Caractérisations des normes euclidiennes en dimension finie

Mathis Cavichioli dirigé par Guillaume Aubrun

Projet L3

1 Introduction et sommaire

L'objectif de ce texte est d'étudier différentes caractérisations connues des normes euclidiennes en dimension finie et d'en démontrer une nouvelle. Dans la suite, E désignera un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et $\|.\|$ sera une norme sur E. On rappelle que $\|.\|$ est euclidienne si et seulement si elle découle d'une produit scalaire (comme racine de la forme quadratique associée à ce dernier).
Le plan de ce texte sera le suivant :

1. Introduction
2. Caractérisation par l'identité du parallélogramme
3. Caractérisations géométriques et généralités
4. Une nouvelle caractérisation portant sur une condition sur les espaces où les endomorphismes atteignent leurs normes
5. Théorème de Kakutani et quelques propriétés sur les hyperplans

2 Caractérisation par l'identité du parallélogramme

Dans cette partie nous allons démontrer la caractérisation la plus classique du caractère euclidien d'une norme.

Théorème 1. *La norme $\|.\|$ est euclidienne si et seulement si elle satisfait l'identité du parallélogramme (P) : $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2), \forall x, y \in E$*

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Si $\|.\|$ est euclidienne alors par bilinéarité du produit scalaire associé nous avons les deux identités de polarisation. En les sommant, on retrouve bien l'identité du parallélogramme.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\|.\|$ satisfait (P), on veut trouver un produit scalaire Φ associé.

Analyse : Soit Φ un tel produit scalaire. Par bilinéarité on a forcément :

$$\forall x, y \in E : \phi(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

Ce qui revient par (P) à :

$$\forall x, y \in E : \phi(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} : (P)$$

Synthèse : Définissons ϕ par (1) et montrons qu'il s'agit bien d'un produit scalaire. Déjà ϕ est symétrique et définie positive. Reste à prouver sa bilinéarité. Montrons d'abord que $\forall x_1, x_2, y \in E : \phi(x_1 + x_2, y) = \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$:

On a par (1) pour tout $x_1, x_2, y \in E$:

$$\phi(x_1 + x_2, y) = \frac{\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2}{4}$$

$$\phi(x_1, y) + \phi(x_2, y) = \frac{\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \|x_2 - y\|^2}{4}$$

Or par (P) on a :

$$\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2)$$

$$\|x_1 - y\|^2 + \|x_2 - y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x_1 + x_2 - 2y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2)$$

D'où : $\phi(x_1, y) + \phi(x_2, y) = \frac{1}{8}(\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 - \|x_1 + x_2 - 2y\|^2)$. On veut alors faire apparaitre du $\|x_1 + x_2 + y\|^2$ à partir de $\|x_1 + x_2 + 2y\|^2$, il est donc naturel d'utiliser (P) :
$\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 = \|(x_1 + x_2 + y) + y\|^2 = 2(\|x_1 + x_2 + y\|^2 + \|y\|^2) - \|x_1 + x_2\|^2$
idem : $\|x_1 + x_2 - 2y\|^2 = 2(\|x_1 + x_2 - y\|^2 + \|y\|^2) - \|x_1 + x_2\|^2$
Ainsi :

$$\phi(x_1, y) + \phi(x_2, y) = \frac{1}{8}(\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 - \|x_1 + x_2 - 2y\|^2) = \frac{\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2}{4} = \phi(x_1 + x_2, y)$$

Montrons maintenant que pour $y \in E$ fixé, l'application $f_y : x \mapsto \phi(x, y)$ définie sur E est $\mathbb{R}$-linéaire :
Par ce qui précède, pour tout $u, v \in E$: $f_y(u + v) = f_y(u) + f_y(v)$. Ainsi par récurrence, pour tout $t \in \mathbb{N}$: $f_y(tu) = tf_y(u)$. Comme $f_y(-u) = -f_y(u)$ pour tout u, on généralise cela par:

$$\forall t \in \mathbb{Z} : f_y(tu) = tf_y(u)$$

Soit $t \in \mathbb{Q} : t = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$

Alors pour tout u : $f_y(tu) = pf_y(\frac{u}{q})$
or :
$$f_y(q\frac{p}{q}) = qf_y(\frac{p}{q}) = f_y(pu) = pf_y(u)$$

donc :
$$f_y(\frac{p}{q}u) = \frac{p}{q}f_y(u)$$

i.e.
$$\forall t \in \mathbb{Q} : f_y(tu) = tf_y(u)$$

Enfin par continuité de la norme, f est continue et donc par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:
$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in E : f_y(tu) = tf_y(u)$$

Quitte à fixer la première variable et recommencer, on a prouvé que ϕ est bilinéaire, ce qui conclut la preuve.

$\square$

Corollaire 1. *Un espace normé $(E, \|.\|)$ est euclidien si et seulement si tous ses sous-espaces vectoriels de dimension 2 le sont.*

En effet, cela est une conséquence de l'identité du parallélogramme appliquée à la famille engendrée par deux vecteurs libres.

3 Caractérisations géométriques et généralités

Dans cette partie, nous verrons deux nouvelles caractérisations du caractère euclidien d'une norme. La première est géométrique et permet de mieux visualiser le fait que les normes $\|.\|_p$ pour $p \neq 2$ sur $\mathbb{R}^n$ ne sont pas euclidiennes. La seconde sera utile pour la partie 4. Nous verrons également une propriété concernant les convexes, compacts, symétriques d'intérieur non vide que nous seront amenés à manipuler par la suite afin de mieux comprendre leur nature. Enfin, nous verrons le théorème de John Loewner et la notion d'espace polaire, dont un corollaire sera utile pour la partie 4.

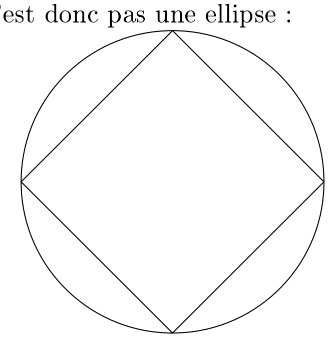
Théorème 2 (caractérisation géométrique)**.** *$\|.\|$ est euclidienne si et seulement si sa sphère unité S est le bord d'un ellipsoïde.*

Ici on dit que $\mathfrak{E}$ est un ellipsoïde si et seulement si il existe q une forme quadratique définie positive telle que: $\mathfrak{E} = \{x \in E : q(x) \leq 1\}$. On peut alors vérifier rapidement à l'aide du théorème spectral que l'équation associée dans la base canonique coïncide bien avec celle d'une ellipse.

Preuve : La preuve est pratiquement immédiate : En effet si $\|.\|$ est euclidienne alors $\|.\|^2$ est une forme quadratique définie positive qu'on peut noter q. Mais alors la boule unité de q est la même que celle de $\|.\|$ et c'est un ellipsoïde.

