

Définition 1. Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée \mathcal{B}_0 . Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . On dit que la base \mathcal{B} est directe si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = +1$. On dit que la base \mathcal{B} est indirecte si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = -1$.

Proposition 1. Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de $n = \dim(E)$ vecteurs de E . Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ de la famille (x_1, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} est le même pour toute base orthonormée directe \mathcal{B} de E . On l'appelle produit mixte des vecteurs (x_1, \dots, x_n) et on le note

$$[x_1, \dots, x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \quad \forall \mathcal{B} \text{ base orthonormée directe de } E.$$

Théorème 1. Une isométrie directe du plan E (i.e. $u \in O(E)$ avec $\det(u) = 1$) a la même matrice dans toute base orthonormée directe de E . Plus précisément, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, telle que la matrice de u dans toute base orthonormée directe de E est

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On appelle alors u la rotation d'angle θ et on la notera Rot_θ .

Théorème 2. Soient x et y deux vecteurs de E **non nuls**. Il existe une unique rotation $r \in SO(E)$ qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$. On appelle alors mesure de l'angle orienté de x à y le réel θ , unique à 2π près, tel que $r = \text{Rot}_\theta$ et on note $\widehat{(x, y)} \equiv \theta \quad [2\pi]$.

Si de plus $\theta \in]-\pi; \pi]$, on dit que θ est la mesure principale de l'angle orienté de x à y .

Proposition 2.

(i). Pour tous $x, y \in E \setminus \{0_E\}$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, $\widehat{(\lambda x, \mu y)} \equiv \widehat{(x, y)} \quad [2\pi]$.

(ii). Pour tous $x, y, z \in E \setminus \{0_E\}$, $\widehat{(x, y)} \equiv \widehat{(x, z)} + \widehat{(z, y)} \quad [2\pi]$.

(iii). Pour tous $x, y \in E \setminus \{0_E\}$, $\widehat{(y, x)} \equiv -\widehat{(x, y)} \quad [2\pi]$.

Proposition 3. Soient $x, y \in E \setminus \{0_E\}$. Notons $\theta \equiv \widehat{(x, y)} \quad [2\pi]$. Alors,

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta) \quad \text{et} \quad [x, y] = \|x\| \|y\| \sin(\theta)$$

où $[x, y]$ désigne le produit mixte de (x, y) (on rappelle que $[x, y] = \det_{\mathcal{B}}(x, y)$ pour toute base orthonormée directe \mathcal{B} de E).

Théorème 3. Soient u une isométrie indirecte du plan E (i.e. $u \in O(E)$ avec $\det(u) = -1$) et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E , alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et u correspond à la réflexion par rapport à la droite vectorielle dirigée par le vecteur

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2.$$

Théorème 4. Les endomorphismes orthogonaux directs du plan orienté E sont les rotations vectorielles. Celles-ci commutent entre elles et ont même représentation matricielle dans toute base orthonormée directe de E . Les endomorphismes orthogonaux indirects du plan sont les réflexions.

Corollaire 1. Dans le plan, la composée de deux rotations est une rotation, la composée de deux réflexions est une rotation, et la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion.

Théorème 5. Soit $u \in SO(E)$ une isométrie directe de l'espace E . Alors, 1 est valeur propre de u , et si l'on prend $a \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ unitaire, il existe un unique réel θ , à 2π près, tel que : pour toute base orthonormée directe \mathcal{B} de premier vecteur a ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On dit alors que u est la rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle orienté θ . On la notera $\text{Rot}_{a,\theta}$.

Théorème 6. Soit $u \in O(E)$ tel que $u \notin SO(E)$. Alors -1 est valeur propre de u . De plus, si l'on choisit $a \in \text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ unitaire, il existe un unique réel θ à 2π près telle que la matrice de u dans toute base orthonormée directe \mathcal{B} de E de premier vecteur a soit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, u est la composée commutative de la rotation d'axe D dirigé et orienté par a et d'angle θ avec la réflexion par rapport au plan D^\perp .

Définition 2. Soient x, y deux vecteurs de l'espace orienté E de dimension 3. On appelle produit

vectorel de x par y , noté $x \wedge y$, l'unique élément de E tel que

$$\forall z \in E, \quad [x, y, z] = \langle x \wedge y, z \rangle.$$

Proposition 4. L'application produit vectoriel

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x \wedge y \end{aligned}$$

est bilinéaire antisymétrique :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y, t) \in E^3, \quad (\lambda x + y) \wedge t = \lambda(x \wedge t) + (y \wedge t) \text{ et } y \wedge x = -x \wedge y.$$

Proposition 5. Soient $x, y \in E$.

(i). $x \wedge y$ est orthogonal à x et y , i.e. $\langle x \wedge y, x \rangle = 0$ et $\langle x \wedge y, y \rangle = 0$.

(ii). La famille (x, y) est libre si, et seulement, $x \wedge y \neq 0$.

Proposition 6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E . Pour $x, y \in E$, notons

$$x = \sum_{k=1}^3 x_k e_k \text{ et } y = \sum_{k=1}^3 y_k e_k \text{ avec } (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ alors}$$

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3.$$

Proposition 7. Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée directe de E , alors $e_3 = e_1 \wedge e_2$, $e_1 = e_2 \wedge e_3$ et $e_2 = e_3 \wedge e_1$.

Proposition 8. Si (x, y) est une famille orthonormée de E , alors la famille $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormée directe de E .