Définition 1. *Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée $\mathcal{B}_0$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On dit que la base $\mathcal{B}$ est directe si* $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = +1$. *On dit que la base $\mathcal{B}$ est indirecte si* $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = -1$.

Proposition 1. *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n = \dim(E)$ vecteurs de E. Le déterminant* $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ *de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est le même pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E. On l'appelle produit mixte des vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et on le note*

$$[x_1, \dots, x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \quad \forall \mathcal{B} \text{ base orthonormée directe de } E.$$

Théorème 1. *Une isométrie directe du plan E (i.e. $u \in O(E)$ avec* $\det(u) = 1$*) a la même matrice dans toute base orthonormée directe de E. Plus précisément, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, telle que la matrice de u dans toute base orthonormée directe de E est*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On appelle alors u la rotation d'angle θ et on la notera Rot_θ.

Théorème 2. *Soient x et y deux vecteurs de E* ***non nuls****. Il existe une unique rotation $r \in SO(E)$ qui envoie $\dfrac{x}{\|x\|}$ sur $\dfrac{y}{\|y\|}$. On appelle alors mesure de l'angle orienté de x à y le réel θ, unique à 2π près, tel que $r = \mathrm{Rot}_\theta$ et on note $\widehat{(x, y)} \equiv \theta \quad [2\pi]$.*

Si de plus $\theta \in]-\pi; \pi]$, on dit que θ est la mesure principale de l'angle orienté de x à y.

Proposition 2.

(i). Pour tous $x, y \in E\backslash\{0_E\}$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, $\widehat{(\lambda x, \mu y)} \equiv \widehat{(x, y)} \quad [2\pi]$.

(ii). Pour tous $x, y, z \in E\backslash\{0_E\}$, $\widehat{(x, y)} \equiv \widehat{(x, z)} + \widehat{(z, y)} \quad [2\pi]$.

(iii). Pour tous $x, y \in E\backslash\{0_E\}$, $\widehat{(y, x)} \equiv -\widehat{(x, y)} \quad [2\pi]$.

Proposition 3. *Soient $x, y \in E\backslash\{0_E\}$. Notons $\theta \equiv \widehat{(x, y)} \quad [2\pi]$. Alors,*

$$\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|\cos(\theta) \quad \text{et} \quad [x, y] = \|x\|\|y\|\sin(\theta)$$

où $[x, y]$ désigne le produit mixte de (x, y) (on rappelle que $[x, y] = \det_{\mathcal{B}}(x, y)$ pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E).

Théorème 3. *Soient u une isométrie indirecte du plan E (i.e. $u \in O(E)$ avec $\det(u) = -1$) et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et u correspond à la réflexion par rapport à la droite vectorielle dirigée par le vecteur

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2.$$

Théorème 4. *Les endomorphismes orthogonaux directs du plan orienté E sont les rotations vectorielles. Celles-ci commutent entre elles et ont même représentation matricielle dans toute base orthonormée directe de E. Les endomorphismes orthogonaux indirects du plan sont les réflexions.*

Corollaire 1. *Dans le plan, la composée de deux rotations est une rotation, la composée de deux réflexions est une rotation, et la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion.*

Théorème 5. *Soit $u \in SO(E)$ une isométrie directe de l'espace E. Alors, 1 est valeur propre de u, et si l'on prend $a \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ unitaire, il existe un unique réel θ, à 2π près, tel que : pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de premier vecteur a,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On dit alors que u est la rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle orienté θ. On la notera $\mathrm{Rot}_{a,\theta}$.

Théorème 6. *Soit $u \in O(E)$ tel que $u \notin SO(E)$. Alors -1 est valeur propre de u. De plus, si l'on choisit $a \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ unitaire, il existe un unique réel θ à 2π près telle que la matrice de u dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E de premier vecteur a soit*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, u est la composée commutative de la rotation d'axe D dirigé et orienté par a et d'angle θ avec la réflexion par rapport au plan $D^{\perp}$.

Définition 2. *Soient x, y deux vecteurs de l'espace orienté E de dimension 3. On appelle produit*

vectoriel de x par y, noté $x \wedge y$, l'unique élément de E tel que

$$\forall z \in E, \quad [x, y, z] = \langle x \wedge y, z \rangle .$$

Proposition 4. *L'application produit vectoriel*

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x \wedge y \end{array}$$

est bilinéaire antisymétrique :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y, t) \in E^3, \quad (\lambda x + y) \wedge t = \lambda (x \wedge t) + (y \wedge t) \text{ et } y \wedge x = -x \wedge y.$$

Proposition 5. *Soient $x, y \in E$.*

(i). $x \wedge y$ est orthogonal à x et y, i.e. $\langle x \wedge y, x \rangle = 0$ et $\langle x \wedge y, y \rangle = 0$.

(ii). La famille (x, y) est libre si, et seulement, $x \wedge y \neq 0$.

Proposition 6. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E. Pour $x, y \in E$, notons $x = \sum_{k=1}^{3} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{3} y_k e_k$ avec $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, alors*

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3.$$

Proposition 7. *Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée directe de E, alors $e_3 = e_1 \wedge e_2$, $e_1 = e_2 \wedge e_3$ et $e_2 = e_3 \wedge e_1$.*

Proposition 8. *Si (x, y) est une famille orthonormée de E, alors la famille $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormée directe de E.*