

Feuille d'exercices n° 2

PRODUIT SCALAIRE - ESPACE EUCLIDIEN

Exercice 1. 1. Sur \mathbb{R}^n montrer que

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

définit un produit scalaire. On l'appelle le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

2. Soit E un espace euclidien de dimension n . Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que pour tous $x, y \in E$ de coordonnées x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n on ait :

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

Exercice 2. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E alors $E = F \oplus F^\perp$.

Indication : concernant $\dim(F^\perp)$, on pourra considérer l'application ($E \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto (\langle x, b_1 \rangle, \dots, \langle x, b_m \rangle)$), les b_i formant une base orthonormée de F .

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base d'un espace euclidien (E, \langle, \rangle) . Montrer que \mathcal{B} est orthonormale si et s.si pour tout $x \in E$ la coordonnée de x selon b_i est $\langle x, b_i \rangle$.

Exercice 4. Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien de dimension n . Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une famille constituée d'éléments de norme 1. On suppose que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, b_i \rangle^2$. Montrer que la famille \mathcal{B} est orthogonale puis que c'est une base orthonormée.

Exercice 5. 1. Soit E un espace vectoriel réel, muni d'une forme quadratique q positive. On notera b sa forme polaire. Montrer l'inégalité suivante (dite inégalité de Schwarz) :

$$b(x, y)^2 \leq q(x)q(y), \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Supposons de plus que q est définie. Montrer l'équivalence :

$$b(x, y)^2 = q(x)q(y) \iff x \text{ et } y \text{ sont liés.}$$

2. Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire \langle, \rangle . Pour $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme, i.e.

- (a) pour $x \in E$, si $\|x\| = 0$ alors $x = 0$,
- (b) pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- (c) pour $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

3. Que vaut $\|x\|$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$.

4. Dans le plan réel, on considère un triangle ABC . On note a, b et c les longueurs des côtés respectifs BC, AC et AB et on note θ l'angle \widehat{ACB} . Montrer l'égalité suivante (dite de Al-Kashi (1380-1429), ou loi des cosinus) :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta).$$

En déduire le théorème de Pythagore ainsi que sa réciproque.

Exercice 6. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E , avec $n = \dim E$. On appelle projecteur orthogonal sur F la projection p_F sur F selon la somme directe : $E = F \oplus F^\perp$, en d'autres termes, pour $x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$.

1. Soit (v_1, \dots, v_p) une base orthonormale de F . Montrer que pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle x, v_p \rangle v_p.$$

2. Soit $F = \text{Vect}(v)$ de dimension 1. Montrer que $p_F(x) := p_v(x) = \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$.

3. (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit (v_1, \dots, v_n) une base de E . On construit : $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - p_{u_1}(v_2)$, $u_3 = v_3 - p_{u_1}(v_3) - p_{u_2}(v_3)$, \dots ,
 $u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} p_{u_j}(v_k)$, \dots

Enfin, on pose pour tout i , $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$. Montrer que les e_i forment une base orthonormale de E .

4. Appliquer ce procédé au cas de la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx.$$

Exercice 7. On se donne $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ dans \mathbb{R}^3 . Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Trouver une base orthonormale \mathcal{B} pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 0)$.
3. Déterminer toutes les bases de \mathbb{R}^3 pour lesquelles la matrice de p_F est $\text{Diag}(1, 1, 0)$.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On note H l'hyperplan suivant : $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H .
2. Déterminer une base orthonormale de H .
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H , puis la distance de X à H .

Exercice 9. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et a_0, \dots, a_n des réels distincts deux à deux. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=1}^n P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier qu'avec cette application, E est muni d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée de E .
3. Pour $Q \in E$ quelconque, déterminer la distance de Q à $H = \{P \in E \mid \sum_{i=1}^n P(a_i) = 0\}$.

Exercice 10. Soient E un espace euclidien et p un projecteur sur E . Démontrer l'équivalence suivante : p est un projecteur orthogonal \iff pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 11. Soit E un espace euclidien. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer l'équivalence entre :

1. $\text{Im}(p) \subseteq \text{Im}(q)$,
2. pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Exercice 12 (Révision de cours). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit $x \in E$. On pose $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$. Montrer que

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$

Exercice 13. Dans \mathbb{R}^6 , soit $H = \{(x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de H^\perp puis la distance entre $u = (1, -1, 0, 2, 4, 0)$ et H .

Exercice 14. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note \mathcal{S} le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et \mathcal{A} celui des matrices antisymétriques. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N \rangle = \sum_{i,j} m_{ij}n_{ij}$ où m_{ij} sont les coefficients de M et n_{ij} ceux de N .

0. Vérifier que pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N \rangle = \text{tr}({}^tM \cdot N)$.

1. Soient $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Remarquer que $\langle {}^tS, {}^tA \rangle = \langle S, A \rangle$.

En déduire que $\langle S, A \rangle = 0$.

2. Déduire de la question précédente que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^\perp$ puis que $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$.

3. On sait alors (voir par exemple l'ex. 2) que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique $S \in \mathcal{S}$ et l'unique $A \in \mathcal{A}$ en fonction de M telles que $M = S + A$.

4. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre M et \mathcal{S} , la distance entre M et \mathcal{A} , puis la distance entre $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.

Exercice 15. Soit \mathcal{C} l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans \mathbb{R} . Pour f et g dans \mathcal{C} on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur \mathcal{C} .

2. Soit $f \in \mathcal{C}$. Interpréter

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a - b \sin(t) - c \cos(t))^2 dt$$

comme la distance de f à un sous-espace vectoriel de \mathcal{C} que l'on déterminera.

3. En déduire l'expression de a , b et c en fonction de f pour lesquels l'inf précédent est atteint.

4. Application : Déterminer a , b , c pour $f(t) = t$.

Exercice 16. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (f(t))^n dt.$$

En utilisant Cauchy-Schwarz montrer que pour tout n , $I_n I_{n+2} \geq I_{n+1}^2$.