6.32 – Le Huit X orienté

Le but est désormais d'envoyer chaque arrête orientée sur l'une des deux boucles du Huit.

On opère ainsi :

Soit $x \in A$ un point dans l'arbre. Il appartient nécessairement à une arrête de longueur strictement positive.

On peut donc poser $x \in [a, b]$ où $[a, b]$ est une arrête verticale ou horizontale (formellement, $x \in \{c\} \times [a, b]$ ou $x \in [a, b] \times \{c\}$) avec $a < b$ et a, b deux points qui intersectent d'autres arrêtes.

On peut poser ensuite :

$$t_x = \frac{x - a}{b - a}$$

De telle sorte à avoir $t_x \in [0, 1]$ et :

$$x = (1 - t_x)a + t_x b$$

On peut finalement considérer l'application :

$$p : \begin{cases} A & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (\sin(2\pi t_x), \cos(2\pi t_x) \sin(2\pi t_x)) & \text{si } [a, b] \text{ est vertical} \\ (-\sin(2\pi t_x), -\cos(2\pi t_x) \sin(2\pi t_x)) & \text{si } [a, b] \text{ est horizontal} \end{cases} \end{cases}$$

De telle sorte à envoyer toute arrête verticale sur la boucle de droite et toute arrête horizontale sur la boucle de gauche.

Si x se situe au début (resp. à la fin) d'une arrête, alors nous aurons t_x petit (resp. grand) et donc $p(x)$ proche du centre du lemniscate.

Il faut imaginer que lorsque l'on se déplace sur le lemniscate et que nous arrivons au centre de ce dernier, nous avons quatre choix, faire demi-tour, aller tout droit, à droite ou à gauche.

On a correspondance avec l'arbre grâce à l'orientation (les flèches) et l'identification (les couleurs). En arrivant à une intersection d'arrêtes, on se retrouve face au même dilemme.

On se doute que p est un revêtement. Il nous faut pour le montrer considérer l'action qui, à un point donné sur l'arbre x , est capable de le déplacer sur n'importe quelle autre arrête de l'arbre avec le même t_x .

Il nous faut pour ce faire introduire un nouveau groupe. Le *groupe libre* L_2

Voici comment on le définit :

On se donne deux générateurs : a qui, à un point donné $x \in A$ lui associe le point qui possède le même t_x sur l'arrête horizontale la plus proche en suivant l'orientation des flèches ; et b qui, à un même point x , lui associe le point qui possède le même t_x sur l'arrête verticale la plus proche dans le sens des flèches.

On donne ci-dessous un exemple pour aider à la compréhension :

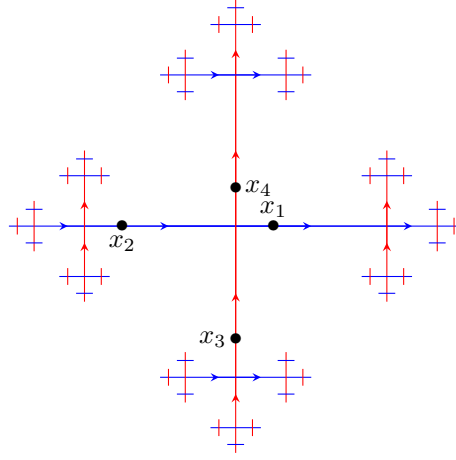


FIGURE 6.33 – Les applications a et b

Sur la figure précédente, on a avec la définition de a et b :

- $a(x_3) = x_1$, et $a(x_2) = x_1$
- $b(x_3) = x_4$, et $b(x_2) = x_4$

On pose L_2 le groupe libre sur \mathbb{Z} engendré par ces deux éléments :

$$L_2 = \left\{ \prod_{i=1}^n a^{\alpha_i} b^{\beta_i}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

Dit de manière plus explicite, les éléments de L_2 sont exactement les suites finies :

$$a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_n} b^{\beta_n}$$

On peut également commencer par b ou finir par a en autorisant α_1 ou β_n nul.

On interdit simplement les simplifications triviales (par exemple, avoir $\alpha_i = k$, $\beta_i = 0$ et $\alpha_{i+1} = -k$). Cela correspond sur l'arbre qu'il n'existe aucun élément de L_2 qui revient sur ses pas.

Ce groupe est appelé également *produit libre* et noté $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$. Nous garderons la notation L_2 ici.

Remarquons qu'on autorise dans ce groupe les éléments a^{-1} et b^{-1} qui nous permettent d'aller dans toutes les directions et pas seulement à droite et en haut (le cas de a et b).

On peut enfin considérer l'action :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L_2 \times A & \longrightarrow & A \\ \left(\prod_{i=1}^n a^{\alpha_i} b^{\beta_i}, x \right) & \longmapsto & \prod_{i=1}^n a^{\alpha_i} b^{\beta_i}(x) \end{array} \right.$$

Cette action est continue car est une isométrie (elle préserve la distance d), est-elle discrète ?

