Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2014-2015

Maths III PMI - Analyse

Feuille d'exercices n^o 4

TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

I. Ouverts, fermés

Exercice 1. Montrer en utilisant la définition d'un ouvert et d'un fermé que :

1. Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une réunion de boules ouvertes.
2. L'ensemble $]a,b[$, $a<b$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $[a,b]$, $a<b$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble $[a,b[$, $a<b$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble $\{1/n,\ n\in\mathbb{N}^*\}\cup\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble $\{1/n,\ n\in\mathbb{N}^*\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.
7. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contenant une boule ouverte, alors $F=\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

1. L'intervalle dans $\mathbb{R}^2$: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ 1<x<3, y=0.\}$
2. Le cercle unitaire : $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2=1.\}$
3. Le disque : $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2\leq 1.\}$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0\in F$ et on définit

$$\begin{array}{cccccc} f & : & E & \longmapsto & E \\ & & u & \longrightarrow & x_0+u \end{array}$$

1. Montrer que si $U\subset E$ est une partie ouverte, alors $f(U)$ est aussi une partie ouverte de E.
2. Montrer que si $F\subset E$ est une partie fermée, alors $f(F)$ est aussi une partie fermée de E.

Exercice 4.

1. Montrer que si $\{U_i\}_{1\leq i\leq I}$ est une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ alors $\bigcap\limits_{i=1}^{I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n,1/n[$ et en déduire que le résultat précédent ne se généralise pas lorsque l'on considère une famille infinie d'ouverts.
3. Enoncer (et démontrer) les résultats analogues à ceux qui précèdent concernant l'union de familles de fermés.

Exercice 5. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

1. en observant que son complémentaire est ouvert,
2. par la caractérisation séquentielle des parties fermées.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé. Démontrer que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même rayon.

Exercice 7. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour une partie X de E, on note X° l'intérieur de X. Soient A, B deux parties de E.

1. On suppose que $A \subset B$. Montrer que $A^\circ \subset B^\circ$.
2. Comparer les ensembles $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$, puis les ensembles $(A \cup B)^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ$.

Exercice 8. Déterminer l'intérieur des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,

$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}$,

Exercice 9. Voisinage

Soit P un point de $\mathbb{R}^n$. En général on dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété dans un voisinage de P si cette propriété est satisfaite au moins dans un ensemble ouvert contenant P.

1. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont *positives* au voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont *définies* au voisinage de l'origine :

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}, \qquad f(x, y) = \ln(\cos(x^2 + y^2)).$$

II. Compacts

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E. On définit $A+B = \{a+b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A + B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A + B$ l'est aussi.
3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A + B$ n'en est pas un.

Exercice 11. Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$ une partie compacte. Montrer que toute partie fermée de X est elle-même compacte.