

Feuille d'exercices n° 5

LIMITES ET CONTINUITÉ DE FONCTIONS VECTORIELLES

I. Limites

Exercice 1. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \frac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$.

Étudier la limite pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, avec $m \in \mathbb{R}$.

En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Étudier la limite pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ donné.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'équation $y = x^2$.
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 3. Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites :

$$(A) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y); \quad (B) \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)); \quad (C) \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)).$$

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x, y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x, y) = \frac{\sin y}{x}.$$

Démontrer qu'en $(0, 0)$:

- deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième n'existe,
- une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres n'existent,
- (B) et (C) peuvent exister sans être égales,
- si (A) et (B) existent alors elles sont égales.

Exercice 4. Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$.

Exercice 5. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ et (x, y) appartenant à l'ensemble de définition :

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{|x| + |y|}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = \frac{x^{1/3}y^2}{x^2 + y^2 + |x - y|},$$

$$f(x, y) = \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = \frac{x^2}{y \ln(y - x^2)}, \quad f(x, y) = x^y$$

Utilisation des coordonnées polaires

Rappel.

Soit $g: \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout θ , $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho, \theta) = \ell$.

Supposons la limite uniforme en θ :

$$\text{il existe } G: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \begin{cases} |g(\rho, \theta) - \ell| \leq G(\rho), & \forall \rho > 0, \forall \theta \\ \lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(\rho) = 0. \end{cases}$$

Sous ces conditions, si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = g(\rho, \theta)$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell$.

Exercice 6. Pour chacune des fonctions $g: \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ suivantes, calculer $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho, \theta)$. On précisera si :

1. La limite est indépendante de θ .
2. La limite est uniforme pour $\theta \in [0, 2\pi[$

$$g(\rho, \theta) = \frac{\rho}{\sin \theta + 3}, \quad g(\rho, \theta) = \begin{cases} \rho \ln(\rho \sin(\theta)), & \text{si } \theta \in]0, \pi[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède la limite pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de la fonction $f(x, y)$ telle que $f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = g(\rho, \theta)$.

Exercice 7. Calculer les limites à l'origine des fonctions suivantes, à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires.

$$f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^4 + x^2 y^2 + y^4}.$$

Exercice 8. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner les définitions des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

Étudier ensuite les limites pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ et $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ de la fonction

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + x + y + 1)^\alpha}{x^2 + y^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9. En utilisant les coordonnées polaires, calculer les limites pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ainsi que $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$ des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x \arctan y}{x^2 + y^2 + 1}, & f(x, y) &= \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}, \\ f(x, y) &= (1 + |x| + |y|) \sin(y^2), & f(x, y) &= ye^x + \ln |y|. \end{aligned}$$

II. Continuité

Exercice 10. Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^2}}.$$

1. Soit D une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à D est continue en $(0, 0)$.

2. Peut-on en déduire que f est continue en $(0, 0)$?

Exercice 11. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Exercice 12. Étudier la continuité des fonctions suivantes

1. $f : (x, y) \rightarrow \begin{cases} x^2 y & \text{si } x < y, \\ y & \text{si } x \geq y \end{cases}$
2. $f : (x, y) \rightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(1/(xy)) & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$
3. $f : (x, y) \rightarrow \begin{cases} x^4 & \text{si } x^2 < y \\ y^2 & \text{si } x^2 \geq y \end{cases}$
4. $f : (x, y) \rightarrow \begin{cases} xy & \text{si } x^2 + y^2 \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 13. Sur quelles parties de \mathbb{R}^2 les formules suivantes définissent-elles une fonction continue ?

1. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.
2. $g(x, y) = \sin\left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2}\right)$.

Démontrer que ces deux fonctions se prolongent par continuité au point $(0, 0)$.

Exercice 14. Soit $k \in \mathbb{R}$, f une fonction de deux variables, définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On rappelle que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathcal{D} \text{ t.q. } f(x, y) = k\}$ est la *ligne de niveau* k de la fonction f dans \mathcal{D} .

Trouver l'ensemble de définition \mathcal{D} et ensuite les lignes de niveaux 0, 1, -1, 2 et 3 de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et les représenter graphiquement. Même question avec $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $f(x, y) = y/x$.

Exercice 15. Pour chacune des fonctions suivantes tracer les lignes de niveau indiquées :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x + y^2}, \quad k = 0, -1; \quad f(x, y) = \frac{xy - x + y}{xy}, \quad k = 1, 2.$$
$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2 y^2}, \quad k = 2; \quad f(x, y) = x - y - |x - y|, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Pour la dernière question, traiter séparément les cas $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$.

Exercice 16. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications continues.

1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = g(x)\}$ est un fermé de \mathbb{R}^n .
2. On suppose $m = 1$, montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq g(x)\}$ est un fermé de \mathbb{R}^n .
3. On suppose $m = 1$, montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < g(x)\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Exercice 17. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall q \in \mathbb{Q}, f(qx) = qf(x)$.
4. En déduire que f est une application linéaire.

Exercice 18. Établir si les fonctions suivantes sont bornées dans \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = (x + 2y^2) \exp(-|xy|), \quad f(x, y) = \exp(\cos(1 + xy)), \quad f(x, y) = (x^4 + y^2) \exp(-x^2 - y^4).$$

III. Continuité des applications linéaires

Exercice 19. (Une forme linéaire non continue)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1) Montrer que l'application $\|\cdot\|$ définit une norme sur E .

2) Pour $c \in [0; 1]$, on définit l'application δ_c par :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(c) \end{array}$$

Montrer que δ_c est une forme linéaire sur E mais qu'elle n'est pas continue.

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E .

1. Montrer que $x \in E \mapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E .
2. En déduire que f est continue.

Exercice 21. (Norme d'opérateur)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Soit $\mu : E \rightarrow E$ telle que pour tout $x \in [0; 1]$, on ait $\mu(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \mu(f) \end{array}$$

1. Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue de E dans lui-même.
2. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$ pour tout $t \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|$ et $\|\mu(f_n)\|$ et en déduire la norme de μ .

Exercice 22. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie pour $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $\|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$.

Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire suivante :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ P & \longmapsto & P(c) \end{array}$$

Pour quelles valeurs de c la forme linéaire ϕ_c est-elle continue? Dans ces cas, déterminer la norme de ϕ_c .

Exercice 23. On fixe un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$P(-1)^2 + P'(0)^2 + P''(1)^2 \leq C \int_{-1}^1 P(x)^2 dx.$$