Réciproquement, si S est le bord d'un ellipsoïde, alors on a q une forme quadratique associée et alors la forme polaire de q est un produit scalaire dont $\|.\|$ découle. Car $\|.\|^2$ et q coïncide sur la sphère donc sont égales. Donc $\|.\|$ est euclidienne. $\square$

NB : Cela permet par exemple de constater sans effort que la norme $\|.\|_1$ n'est pas euclidienne. En effet, sa boule unité est un carré incliné de 45°, ce qui n'est donc pas une ellipse :



Théorème 3 (caractérisation par les isométries). *Pour $\|.\|$ norme sur $\mathbb{R}^n$, $\|.\|$ est euclidienne si et seulement si $Iso(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$*

Où $O_n(\mathbb{R})$ est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$ munit de sa structure euclidienne canonique et $Iso(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est le groupe des matrices qui conservent la norme $\|.\|$.

Preuve : Tout d'abord, remarquons que $Iso(\mathbb{R}^n, \|.\|) \leq GL_n(\mathbb{R})$. En effet, si $A \in Iso(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $\|Ax\| = \|x\|$. En particulier par séparation de la norme $\|.\|$, A est injective et donc bijective.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\|.\|$ est euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, on peut noter ϕ le produit scalaire associé et $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire canonique. On considère alors A la matrice symétrique définie positive associée à ϕ dans la base canonique. Dans la suite si x est un vecteur, X sera ses coordonnées dans la base canonique.
On considère alors B la matrice symétrique et définie positive donnée par la décomposition de Cholesky telle que $A = B^t B$.
Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$M \in Iso(\mathbb{R}^n, \|.\|) \iff \forall x \in \mathbb{R}^n : \|Mx\| = \|x\| \iff \forall x \in \mathbb{R}^n : \phi(Mx, Mx) = \phi(x, x)$$
$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^n : (MX)^t A(MX) = X^t AX \iff \forall x \in \mathbb{R}^n : X^t M^t B^t BMX = X^t B^t BX$$

Or $B \in GL_n(\mathbb{R})$ donc quitte à faire un changement de variable en $U = BX$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : X^t M^t B^t BMX = X^t B^t BX \iff \forall u \in \mathbb{R}^n : U^t B^{-t} M^t B^t BMB^{-1} U = U^t U$$

$$\iff B^{-1} M^t BBMB^{-1} = I_n \iff (BMB^{-1})^t (BMB^{-1}) = I_n \iff BMB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$$

Ainsi : $Iso(\mathbb{R}^n, \|.\|) = B^{-1}O_n(\mathbb{R})B$

$\boxed{\Leftarrow}$ Notons $G = Iso(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ et supposons que G est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$.

<u>Cas 1</u> : On suppose que $G = O_n(\mathbb{R})$.
On va montrer que $\|.\|$ est un multiple de $\|.\|_2$.
On va utiliser le fait que : $\forall x, y \in S_{\|.\|_2}(0,1), \exists T \in O_n(\mathbb{R}) : Tx = y$
(En effet si $x, y \in S_{\|.\|_2}(0,1)$ alors on peut compléter x et y en en une bases orthonormées (BON) de $\mathbb{R}^n$: $B_x = (x, e_2, e_3, ..., e_n)$ et $B_y = (y, f_2, f_3, ..., f_n)$. On considère alors la matrice T telle que: $Tx = y, Te_2 = f_2, ..., Te_n = f_n$. Alors, $T \in O_n(\mathbb{R})$ car T envoie une BON sur une BON)
Fixons $y \in S_{\|.\|_2}(0,1)$, pour $x \in S_{\|.\|_2}(0,1)$:
On a T donné par la propriété ci dessus et alors : $\|y\| = \|Tx\| = \|x\|$ car $G = O_n(\mathbb{R})$ et $\|y\|_2 = \|x\|_2 = 1$. Ainsi, on note $\lambda = \|y\|$ et alors : $\|x\| = \|y\| = \lambda = \lambda\|x\|_2$.
Ainsi :

$$\forall x \in S_{\|.\|_2}(0,1) : \|x\| = \lambda\|x\|_2$$

Par homogénéité de la norme on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \lambda\|x\|_2$.
Cela engendre que la norme $\|.\|$ est euclidienne car découle du produit scalaire $\lambda\langle .,. \rangle$.

<u>Cas 2</u>: On considère maintenant le cas général où $G = P_0 O_n(\mathbb{R}) P_0^{-1}$.
Cherchons $\|x\|'$ une norme telle que $P_0^{-1} G P_0 = Iso(\mathbb{R}^n, \|x\|')$.

$$M \in P_0^{-1} G P_0 \iff P_0 M P_0^{-1} \in G \iff \forall x \in \mathbb{R}^n, \|P_0 M P_0^{-1} X\| = \|x\|$$

En faisant le changement de variable $U = P_0^{-1} X$, cela équivaut à :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n : \|P_0 M U\| = \|P_0 U\|$$

On pose alors pour tout u dans $\mathbb{R}^n$ la norme $\|U\|' = \|P_0 U\|$.
Et alors on a :

$$M \in P_0^{-1} G P_0 \iff M \in Iso(\mathbb{R}^n, \|x\|')$$

Mais alors par le cas 1, $\|.\|'$ est euclidienne et en notant donc A la matrice symétrique définie positive associée on comprend que $\|.\|$ est euclidienne (car sa matrice associée est alors $P_0^{-t} A P_0^{-1}$ qui est bien symétrique définie positive).
$\square$

Théorème 4. *Soit $K \subset E$,*

K est convexe, compact, d'intérieur non vide et centré en 0 (i.e. $K = -K$) si et seulement si K est la boule unité d'une norme sur E.

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$ Vient de la définition de la norme.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $K \subset E$ un tel ensemble. On veut construire $f : E \to R^+$ une norme dont la boule unité est K. Posons pour tout $x \in E$, $I(x) = \{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$ et $f(x) = inf I(x)$.

Déjà, f est bien définie car pour tout $x \in E$, $I(x)$ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par 0 et non vide. En effet, 0 étant dans l'intérieur de K, on peut considérer $\delta > 0$ tel que $B(0,\delta)_{\|.\|_2} \subset K$, mais alors pour x dans E et λ assez grand: $\frac{\|x\|_2}{\lambda} < \delta$, et donc $\lambda \in I(x)$.

Remarquons que pour x dans E, $I(x)$ est fermé comme image réciproque de K par l'application continue $\psi_x : R_*^+ \to E, \lambda \to \frac{x}{\lambda}$.. De plus, comme K est convexe contenant 0, $I(x)$ est de la forme : $I(x) = [f(x); +\infty[$ si $f(x) > 0$ et $I(x) =]0; +\infty[$ sinon.

De plus :

$$x \in K \iff 1 \in I(x) \iff f(x) \leq 1$$

.

