Feuille d'exercices n^o 6

Calcul différentiel

I. Dérivées partielles et différentielle

Exercice 1. Étudier l'existence de la dérivée de la fonction $f : (x, y) \longmapsto xy^2$ suivant le vecteur $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ au point $A = (2, 1)$. Déterminer sa valeur si elle existe.

Exercice 2. Soit $\overrightarrow{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\overrightarrow{G}(x, y, z) = (x \sin y, y \sin x, z)$. Justifier l'existence et calculer $\operatorname{div}(\overrightarrow{G})$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{G})$ et $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \circ \operatorname{div}(\overrightarrow{G})$.

Exercice 3. Etudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de la fonction suivante :

$$f : (x, y) \longmapsto \begin{cases} x^2, & |x| > y \\ y^2, & |x| \leq y \end{cases}$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$.
2. L'application est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais n'y est pas différentiable.

Exercice 6. Soient E, F deux espaces réels et $f : E \to F$ une fonction de classe C^1. Dans les cas suivants trouver les dimensions (nombres de lignes et de colonnes) de la matrice jacobienne de f en un point, puis à l'aide des entrées de la matrice jacobienne décrire la différentielle de f en un point donné :

1. f est une fonction réelle d'une variable réelle ($E = F = \mathbb{R}$.)
2. f est une fonction vectorielle d'une variable réelle ($E = \mathbb{R},\ F = \mathbb{R}^p$.)
3. f est une fonction numerique (réelle) d'une variable vectorielle ($E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$.) Quel est le lien avec le gradient de f dans ce cas là ?
4. f est une fonction vectorielle d'une variable vectorielle ($E = \mathbb{R}^n,\ F = \mathbb{R}^p$.)

Exercice 7. Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On considère les assertions suivantes :

A. L'application f est continue en $(0,0)$.

B. Les dérivées partielles $(\partial f/\partial x)$ et $(\partial f/\partial y)$ existent et sont continues au voisinage de $(0,0)$.

C. L'application f est différentiable en $(0,0)$.

1) Rappeler les implications qu'il y a entre ces propriétés.

2) Montrer que chaque implication n'est pas une équivalence. On pourra utiliser les deux fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } y = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

Exercice 8. Soit $f : (\mathbb{R}_+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x + 5y + x^2(\sqrt{y} + \sqrt{x})$. Déterminer l'ensemble des points où f

1. est continue,
2. admet des dérivées partielles,
3. est de classe C^1,
4. est différentiable,
5. admet des dérivées directionnelles.

Exercice 9. On considère l'application $f :$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = & \begin{cases} xy \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}.$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
2. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f est différentiable au point $(0,0)$.

II. Fonctions composées

Exercice 10. Justifier que les fonctions de $\mathbb{R}^2$ suivantes sont différentiables, et calculer leur matrices Jacobiennes en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f : (x,y) \longmapsto e^{xy}(x+y), \;\; g : (x,y) \longmapsto xy + yz + zx, \;\; h : (x,y) \longmapsto (y \sin x, \cos x)$$

Exercice 11. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielles en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \left(\frac{x^2 - z^2}{2}, \; \sin x \sin y\right), \;\; g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \left(xy, \frac{x^2}{2} + y, \ln(1+x^2)\right)$$

Exercice 12. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*.$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on pose $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[\setminus\{\pm\pi/2, \pi\}$. Notons $g : (r,\theta) \in]0; +\infty[\times(]0; 2\pi[\setminus\{\pm\pi/2, \pi\}) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Justifier l'existence et donner l'expression de $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

Exercice 13.

1. Si $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, déterminer la dérivée de $u : x \longmapsto f(x,-x)$ et la différentielle en tout point de $g : (x,y) \longmapsto f(y,x)$.
2. Soient E et F deux espace normés, U un ouvert de E, et $f : E \to F$ différentiable. Pour $a \in U$ et $v \in E$ dériver la fonction composée $t \mapsto f(a+tv)$ en $t = 0$.

Exercice 14. Soit $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ (une application d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$) de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{xy}$. En sachant que $\gamma(0) = (1,2)$, et $\gamma'(0) = (3,4)$. Justifier l'existence et trouver la valeur de $\dfrac{\partial f \circ \gamma}{\partial t}(0)$.

Exercice 15. Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et x et y deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables. On considère $z : t \in \mathbb{R} \longmapsto f(x(t), y(t))$. Montrer que z est dérivable et déterminer $z'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Appliquer la formule aux cas particuliers :

1. $f : (x,y) \longmapsto x^2 + 2xy + 4y^2$ avec $x : t \longmapsto t$ et $y : t \longmapsto e^{3t}$.
2. $f : (x,y) \longmapsto xy^2 + x^2y$ avec $x : t \longmapsto t^2$ et $y : t \longmapsto \ln t$.

Exercice 16. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \text{ et } g(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z)$$

On considère aussi $h = f \circ g$.

1. Expliciter h. Montrer que f, g et h sont de classe C^1 et écrire leur jacobiennes.
2. Vérifier que $J_{h_{(x,y,z)}} = J_{f_{g(x,y,z)}} \circ J_{g_{(x,y,z)}}$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 17. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $f : \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
Calculer pour $(x,y) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ la quantité $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en justifiant son existence.

Exercice 18. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs non nulles. Montrer que l'application inverse $\dfrac{1}{f}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle en tout point de u.