

Feuille d'exercices n° 3

SUITES DE FONCTIONS (II) - THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définies sur \mathbb{R}_+^* par $f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers une fonction f que l'on précisera.
2. Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.
3. Que peut-on en déduire sur la suite $(f_n)_{n \geq 1}$?

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0; 1[$ par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0; 1[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer (si elle existe) la limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x)$.
3. Que peut-on en conclure sur la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3. Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan(x)^n dx,$
2. $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx.$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx,$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt[n]{1+x^n}}.$

Exercice 5. Déterminer la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, de $\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

Indication : on pourra utiliser en la démontrant l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \geq 0$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et intégrable.

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} dt$.

Exercice 7. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$