Donc si f est une norme, K sera bien sa boule unité. Montrons que f est bien une norme:

<u>Séparation</u> : Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0$, alors: $\forall \lambda > 0 : \lambda x \in K$. K étant compact $\|.\|_2$ est bornée sur K, prenons donc M un majorant:

$$\forall \lambda > 0 : \|\lambda x\|_2 \leq M \ .i.e. \ \forall \lambda > 0 : \lambda \|x\|_2 \leq M$$

.

Si jamais $x \neq 0$ alors on obtient une contradiction en faisant $\lambda \to \infty$ dans cette inégalité. D'où, $x = 0$.

<u>Homogénéité</u> : Soit $\alpha > 0, x \in \lambda K \iff \alpha x \in \alpha\lambda K$.

Donc $f(\alpha x) = \alpha x$

<u>Inégalité triangulaire</u> : Notons ici par commodité $f = \|.\|$. Soit $x \neq y$ dans E et $z = x + y$, on a :

$$\frac{z}{\|x\| + \|y\|} = \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}\frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|}\frac{y}{\|y\|}$$

On reconnait alors un barycentre d'éléments de K car $\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \in K$. Par convexité on en déduit que $\frac{z}{\|x\|+\|y\|} \in K$. Mais alors, $\|\frac{z}{\|x\|+\|y\|}\| \leq 1$ *i.e.* $\|z\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$\square$

Théorème 5 (John Loewner). *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors, il existe un unique ellipsoïde $\mathfrak{E}$ contenant K qui soit de volume minimal.*

Preuve : Soit K un tel compact. Quitte à opérer une translation, on peut considérer que 0 est dans l'intérieur de K. Intéressons nous d'abord au volume d'un ellipsoïde. Si $\mathfrak{E}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : X^t S X \leq 1\}$ est un ellipsoïde où S est symétrique définie positive. Alors S admet une racine carrée symétrique et on a :

$$x \in \mathfrak{E}(S) \iff X^t S X \leq 1 \iff S^{\frac{1}{2}} x \in B_{\|.\|_2}(0,1)$$

Ainsi un ellipsoïde est l'image de la boule unité euclidienne par une matrice définie positive.
Donc : $vol(\mathfrak{E}) = vol(S^{\frac{-1}{2}}B)$ où $B = B_{\|.\|_2}(0,1)$.
or :

$$vol(S^{\frac{-1}{2}}B) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{S^{\frac{-1}{2}}B}(x)d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(S^{\frac{1}{2}}x)d\lambda_n(x)$$

Ce qui donne par la formule du changement de variable en posant $u = S^{\frac{1}{2}}x$:

$$vol(S^{\frac{-1}{2}}B) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(u)|det(S^{\frac{-1}{2}})|d\lambda_n(x) = |det(S^{\frac{-1}{2}})|vol(B)$$

D'où:

$$vol(\mathfrak{E}(S)) = |det(S^{\frac{-1}{2}})|vol(B)$$

Le problème se ramène donc à une minimisation de la fonction $\phi(S) = det(S)^{\frac{-1}{2}}$ sous la contrainte $A = \{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) : K \subset \mathfrak{E}(S)\}$. On peut alors montrer l'existence de ce minimum par des arguments topologiques notamment par le théorème de Bolzano Weierstrass. L'unicité s'obtient ensuite par le fait que ϕ est strictement convexe. Les détails sont écrits dans la référence [2].

$\square$

<u>N.B</u> : On définit l'espace polaire d'un ensemble $B \subset \mathbb{R}^n$ par:

$$B^o = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall y \in B, \langle x, y\rangle \ \leq 1\}$$

On peut alors prouver les propriétés suivantes :

Propriété 1 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E est un ellipsoïde $\iff$ E^o est un ellipsoïde.

Propriété 2 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $vol(E)vol(E^o) = vol(B)^2$

Propriété 3 : Pour $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset E \iff E^o \subset K^o$

La propriété 3 se démontre immédiatement en utilisant la définition de l'espace polaire.
Montrons la propriété 1 :
Pour ce faire on utilise le lemme suivant :

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \forall K \subset \mathbb{R}^n, (AK)^o = A^{-t}K^o$$

Prouvons ce Lemme : Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} x \in (AK)^o &\iff \forall y \in AK : \langle x, y\rangle \ \leq 1 \iff \forall y \in K : \langle x, Ay\rangle \ \leq 1 \\ &\iff \forall y \in K : \langle A^t x, y\rangle \ \leq 1 \iff A^t x \in K^o \end{aligned}$$

D'où : $(AK)^o = A^{-t}K^o$.
Prouvons alors la propriété 1 : Soit E un ellipsoïde, on peut considérer A symétrique définie positive telle que $E = AB$ où B est la boule unité euclidienne. Et alors par le lemme comme A^{-1} est symétrique on a: $E^o = A^{-1}B^o$. Par Cauchy-Schwarz on constate que $B \subset B^o$. Donc par la propriété: $(B^o)^o \subset B^o$.
Or B étant convexe fermé contenant l'origine on a : $(B^o)^o = B$
Et donc $B = B^o$ *i.e.* $E^o = A^{-1}B$.
Ainsi, E^o est bien un ellipsoïde.
La propriété 2 s'obtient alors en utilisant le fait que $E^o = A^{-1}B$ et en reproduisant des manipulations intégrales identiques à celles de la preuve du théorème de John Loewner.

Ces considérations sur les espaces polaires permettent d'aboutir à une seconde version du théorème de John Loewner:

Théorème 6. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde $\mathfrak{E}$ contenu dans K qui soit de volume maximal.*

Preuve : Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un tel ensemble. Quitte à translater, on considère que 0 est dans l'intérieur de K. K^o est clairement convexe et compact, par continuité du produit scalaire. 0 appartient à l'intérieur de K^o car : $\forall y \in K : \langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$
Par compacité de K et continuité de la norme on peut considérer $\delta = min\{\frac{1}{\|y\|}, y \in K\}$ et alors: $\forall y \in K : \langle x, y\rangle \leq 1$ *i.e.* $B_{\|.\|_2}(0, \delta) \subset K^o$.
Par le Théorème de John Loewner il existe donc un unique ellipsoïde $\mathfrak{E}^o$ de volume minimal tel que $K^o \subset \mathfrak{E}^o$. Donc par la propriété 3 : $\mathfrak{E} \subset K$. Or $\mathfrak{E}$ est un ellipsoïde par la propriété 1 et est de volume maximale par la propriété 2. $\mathfrak{E}$ est alors bien unique par unicité de $\mathfrak{E}^o$.

