

Feuille d'exercices n° 5

FORMES SESQUILINÉAIRES, HERMITIENNES

Exercice 1.

1. Les applications suivantes sont-elles des formes sesquilineaires hermitiennes ?

(a) $h_1 : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ donnée, pour tous $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$, par :

$$h_1(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + 3\bar{x}_2 y_2 + 2i\bar{x}_3 y_3 + (2 + 3i)\bar{x}_1 y_2 + (2 - 3i)\bar{x}_2 y_1 + (1 - 5i)\bar{x}_2 y_3 + (1 + 5i)\bar{x}_3 y_2$$

(b) $h_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $h_2(A, B) = \text{tr}({}^t \bar{A} \cdot B)$.

Lorsque c'est le cas, permettent-elles de définir un produit scalaire hermitien ?

2. Soit E l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ vers \mathbb{C} . Pour $f \in E$ et $f = a + ib$ avec a, b à valeurs réelles, on rappelle que $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 a(x) dx + i \int_{-1}^1 b(x) dx$. Montrer que $h_3 : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$h_3(f, g) = \int_{-1}^1 \overline{f(x)} g(-x) dx$$

est une forme sesquilineaire hermitienne. Est-elle positive ? négative ? définie ?

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n . Soit s une forme sesquilineaire sur E . Montrer que s est hermitienne si et seulement si sa matrice S dans une base quelconque satisfait la relation : ${}^t S = \bar{S}$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$ l'espace des polynômes à coefficients complexes et de degré au plus 2. On définit $q : E \rightarrow \mathbb{C}$ par $q(P) = \int_0^1 |P(x)|^2 dx$.

1. Montrer que q est une forme quadratique hermitienne en exhibant sa forme polaire. En déduire que (E, q) est un espace hermitien.
2. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel $F = \{2\mu - \nu + 3i\mu X^2 \mid \mu, \nu \in \mathbb{C}\}$.
3. Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$\inf \left\{ \int_0^1 |1 - 2\mu + \nu - 3i\mu x^2|^2 dx \mid \mu, \nu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Exercice 4. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit u un endomorphisme (linéaire) de E . On suppose que pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0$. Montrer que u est l'application nulle.

Exercice 5. Soit E le \mathbb{C} -espace vectoriel des application continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{C} que l'on munit du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt$.

1. Soit $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et déterminer son orthogonal.
2. Que peut-on en déduire sur la dimension de H ?

Exercice 6. Soit (E, \langle, \rangle) un espace hermitien et f un endomorphisme (\mathbb{C} -linéaire) de E . Soit λ une valeur propre de f . Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si f est bijective et $f^* = f^{-1}$ alors $|\lambda| = 1$.
2. Si $f^* = f$ alors $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Si $f^* = -f$ alors $\lambda \in \mathbb{R}i$.
4. S'il existe un endomorphisme g de E tel que $f = g^* \circ g$ alors $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 7. Sans faire de calculs, expliquer pourquoi la matrice suivante admet au moins une valeur propre positive et une négative :

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 + i\sqrt{2} & -i \\ 1 - i\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ i & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension 3. Déterminer le rang et la signature de la forme hermitienne h dont la matrice dans une certaine base \mathcal{B} de E est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i \\ 0 & -2 & 1 + i \\ 2i & 1 - i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit q la forme quadratique hermitienne de \mathbb{C}^3 définie dans la base canonique par :

$$q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\bar{x}_1x_2 - ix_1\bar{x}_2 + 2i\bar{x}_2x_3 - 2ix_2\bar{x}_3.$$

Déterminer la forme polaire associée, le rang et la signature.