

Problème du 30 mars 2016.

Problème.

1. *Autour des suites récurrentes d'ordre 2.* On note $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- (a) On considère l'ensemble E formé par toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles, et que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les relations $a_n = \rho^n, b_n = (-\rho)^{-n}$ appartiennent à E .
 - Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux éléments de E tels que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ alors $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que pour tout $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n = \lambda \rho^n + \mu (-\rho)^{-n}$.
 - Donner une base et la dimension de E .
- (b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E tel que $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$.
- Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \rho^n + \mu (-\rho)^{-n}$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq \lambda \rho^n - |\mu|$.
- (c) Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que : $s_0 < 1, s_1 < 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_{n+2} = s_{n+1} s_n.$$

- On suppose $s_0 = 0$ ou $s_1 = 0$. Donner la valeur de s_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - On suppose maintenant $s_0 > 0$ et $s_1 > 0$. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, s_n \leq C e^{-\lambda \rho^n}$.
Indication. On utilisera la suite $u_n = -\ln s_n$.
- (d) Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que : $r_0 < 1, r_1 < 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r_{n+2} \leq r_{n+1} r_n.$$

- En utilisant la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $s_0 = r_0, s_1 = r_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $s_{n+2} = s_{n+1} s_n$, montrer qu'il existe $C > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n \leq C e^{-\lambda \rho^n}.$$

- En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$.

2. *Différences divisées.* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, |f''(x)| \leq M$.

On pose pour tous réels x_1, x_2, x_3 deux à deux distincts

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$
$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}.$$

- (a) Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. Montrer qu'il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f[x_1, x_2] = f'(c)$.
- (b) Soit x_1, x_2 et x_3 trois réels tels que $x_1 < x_2 < x_3$. Montrer qu'il existe $y \in]x_1, x_2[$ et $z \in]x_2, x_3[$ tels que

$$f[x_1, x_2] = f'(x_2) + \frac{f''(y)}{2}(x_1 - x_2) \quad \text{et} \quad f[x_2, x_3] = f'(x_2) - \frac{f''(z)}{2}(x_2 - x_3).$$

En déduire que

$$|f[x_1, x_2, x_3]| \leq \frac{M}{2}.$$

On admettra que cette majoration est valide pour tous réels x_1, x_2, x_3 .

3. *Méthode de la sécante.* Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$. On suppose de plus que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

- (a) i. Montrer que, sur $[a, b]$, il n'existe qu'une seule solution de l'équation $f(x) = 0$.
- ii. On note $m = \min_{y \in [a, b]} |f'(y)|$ et $M = \max_{y \in [a, b]} |f''(y)|$. Justifier que m et M sont bien définis, m et M sont finis et $m > 0$.

La méthode de la sécante est un algorithme permettant le calcul d'une valeur approchée de la solution x à $f(x) = 0$. Pour cela, on construit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie comme suit :

$$y_0 \neq y_1 \in [a, b], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f[y_{n-1}, y_n]}. \quad (1)$$

Dans toute la suite, on supposera que la suite $(y_n)_n$ est bien définie, à valeurs dans $[a, b]$, et que $y_n \neq x$ pour tout n .

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} y_{n+1} - x &= (y_n - x) \left(1 - \frac{f[y_n, x]}{f[y_{n-1}, y_n]} \right) \\ &= (y_n - x)(y_{n-1} - x) \frac{f[y_{n-1}, y_n, x]}{f[y_{n-1}, y_n]} \end{aligned}$$

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \frac{M}{2m} |y_n - x|$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$r_{n+1} \leq r_n r_{n-1}.$$

- (d) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|y_0 - x| < \eta$ et $|y_1 - x| < \eta$, alors la suite $(y_n)_n$ converge vers x .