□

Corollaire 2. *Tout sous-groupe compact G de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.*

Preuve : Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.
Posons :

$$K = \{g(u), g \in G, u \in B\}$$

Où B est la boule unité euclidienne.
Alors, K est un compact (image continue d'un compact) et d'intérieur non vide car contient B en prenant $g = id$. Donc par le Théorème de John Loewner, il existe un unique ellipsoïde $\mathfrak{E}_q$ de volume minimal contenant K et de forme quadratique q : $K \subset \mathfrak{E}_q$.
Or pour tout $g \in G : g(K) = K$ et $g(\mathfrak{E}_q) = \mathfrak{E}_{qg^{-1}}$.
Donc $K \subset \mathfrak{E}_{qg^{-1}}$ et $vol(\mathfrak{E}_{qg^{-1}}) = |det(g)|\, vol(\mathfrak{E}_q)$
Comme G est compact on sait que la suite $(g^n)_n$ admet une valeur d'adhérence dans G, c'est donc aussi le cas pour la suite géométrique $(det(g)^n)_n$ par continuité du déterminant. Cela impose que $|det(g)| = 1$ (car la suite ne peut avoir

comme valeur d'adhérence 0 comme la limite est dans G).
Ainsi, $vol(\mathfrak{E}_{qg^{-1}}) = vol(\mathfrak{E}_q)$ et par l'unicité de l'ellipsoïde de John Loewner: $\mathfrak{E}_{qg^{-1}} = \mathfrak{E}_q$. Comme l'ellipse caractérise la forme quadratique: $qg^{-1} = q$ (en effet, cela vient du fait que l'on peut trouver q à partir de $\mathfrak{E}_q$ car pour tout x tel que $q(x) \neq 0$: $Max\{|\lambda| : \lambda x \in \mathfrak{E}_q\} = \frac{1}{\sqrt{q(x)}}$). Et donc, $g^{-1} \in Iso(q)$ *i.e.* $g \in Iso(q)$.
Or, pour toute matrice B en notant A la matrice définie positive associée à q de décomposition de Cholesky $A = P^tP$:

$$B \in Iso(q) \iff \forall x : x^t B^t Abx = x^t Ax \iff B^t AB = A$$

$$\iff (PB)^t PB = P^t P \iff (PBP^{-1})PBP^{-1} = I_n \iff B \in P^{-1}O_n(\mathbb{R})P$$

Donc :

$$Iso(q) = P^{-1}O_n(\mathbb{R})P$$

Ainsi, on a montré que : $\forall g \in G : g \in P^{-1}O_n(\mathbb{R})P$
PGP^{-1} est donc un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

□

4 Caractérisation liée à l'espace où les endomorphismes atteignent leurs normes

Dans cette partie on veut démontrer une nouvelle caractérisation du caractère euclidien d'une norme portant sur le fait que les sous-espaces où les endomorphismes atteignent leurs normes sont des espaces vectoriels. L'objectif est donc de prouver le théorème suivant:

Théorème 7 (♣). *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. $\|.\|$ est euclidienne si et seulement si pour tout endomorphisme $\phi \in L(E)$, $S_\phi := \{x \in E : \|\phi(x)\| = \|\phi\|_{sub}\|x\|\}$ est un sous espace vectoriel de E.*

Ici $\|.\|_{sub}$ désigne la norme subordonnée à $\|.\|$ Pour démontrer ♣ nous aurons besoin d'une propriété supplémentaire et d'un lemme. Ce lemme sera admis dans un premier temps pour montrer ♣, puis des éléments de preuves de ce dernier seront donnés.

Propriété 1. *Soit H un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$:*

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists P \in S_n^{++}(\mathbb{R}) : AP \subset H \Rightarrow H = O_n(\mathbb{R})$$

Preuve : Soit H sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ tel que:

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}) : \exists P \in S_n^{++}(\mathbb{R}) : AP \subset H$$

Par une conséquence de la décomposition polaire (elle-même issue de Gramm Schmidt), on sait que l'application :

$$\psi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$$

$$(O,T) \to OT$$

est une bijection.
De plus par l'hypothèse :

$$\chi : H \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$$
$$(O,T) \to OT$$

est surjective.
Donc forcément $H \times S_n^{++}(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ car s'il existait $(O,T) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++} - H \times S_n^{++}$ alors $\psi(O,T)$ n'aurait pas d'antécédent dans H $\times S_n^{++}$ ce qui contredit la surjectivité de χ.
D'où : $H = O_n(\mathbb{R})$

$\square$

Lemme 1 (♠). *Soient K, L des convexes, compacts, symétriques, d'intérieurs non vides de $\mathbb{R}^n$. Soit $P := argmax\{det(P) | PK \subset L \ , P \in S_n^{++}(\mathbb{R})\}$.*
Alors :

$$Vect\{\partial L \cap PK\} = \mathbb{R}^n$$

NB: Dans cet énoncé, on peut comprendre PK comme l'image linéaire de K qui a un volume maximal sous la contrainte $PK \subset L$. Ainsi, $\partial L \cap PK$ correspond aux points de contact entre cette image linéaire de K et ∂L. Le lemme semble alors intuitif géométriquement puisqu'il consiste à dire que si PK est de volume maximal dans L, alors les points de contact sont suffisamment nombreux pour engendrer $\mathbb{R}^n$. En effet, si les points de contact n'engendraient pas $\mathbb{R}^n$, heuristiquement, on pourrait dilater PK dans une direction sans points de contact (en multipliant par une bonne matrice dans S_n^{++}) pour avoir un volume plus grand tout en restant dans K.

Preuve de ♣ : $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\|.\|$ euclidienne, soit $\phi \in L(E)$ et $S_\phi := \{x \in E : \|\phi(x)\| = \alpha\|x\|\}$ où $\alpha = \|\phi\|_{sub}$.
Montrons que S_ϕ est un espace vectoriel :
$\to 0 \in S_\phi$
$\to$ Soit $x \in S_\phi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par homogénéité de la norme : $\|\phi(\lambda x)\| = \alpha\|\lambda x\|$ *i.e.* $\lambda x \in S_\phi$
$\to$ Soit $x, y \in S_\phi$, l'identité du parallélogramme appliquée à $(\phi(x), \phi(y))$ donne la norme étant euclidienne :

$$\|\phi(x) + \phi(y)\|^2 + \|\phi(x) - \phi(y)\|^2 = 2(\|\phi(x)\|^2 + \|\phi(y)\|^2) = 2\alpha^2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Donc par l'identité du parallélogramme à (x, y) :

$$\|\phi(x) + \phi(y)\|^2 + \|\phi(x) - \phi(y)\|^2 = \alpha^2(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2)$$

Pour que S_ϕ soit un espace vectoriel on voudrait que $\|\phi(x + y)\| = \alpha\|x + y\|$, montrons le :

$$(1) : \|\phi(x + y)\|^2 = \alpha^2(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) - \|\phi(x - y)\|^2$$

Or par la définition de la norme subordonnée : $\|\phi(x-y)\|^2 \leq \alpha^2\|x-y\|^2$
et donc par (1):

$$\|\phi(x+y)\|^2 \geq \alpha^2\|x+y\|^2$$

Ainsi, comme $\|\phi(x+y)\|^2 \leq \alpha^2\|x+y\|^2$, on conclut que: $\|\phi(x+y)\| = \alpha\|x+y\|$ *i.e.* $x+y \in S_\phi$.
NB : Ici l'idée d'utiliser l'identité du parallélogramme vient de la première partie. En effet, on sait qu'appliquer cette dernière ne nous fait perdre aucune information et toutes les inégalités écrites plus haut sont en réalités des égalités. L'inégalité de Cauchy Schwarz ne permettrait pas de conclusion ici.