Pour le montrer, fixons $x \in X$ un point dans l'espace du Huit, et $g \in L_2$ un élément du groupe différent de l'identité : $g \neq I_d$

Pouvons-nous trouver un voisinage de x qui est "totalement déplacé" par ϕ_g ?

Le pire des cas serait que g ne soit composé que d'un seul de ces quatre éléments : a, b, a^{-1}, b^{-1} (si g est différente de l'identité, ces quatre éléments sont ceux qui "emmènent" le moins loin, pour la distance d , une image de son antécédent).

On sait que x appartient à une arête que l'on peut noter I . Si x est un point intérieur à cet arête, il nous suffit de considérer un voisinage de x totalement compris dans I (ce qui est possible si x est un point intérieur). Si x appartient à l'adhérence de notre arête I , alors il nous suffit de considérer un voisinage qui ne comprend aucune autre intersection que celle sur laquelle x est placée.

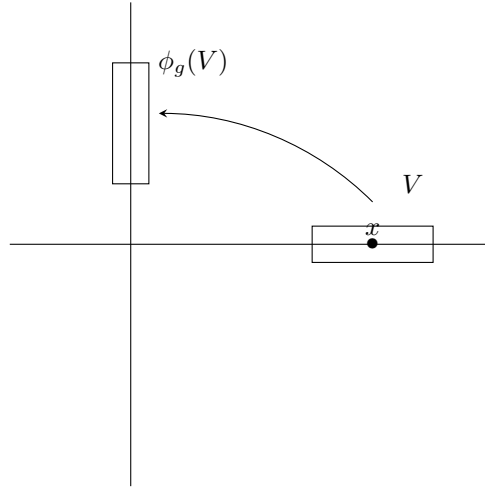


FIGURE 6.34 – Zoom sur un $x \in A$ et sur V son voisinage

De cette manière, ϕ_g mouvra tous les points du voisinage. En effet, on peut poser :

$$[c, d] \subset [a, b]$$

Où $[c, d] = V$

On obtiendra ainsi :

$$\phi_g(V) = [c', d']$$

Où $[c', d'] \subset [a', b']$ est inclus dans une autre arête que $[a, b]$ (car $g \neq I_d$) et puisque l'on a $[a, b] \cap [a', b'] = \emptyset$, on aura :

$$[c, d] \cap [c', d'] = \emptyset$$

Ce qui signifie exactement :

$$V \cap \phi_g(V) = \emptyset$$

Et nous retrouvons bien une action discrète.

On a également remarqué l'action continue, et on se rappelle qu'on a montré A connexe.

On peut alors utiliser le théorème de caractérisation des revêtements et :

$$p' : \begin{cases} A & \longrightarrow & A/L_2 \\ x & \longmapsto & \mathcal{O}_x \end{cases}$$

Est un revêtement. On remarque de plus que l'application :

$$p : \begin{cases} A & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (\sin(2\pi t_x), \cos(2\pi t_x) \sin(2\pi t_x)) & \text{si } [a, b] \text{ est vertical} \\ (-\sin(2\pi t_x), -\cos(2\pi t_x) \sin(2\pi t_x)) & \text{si } [a, b] \text{ est horizontal} \end{cases} \end{cases}$$

Associe, elle aussi, à chaque élément de A , son orbite dans A/L_2 , lui-même identifié à X . On a donc :

$$p' = p$$

Et on sait de plus que :

$$Aut_p(A) = L_2$$

On peut alors poursuivre. Montrons que ce revêtement p nous place en situation galoisienne.

Soit donc $x \in X$ un point sur l'espace du huit.

Soient z_1 et z_2 deux éléments de $p^{-1}(\{x\})$. On sait qu'on a :

$$t_{z_1} = t_{z_2}$$

On se questionne donc sur l'existence d'un unique élément de ψ de $Aut_p(A)$ (c'est-à-dire de L_2) tel que :

$$\psi(z_1) = z_2$$

z_1 et z_2 sont dans la même orbite. Par définition, il existe donc $g \in L_2$ vérifiant :

$$g \cdot z_1 = z_2$$

C'est-à-dire :

$$\phi_g(z_1) = z_2$$

Mais puisque L_2 s'identifie à $Aut_p(A)$, on a l'existence d'un élément $\psi \in Aut_p(A)$ tel que :

$$\psi(z_1) = z_2$$

Pour l'unicité, cela se complique. Commençons par prendre $g, g' \in L_2$ tels que :

$$g \cdot z_1 = z_2$$

$$g' \cdot z_1 = z_2$$

C'est-à-dire qu'on a deux "chemins" (ce ne sont pas des chemins au sens vu dans le chapitre 2) guidés par une succession de a^{α_i} et de b^{β_i} qui envoient tous les deux z_1 sur z_2 . On essaye de montrer que ces deux chemins sont les mêmes.