$\boxed{\Leftarrow}$
Supposons que pour tout endomorphisme $\phi \in L(E)$, $S_\phi := \{x \in E : \|\phi(x)\| = \|\phi\|_{sub}\|x\|\}$ est un sous espace vectoriel de E.
Etape 1 : Montrons que : $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists P \in S_n(\mathbb{R})^{++} : PA \in Isom(\mathbb{R}^n, \|.\|)$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $P_0 = argmax\{det(P), P \in S_n(\mathbb{R})^+, \|PA\|_{sub} \leq 1\}$.
Remarquons déjà que $P_0 = argmax\{det(P), P \in S_n(\mathbb{R})^{++}, \|PA\|_{sub} = 1\}$.
En effet, si $\|P_0A\|_{sub} < 1$ alors on peut considérer $\phi = \frac{1}{\|P_0A\|_{sub}}P_0$ tel que $det(\phi) = \frac{1}{\|P_0A\|_{sub}}det(P_0) > det(P_0)$ ce qui contredit la définition de P_0.
De plus, forcément $P_0 \in S_n(\mathbb{R})^{++}$ car on maximise le déterminant.
Démontrons que ce P_0 est bien définie :
Posons $V = \{P \in S_n(\mathbb{R})^+ : \|PA\|_{sub} = 1\}$.
Alors V est fermé dans $(M_n(\mathbb{R}), \|.\|_{sub})$ car $V = S_n(\mathbb{R})^+ \cap W$ avec $W = \{P \in M_n(\mathbb{R}) : \|PA\|_{sub} = 1\}$ fermé comme image réciproque continue d'un fermé et car $S_n(\mathbb{R})^+$ est fermé .
De plus V est borné car pour $P \in V$ et $x \in \mathbb{R}^n$: $\|PAx\| \leq \|x\|$
A étant inversible donc : $\forall y \in \mathbb{R}^n : \|Py\| \leq \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\|_{sub}\|y\|$
donc $\|P\|_{sub} \leq \|A^{-1}\|_{sub}$.
Ainsi $M_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, V est compact et par continuité du déterminant on conclut que P_0 existe bien.
Notons que:

$$\|PA\|_{sub} \leq 1 \iff PAB \subset B$$

Où B est la boule unité fermée pour $\|.\|$. Ainsi :

$$P_0 = argmax\{det(P), P \in S_n(\mathbb{R})^+, PAB \subset B\}$$

Or, AB et B sont connexes, compacts symétriques et d'intérieurs non vide de $\mathbb{R}^n$. Donc par le lemme ♠ :

$$Vect\{\partial B \cap PAB\} = \mathbb{R}^n$$

Soit $M = P_0A$, montrons que M est une isométrie :

Déjà $Vect\{\partial B \cap MB\} = \mathbb{R}^n$ et par hypothèse M étant un endomorphisme, elle atteint sa norme sur un espace vectoriel $S_M = \{x \in E : \|Mx\| = \| M\|_{sub}\|x\|\}$. De plus, par ce qui précède, M est de norme 1. Donc montrer que c'est une isométrie revient à prouver que :

$$S_M = \mathbb{R}^n$$

Remarquons que :

$$\partial B \cap MB \subset M\partial B \cap \partial B \subset MS_M \cap \partial B \subset MS_M$$

En effet, si $x \in \partial B \cap MB$ alors $\|x\| = 1$ et $x = My$ avec $\|y\| \leq 1$. Or $\|M\|_{sub} = 1$, donc $1 = \|x\| \leq \|y\|$ et par double inégalité: $\|y\| = 1$. Ce qui prouve la première inclusion. Maintenant si $x \in M\partial B \cap \partial B$ alors $\|x\| = 1$ et $x = My$ avec $\|y\| = 1$. On a de la même façon $\|My\| = \|y\|$ i.e. $y \in S_M$. Ce qui prouve la deuxième inclusion.
Mais alors, par double inclusion et MS_M étant un espace vectoriel:

$$Vect\{MS_M\} = MS_M = \mathbb{R}^n$$

Donc M étant inversible:

$$S_M = \mathbb{R}^n$$

i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|Mx\| = \|x\|$ *i.e.* $M \in Isom(\mathbb{R}^n, \|.\|)$. Ce qui achève la première étape.
Etape 2 : Montrons que $\|.\|$ est euclidienne en utilisant la caractérisation par les isométries de la partie 3:
On veut montrer que $Isom(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$.
Posons $G = Isom(\mathbb{R}^n, \|.\|)$. Alors G est fermé par continuité de la norme et du produit matriciel ainsi que borné car si $M \in G$ alors $\|M\|_{sub} = 1$.
Ainsi, G est un compact de $GL_n(\mathbb{R})$.Par le corollaire du théorème de John Loewner énoncé en partie 3, on sait alors que G est conjugué à un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$. On a donc $P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que : $P_0 G P_0^{-1} \leq O_n(\mathbb{R})$
On veut montrer que :

$$H := P_0 G P_0^{-1} = O_n(\mathbb{R})$$

Pour ce faire, on va utiliser la propriété vue ci-dessus dans cette partie.
Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ par l'Etape 1 on sait qu'il existe $P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que :

$$AP \in G$$

i.e.

$$P_0 A P P_0^{-1} \in P_0 G P_0^{-1} = H.$$

i.e.

$$P_0 A P_0^t P_0^{-t} P P_0^{-1} \in H$$

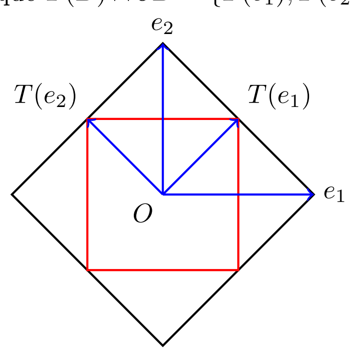
(En effet, G étant un groupe il est possible de passer à l'inverse dans le résultat de l'étape 1. Ce qui permet le permuter A et P dans le produit).
Or $P_0AP_0^t$ est inversible, donc en prenant $U = P_0AP_0^t$, on a :

$$\forall U \in GL_n(\mathbb{R}), \exists P \in S_n^{++} : UP_0^{-t}PP_0^{-1} \in H$$

Or, $P_0^{-t}PP_0^{-1} \in S_n^{++}$ pour tout $P \in S_n^{++}$.
Par la propriété on conclut donc que $H := P_0GP_0^{-1} = O_n(\mathbb{R})$. Ce qui prouve que G est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$ et donc que $\|.\|$ est euclidienne.

$\square$

Exemple : Considérons $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ et montrons par ce théorème qu'elle n'est pas euclidienne. Considérons T un endomorphisme définit comme sur la figure ci-contre. On comprend alors comme $\|T(e_1)\|_1 = \|T(e_2)\|_1 = 1$ que $|||T|||_1 = 1$ et que $T(B) \cap \partial B = \{T(e_1), T(e_2), -T(e_1), -T(e_2)\}$.



Mais alors :

$$S_T = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|T(x)\|_1 = \|x\|_1\} = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : \|T(\frac{x}{\|x\|_1})\|_1 = 1\}$$

$$= \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{\|x\|_1} \in T(B) \cap \partial B\}$$

Il est alors clair que S_T n'est pas un espace vectoriel et donc que $\|.\|_1$ n'est pas euclidienne par le théorème ♣ .

NB : On peut noter que dans le cas ou $\|.\|$ est euclidienne. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors il existe ϕ un endomorphisme tel que $F = S_\phi$. En effet, il suffit de prendre ϕ la projection orthogonale sur F.

Donnons maintenant des éléments de preuves du Lemme ♠. Pour ce faire nous avons besoins du théorème suivant :

Théorème 8. *Soit K, L des convexes, compacts, symétriques, d'intérieurs non vides contenant 0. Soit $P := argmax\{det(P)|PK \subset L\}$.*
On dit alors que PK est en position de John dans L dans le sens ou $PK \subseteq L$

et PK a le volume maximal parmi toutes les images positives de K contenues dans L.
il existe alors des pairs de contacts $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m)$ de K' et L et $c_1, ..., c_m$ tel que :

$$(i) : 0 = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i$$

$$(ii) : I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i \otimes y_i + y_i \otimes x_i)$$

Où on dit que (x_1, y_1) est une paire de contact de PK et L lorsque x_1 est un point de contact de PK et de L et y_1 est tel que l'hyperplan tangent à PK (et L) en x_1 est $H_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, y_1 \rangle = 1\}$. $x_i \otimes y_i$ désigne ici la matrice de rang 1 définie par: $x_i y_i^t$

Preuve : Ce théorème a été prouvé dans la référence [4] en s'appuyant sur une extension du théorème des extremas liés démontrée dans la référence [5].
On remarquera quand dans notre cas comme on considère de plus que K et L sont symétriques, la propriété (i) est automatiques par symétrie des points de contacts.

□

Preuve de ♠ : Soient K, L des connexes, compacts, symétriques, d'intérieurs non vides de $\mathbb{R}^n$. Soit $P := argmax\{det(P) | PK \subset L\}$.
Montrons que:

$$Vect\{\partial L \cap PK\} = \mathbb{R}^n$$

On comprend que PK est en position de John dans L.
Ainsi, il existe $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m)$ de PK et L et $c_1, ..., c_m$ tel que :

$$(ii) : I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i \otimes y_i + y_i \otimes x_i)$$

Soit $\mathcal{P} = PK \cap \partial L = \{x_i\}_i$ l'ensemble des points de contacts de PK et de L.
Supposons un instant que $H := Vect(\mathcal{P}) \subsetneq \mathbb{R}^n$:
Alors, H étant un espace vectoriel on a $H^\perp \oplus H = \mathbb{R}^n$, avec $H^\perp$ non nul. Cela permet de prendre $y \in H^\perp - \{0\}$. On multiplie à droite par y écrit dans la base canonique dans (ii) et alors :

$$y = \sum_{1}^{m} c_i (x_i y_i^t y + y_i x_i^t y)$$

Or par construction de y : $\forall i \leq m : x_i^t y = 0$
Donc :

$$y = \sum_{1}^{m} c_i x_i \langle y, y_i \rangle \in H$$

Donc $y \in H^{\perp} \cap H$ d'où : $y = 0$: Absurde

$\square$

5 Théorème de Kakutani, énoncé et quelques propriétés sur les hyperplans

Dans cette partie nous allons énoncer le théorème de Kakutani qui est une caractérisation du caractère euclidien portant sur les sous espaces de dimension 2. Nous verrons ensuite une version faible du théorème de Hahn Banach permettant de mieux comprendre pourquoi la condition de Kakutani ne concerne pas les sous-espaces de dimension 1. Ensuite, nous verrons des remarques utiles afin d'élaborer une preuve du théorème de Kakutani à partir de la référence [6].

Théorème 9 (Kakutani)**.** *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension au moins 3. Si tout F sous espace vectoriel de E de dimension 2 admet un projecteur de norme subordonnée à $\|.\|$ inférieure ou égale à 1 alors $\|.\|$ est euclidienne.*

Lemme 2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie, $C \subset E$ un convexe, compact, non vide. Alors si $y \notin C$ il existe $f \in E^*$ tel que :*

$$f(y) > max\{f(z), z \in C\}$$

.

Preuve du lemme 2 : Posons :

$$\begin{aligned} \phi : E &\to \mathbb{R} \\ x &\to \langle y - p(y), x \rangle \end{aligned}$$

où p est l'unique projection orthogonale sur le convexe, compact, non vide C et où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire canonique sur E.
Alors ϕ est linéaire donc continue car $dim(E) < \infty$
Soit $x \in C$, par l'inégalité des angles obtus nous avons :

$$\begin{aligned} & \langle y - p(y), x - p(y) \rangle \leq 0 \\ \iff & \langle y - p(y), x \rangle - \langle y - p(y), p(y) \rangle \leq 0 \\ \iff & \phi(x) \leq \phi(p(y)) \end{aligned}$$

De plus nous avons : $\phi(y) - \phi(p(y)) = \langle y - p(y), y - p(y) \rangle = \|y - p(y)\|^2 > 0$ car $y \notin C$.
Ainsi :

$$\forall x \in C : \phi(y) > \phi(x)$$

$i.e$ C étant compact et ϕ étant continue :

$$\phi(y) > max\{\phi(x), x \in C\}.$$

$\square$

Théorème 10 (Version faible de Hahn-Banach)**.** *Soit*$(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie,* $C \subset E$ *un convexe, compact, non vide et* $x \in \partial C$*. Alors il existe* H *un hyperplan affine tel que* $x \in H$ *et* $H \cap int(C) = \emptyset$*. En terme de forme linéaire cela revient à dire qu'il existe* $f \in E^*, f \neq 0$ *tel que :*

$$\forall y \in int(C) : f(x) \geq f(y)$$

<u>NB</u> : Géométriquement H est l'hyperplan tangent à C passant par x.