Cela vient du fait qu'on travaille sur un *arbre*. C'est-à-dire que si l'on munit A de la relation symétrique :

$$z \mathcal{R} z' \iff d(z, z') = 1$$

Alors quel que soit le couple de points $(x, y) \in A$, on peut les relier par un unique chemin (z_0, z_1, \dots, z_n) avec :

$$(z_0, z_n) = (x, y)$$

Et surtout :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z_i \mathcal{R} z_{i+1}$$

On l'illustre ci-dessous :

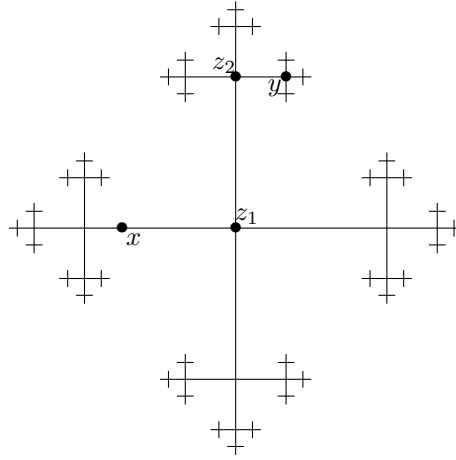


FIGURE 6.35 – A muni de \mathcal{R}

Ici on a bien x et y reliés par z_1 et z_2 . On se rend également compte que ce chemin est unique. Prendre une mauvaise arrête nous obligera, tôt ou tard, à faire demi-tour.

On se sert de ce fait pour montrer que $g = g'$. Si les deux "chemins" étaient différents mais amenaient au même point z_2 , alors au moins l'un des deux contiendrait un demi-tour; ce qu'on a expliqué impossible dans L_2 un peu plus tôt (on dit qu'on interdit les *opérations élémentaires* dans le groupe libre).

On a donc $g = g'$ et unicité de l'élément $\psi \in \text{Aut}_p(A)$ (identifié à L_2) qui vérifie :

$$\psi(z_1) = z_2$$

Notre revêtement p nous place donc en situation galoisienne.

On a de plus déjà montré que A était simplement connexe car contractile, on se retrouve donc avec le résultat suivant :

$$\pi_1(X) = \text{Aut}_p(A) = L_2$$

Ou de la même manière :

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$$

Le groupe fondamental de l'espace du Huit est donc le groupe libre engendré par deux éléments, basé sur \mathbb{Z} .

Références

On présente dans cet ultime chapitre quelques références qui ont à la fois inspiré et aidé à l'écriture de cet écrit, mais qui peuvent également servir d'ouverture au lecteur sur des sujets plus vastes. Je recommande vivement la lecture et la découvertes de ces nouveaux point de vues sur l'objet mathématique du groupe fondamental.

On retrouve les mêmes propositions qui vont un peu plus loin avec le *théorème de Van Kampen* dans [Aud04] qui présente également une panoplie d'exercices qui peuvent intéresser le lecteur. Une approche plus reliée à la définition du groupe fondamental qu'aux revêtement est présentée par [Lab08]. L'écrit [Lec13] nous introduit le même dernier exemple de l'espace du *Huit*, ainsi qu'à la définition du groupe libre. Finalement, un site bien construit sur ce thème du *Groupe Fondamental* nous est introduit ici : [dSG14]. On peut également citer [eJD17] qui permet et apprend à tracer des figures sur de tels écrits.

En espérant que le lecteur s'intéresse à ces écrits, je le remercie d'avoir lu jusqu'ici et espère sincèrement que le texte lui aura plu.

Bibliographie

- [Aud04] Michèle Audin. Topologie : Revêtements et groupe fondamental. 2004.
- [dSG14] Henri Paul de Saint Gervais. Ananlysis situs, 2014.
- [eJD17] Gérard Tisseau et Jacques Duma. *Tiks pour l'impatient*. 2017.
- [Lab08] François Labourie. Groupe fondamental et revêtements. 2008.
- [Lec13] Clément Lecomte. Groupe fondamental et homotopies. 2013.

FIGURES

Figure 6.9 :

<https://latexdraw.com/how-to-draw-a-torus-in-latex-using-tikz/>

Figure 6.12 :

[https://tex.stackexchange.com/questions/118563/
moebius-strip-using-tikz](https://tex.stackexchange.com/questions/118563/moebius-strip-using-tikz)

Figure 6.16 :

<https://pgfplots.net/klein-bottle/>

Figure 6.20 :

[https://tex.stackexchange.com/questions/77606/
making-a-labeled-klein-bottle-using-tikz-or-pgfplots](https://tex.stackexchange.com/questions/77606/making-a-labeled-klein-bottle-using-tikz-or-pgfplots)