Preuve de la version faible de Hahn-Banach : Par hypothèse $x \in \overline{C} - Int(C)$. Considérons donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E - C)^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to x$ Alors par le théorème précédant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in E^*$ tel que:

$$f_n(x_n) > max\{f_n(y), y \in C\}$$

. Par le théorème de Riesz, il existe pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un vecteur $u_n \in E$ tel que : $f_n = \langle u_n, . \rangle$. Et alors :

$$\forall y \in C : \langle u_n, x_n \rangle > \langle u_n, y \rangle$$

i.e

$$\forall y \in C : \langle \frac{u_n}{\|u_n\|}, x_n \rangle > \langle \frac{u_n}{\|u_n\|}, y \rangle$$

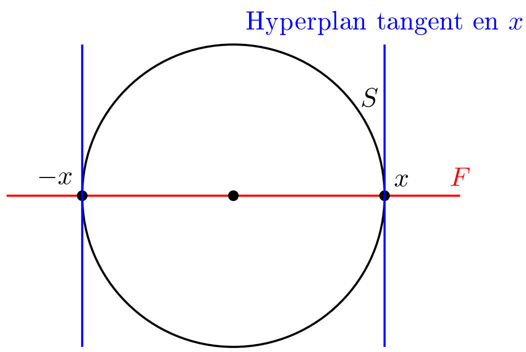
. Ainsi quitte à prendre $u_n \leftarrow \frac{u_n}{\|u_n\|}$ on peut prendre $u_n \in S_{\|.\|_2}(0,1)$. Mais alors comme $dim(E) < \infty$, $S_{\|.\|_2}(0,1)$ est compact, il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que : $u_{\psi(n)} \to u \in S_{\|.\|_2}(0,1)$.
Mais alors : $x_{\psi(n)} \to x$ et par continuité du produit scalaire :

$$\forall y \in C : \langle u, x \rangle \geq \langle u, y \rangle$$

Ainsi, $\phi := \langle u, . \rangle$ donne la forme linéaire cherchée. [Car $C = \overline{Int(C)}$]

□

<u>Application à Kakutani :</u>
Cette version faible de Hanh-Banach permet de comprendre pourquoi dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie pour tout sous-espace vectoriel F de dimension 1 il existe sur ce dernier une projection de norme inférieure à 1. Ce qui permet de comprendre pourquoi la condition de Kakutani porte au moins sur les sous espaces vectoriels de dimension 2 (sinon toutes les normes seraient euclidiennes).
En effet :
Considérons $S := S_{\|.\|}(0,1)$ la sphère unité de E et B la boule unité fermée associée.



Comme F est de dimension 1, il existe $x \in F \cap S$ et par symétrie de S : $-x \in F \cap S$.
Par le théorème précédant, il existe $f \in E^*$ tel que: $\forall y \in Int(B) : f(x) \geq f(y)$
Quitte à changer f en un de ses multiples prenons $f(x) = 1$.
Alors $H := \{w : f(w) = 1\}$ est un plan affine.
Posons pour tout $y \in E$, $p(y) = f(y)x$.
Alors pour tout $y \in E$:

$$p(y) \in F$$

et :

$$p(p(y)) = f(f(y)x)x = f(y)f(x)x = p(y)$$

Donc p est un projecteur sur F.
De plus si $\|y\| \leq 1$ et si $f(y) = f(x) - \epsilon \quad (\epsilon \geq 0)$:

$$p(y) = f(y)x = (f(x) - \epsilon)x = (1 - \epsilon)x$$

Donc quitte à prendre $-x$ au lieux de x on a $(1 - \epsilon) \geq 0$ et :

$$\|p(y)\| = \|(1 - \epsilon)x\| = (1 - \epsilon)\|x\| \leq \|x\|$$

D'où : $\|p\|_{sub} \leq 1$.
p est donc bien un projecteur sur F de norme inférieure à 1.

Dans la suite nous allons voir des théorèmes qui vont nous permettre de fournir une preuve du théorème de Kakutani :

Théorème 11 (Caractérisation par le dual)**.** *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors* $\|.\|$ *est euclidienne si et seulement si* $\|.\|_{sub}$ *est euclidienne sur* E^**.*

Ici, $\|.\|_{sub}$ est la norme subordonnée à $\|.\|$.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Si $\|.\|$ est euclidienne alors si $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée (BON) de E. On note $(e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale associée.
Définissons : $\phi : E^* \times E^* \to \mathbb{R}$ bilinéaire tel que:

$$\forall i, j : \phi(e_i^*, e_j^*) = \langle e_i, e_j \rangle$$

Alors ϕ est un produit scalaire sur E^*.
Reste à prouver que pour tout $f \in E^*$: $\|f\|_{sub}^2 = \phi(f, f)$:
Pour tout $f \in E^*$ fixé :

$$\|f\|_{sub}^2 = \phi(f, f) \iff \phi(\sum_i f(e_i)e_i^*, \sum_i f(e_i)e_i^*) = \|f\|_{sub}^2$$

$$\iff \sum_i \sum_j f(e_i)f(e_j)\langle e_i, e_j\rangle = \|f\|_{sub}^2$$

$$\iff \sum_i f(e_i)^2 = \|f\|_{sub}^2$$

Or, cette dernière égalité est vraie car si $\|x\| = 1$ en écrivant les vecteur dans la base $(e_1, ..., e_n)$ et en appliquant Cauchy-Schwarz :

$$|f(x)| = |\sum_i f(e_i)x_i| = \langle\sum_i f(e_i)e_i, \sum_i x_ie_i\rangle \leq \sqrt{\sum_i f(e_i)^2}\,\|x\| = \sqrt{\sum_i f(e_i)^2}$$

Ainsi :

$$\|f\|_{sub}^2 \leq \sum_i f(e_i)^2$$

Le sup étant atteint pour $x = \frac{\sum_i f(e_i)}{||\sum_i f(e_i)||}$ on conclut que:

$$\|f\|_{sub}^2 = \sum_i f(e_i)^2$$

.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\|.\|_{sub}$ est euclidienne sur E^*.
Alors par la première implication E^{**} est euclidien.
Mais l'isomorphisme canonique de E dans E^{**} est bijective et isométrique. En effet, notons ψ cet isomorphisme :

$$\psi : E \to E^{**}$$

$$x \to \hat{x} : f \to f(x)$$

Alors on comprend que pour tout $x \in E$: $\|x\| = \|\hat{x}\|_{**}$, ou $\|.\|_{**}$ est la norme naturelle sur E^{**}.
En effet soit $x \in E$: Alors pour tout $f \in E^*$ tel que $\|f\|_{sub} \leq 1$: : $f(x) \leq \|x\|$.
D'où, par passage au sup :

$$\|\hat{x}\|_{**} \leq \|x\|$$

Pour terminer on constate que le théorème de Hahn-Banach fournit une forme linéaire f tel que : $f(x) = \|x\|$ et $\|f\|_{sub} = 1$.
Ce qui donne l'égalité car le sup est atteint en f. Ainsi, cela implique que $(E, \|.\|)$ est euclidien.

$\square$

Théorème 12. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel euclidien.*
Tout sous-espace vectoriel F *de* E *est l'image d'un projecteur de norme inférieure à 1 si et seulement si tout sous espace vectoriel* F^* *de* E^* *est le noyau d'un projecteur de norme inférieure ou égale à 1.*

Ici si p est un projecteur de E, sa norme est la norme subordonnée à $\|.\|$. Si p^* est un projecteur sur de E^*, sa norme est $\|p^*\|_* = sup\{\|p^*(f)\|', \|f\|' \leq 1\}$ où pour $f \in E^* : \|f\|' = sup\{|f(x)|, \|x\| \leq 1\}$.

Preuve : Pour prouver ce théorème nous devons introduire la notion d'ensemble annihilateur.
Pour F un sous espace vectoriel de E on définit son annihilateur par :

$$F^\perp = \{f \in E^* : f|_F = 0\}$$

<u>ATTENTION :</u> Ici on ne considère pas de structure euclidienne, cette notation est utile car permet d'intuiter certaines propriétés.

Pour $p \in L(E)$ un projecteur de E on définit $p^t \in L(E^*)$ par:

$$p^t : E^* \to E^*$$

$$f \to f \circ p$$

Nous avons alors 5 propriétés utiles pour la preuve : Soit $p \in L(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E :

1. p est un projecteur de E si et seulement si p^t est un projecteur de E^*.
2. $\|p\|_{sub} \leq 1 \iff \|p^t\|_* \leq 1$
3. $ker(p)^\perp = Im\ p^t$
4. $Im(p)^\perp = ker\ p^t$
5. $(F^\perp)^\perp = F$ avec la considération par isomorphisme $E^{**} = E$.

Les preuves de ces propriétés sont laissées au lecteur. Pour la 3 et la 4 on pourra montrer une première inclusion et conclure par un argument de dimension. Pour la dernière on fera l'inclusion $\supseteq$ avec l'isomorphisme entre E^{**} et E donné par les crochets de dualité puis on conclura par dimension.
Prouvons alors le théorème :

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit F sous espace vectoriel de E. Alors $F^\perp$ est un sous espace vectoriel de E^*. Ainsi $F^\perp$ est le noyau d'un projecteur de norme 1 que l'on note p^t.

$$F^\perp = ker\ p^t$$

On peut alors considérer $p \in L(E)$ la transposée de p^t. C'est alors par la propriété 1 un projecteur de norme subordonnée inférieur à 1. De plus :

$$Im(p)^\perp = ker\ p^t$$

Donc par 5 :

$$Im(p) = ker(\ p^t)^\perp = (F^\perp)^\perp = F$$

Donc F est l'image d'un projecteur de norme 1.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit F^* un sous espace vectoriel de E^*. On se donne $(e_1^*, ..., e_p^*)$ une base de F^* que l'on complète en $(e_1^*, ..., e_n^*)$ base de E^*.
Alors pour $f \in E^*$:

$$f \in F^* \iff \forall i \geq p+1, f(e_i) = 0 \iff f|_{Vect(e_{p+1},...,e_n)} = 0$$

Posons donc $F = Vect(e_{p+1}, ..., e_n)$ pour avoir : $F^* = F^\perp$
Mais alors, F est l'image d'un projecteur p de norme inférieure à 1. Alors p^t est un projecteur de norme inférieure à 1 et:

$$Im\ p^\perp = F^\perp$$

Donc :

$$F^\perp = F^* = ker\ p^t$$

□

Théorème 13 (Kakutani version noyaux)**.** *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $d \geq 3$.*
Soit C un convexe, compact de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:
(i) C est un ellipsoïde
(ii) Pour toute droite vectorielle L, il existe un hyperplan H tel que :

$$C + L = C \cap H + L$$

Preuve : Ce théorème a été démontré dans la référence [6]. □

Propriété 2. *Soient $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$,C la boule unité associée et L une droite vectorielle.*
Il existe H un hyperplan supplémentaire de L, tel que $C + L = C \cap H + L$ si et seulement si il existe p un projecteur de noyau L de ne norme inférieure à 1.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Soit p un projecteur d'image H et de noyau L. On va montrer que p est de norme inférieure à 1.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$:
On peut décomposer x en : $x = \alpha l + y$ où $y \in H$, $l \in L - \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
Alors:

$$y = p(x) = x - \alpha l \in C + L = C \cap H + L$$

Donc il existe $u \in C \cap H$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que: $y = u + \beta l$
Donc : $p(y) = u = y$ d'où $y \in C \cap H$ *i.e.* $y \in C$.
D'où :

$$\|p(x)\| = \|y\| \leq 1$$

.

$\boxed{\Leftarrow}$ On considère ici $H := Im\ p$. H est bien un hyperplan par le théorème du rang. On vérifie alors que H convient. □

Preuve du théorème de Kakutani : On comprend qu'il suffit de démontrer Kakutani dans le cas d'un espace vectoriel de dimension 3. En effet, si E est de dimension n vérifiant les hypothèses de Kakutani alors ses sous espaces de dimension 3 les satisferont. Ainsi, si on a prouvé Kakutani pour la dimension 3 on pourra conclure par le corollaire 1 de la partie 1 que E est euclidien, car si tout ses sous espaces de dimension 3 sont euclidiens, ceux de dimension 2 le sont aussi.

Prenons donc $dim(E) = 3$.

Supposons que tout sous-espace vectoriel F de dimension 2 de E est l'image d'un projecteur de norme inférieure à 1.
Par ce qui précède cela équivaut à dire que tout sous-espace vectoriel F^* de E^* de dimension 1 est le noyau d'un projecteur de norme inférieure à 1. [On peut s'en convaincre avec la preuve du théorème 12]
Montrons alors que $(E^*, \|.\|_*)$ est euclidien : Cela revient à montrer par la partie 3 que sa boule unité B^* est un ellipsoïde.
Or, par la propriété précédente, pour toute droite vectorielle L, il existe H un hyperplan tel que :

$$B^* + L = B^* \cap H + L$$

Ce qui permet de conclure que B^* est un ellipsoïde par le théorème de Kakutani version noyau.
Ainsi, $(E^*, \|.\|_*)$ est euclidien et donc par la caractérisation par le dual $(E, \|.\|)$ est euclidien.

□

References

[1] Benjamin Hellouin, *Boules unité*.

[2] Sylvain, *Ellipsoïde de John*, Développement d'agrégation, Agreg-Maths.

[3] Phil Caldero, *Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$*, YouTube.

[4] Shiri Artstein-Avidan et Eli Putterman, *Some new positions of maximal volume of convex bodies*, 2-3 et 12-14.

[5] Fritz John, *Collected Papers Volume II*, p188.

[6] Peter M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, p226.