La méthode du pivot.

Les problèmes d'algèbre linéaire se ramenent souvent à l'étude d'un système d'équations linéaires. La méthode du pivot (ou méthode d'élimination de Gauss) fournit un algorithme simple et pratique pour résoudre ce type de problèmes.

.

1. Système d'équations linéaires.

.

On considère un système (S) de p équations linéaires à n inconnues:

.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{pmatrix}$$

.

En termes matriciels le système (S) s'écrit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en notant

.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}.......a_{1n} \\ .... \\ a_{p1}.......a_{pn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_p \end{pmatrix}.$$

.

Résourdre (S) c'est trouver tous les vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant (S).

.

Remarque: Soit $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n} \in \mathbf{K^p}$ les colonnes de A. Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s'écrit comme $x_1\mathbf{a_1} + ... + \mathbf{x_n}\mathbf{a_n} = \mathbf{b}$. Donc résoudre le système (S) est équivalent au problème suivant: étant donné les vecteurs $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n}$ et $\mathbf{b}$ déterminer si $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n}$ et si oui, calculer les coefficients de telles combinaisons linéaires.

En particulier, si $p = n$ et $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n}$ est une base, il s'agit de développer le vecteur $\mathbf{b}$ suivant cette base.

Opérations élémentaires sur les équations (ou sur les lignes de la matrice $(A; \mathbf{b})$):

1) Echanger deux équations.

2) Ajouter à une équation un multiple d'une autre équation.

3) Multiplier une équation par un scalaire non-nul.

Evidemment, les opérations élémentaires transforment le système en système équivalent.

Soit $\mathcal{L}_i$ la i-ème ligne du système: $\mathcal{L}_i = (a_{i1}, ..., a_{in}; b_i)$.

Etape 1: Soit $\mathbf{a_j}$ la première colonne non-nulle de A (donc $a_{ik} = 0$ si $k < j$). Quitte à échanger deux lignes, on peut supposer que $a_{1j} \neq 0$.

Etape 2: On modifie les lignes $\mathcal{L}_2, ..., \mathcal{L}_n$ de $(A; \mathbf{b})$: $\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}'_i = \mathcal{L}_i - \frac{a_{ij}}{a_{1j}}\mathcal{L}_1$.

Ensuite dans le système obtenu on supprime la première ligne et les j premières colonnes nulles, ce qui donne la matrice $(A_1; \mathbf{b_1})$. Après cela on revient à l'étape 1 pour le système de matrice $(A_1; \mathbf{b_1})$ (récurrence).

A la fin on obtient une matrice **échelonnée** (ou "en escalier") en lignes, dont les lignes commencent par un nombre de zéros strictement croissant à mesure que l'indice augmente. (Si la i-ème ligne commence par k zéros, la $i+1$-ème ligne commence par au moins $k+1$ zéros.)

Les premiers coefficients non-nuls des lignes non-nulles s'appellent **pivots**.

En permutant les colonnes si nécessaire, ce qui revient à changer la numérotation des inconnues $x_1, ...x_n$, on peut placer le $i-$ème pivot dans la $i-$ème colonne de façon à ce que la i-ème ligne commence par exactement $i-1$ zéros.

On peut aller plus loin: on applique l'étape 2 en commençant par le dernier pivot et en remontant dans le système vers la permière ligne. De cette façon on peut annuler tous les coefficients au dessus des pivots. Finalement, en divisant par les pivots on peut faire tous les pivots égals à 1 (on aurait pu le faire dès le début).

Le système qui résulte s'écrit en termes des blocs:

.

$$\begin{pmatrix} I_r; B \\ \\ 0\ ; 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x_1'} \\ \\ \mathbf{x_2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1'} \\ \\ \mathbf{b_2'} \end{pmatrix}$$

.

Ici I_r est la matrice identité de rang r, B est une matrice $r \times (n-r)$, $\mathbf{x_1'} = (x_1', ..., x_r')$, $\mathbf{x_2'} = (x_{r+1}', ..., x_n')$, $\mathbf{b_1'} = (b_1', ..., b_r')$, $\mathbf{b_2'} = (b_{r+1}', ..., b_p')$ et $x_1', ..., x_n'$ est une permutation des inconnues $x_1, ..., x_n$.

.

Le système se décompose en deux: $\mathbf{x_1'}+\mathrm{B}\mathbf{x_2'} = \mathbf{b_1'}$, et $0 = \mathbf{b_2'}$.

.

L'équation $\mathbf{b_2'} = \mathbf{0}$ est la *condition de compatibilité*, nécessaire et suffisante pour qu'une solution existe. Si elle est satisfaite, les solutions sont données par

$\mathbf{x_1'} = -\mathrm{B}\mathbf{x_2'} + \mathbf{b_1'}$,

où les variables $\mathbf{x_2'}$ $=(x_{r+1}', ..., x_n')$ peuvent être choisis arbitrairement (variables libres) et ce choix détermine $(x_1', ..., x_r')$ (inconnues principales).

.

2. Rang d'une matrice.

Soit $\ell_1, ..., \ell_p \in K^n$ les lignes de la matrice A et $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n} \in K^p$ ses colonnes.

Lemme. **a)** Les opérations élémentaires sur les lignes de A ne changent pas le sous-espace $Vect(\ell_1, ..., \ell_p)$ donc laissent le rang de la famille $(\ell_1, ..., \ell_p)$ inchangé. Les opérations élémentaires sur les colonnes de A agissent sur les lignes de A comme des changements élémentaires de base dans K^n, donc laissent le rang de la famille $(\ell_1, ..., \ell_p)$ inchangé.

b) Symétriquement, les opérations élémentaires sur les colonnes de A ne changent pas le sous-espace $Vect(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n})$ donc laissent le rang de la famille $(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n})$ inchangé. Les opérations élémentaires sur les lignes de A agissent sur les colonnes de A comme des changements élémentaires de base dans K^p, donc laissent le rang de la famille $(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n})$ inchangé.

Conclusion: le rang de la famille des lignes ainsi que celui des colonnes reste inchangé en cours de l'application de la méthode du pivot. Pour la matrice finale échelonnée

$$\begin{pmatrix} I_r; B \\ \\ 0\ ; 0 \end{pmatrix}$$

le rang de la famille des lignes ainsi que celui des colonnes est évidemment égal à r, le nombre de pivots.

Corollaire. Pour toute matrice le rang de la famille des lignes est égal à celui des colonnes.

.

3. Rang d'une famille de vecteurs. Base du sous-espace engendré.

Soit $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n}$ une famille de vecteurs dans K^p.

Le rang de cette famille, dim $Vect(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n})$, est le rang de la matrice $A = (\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n})$ dont $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n}$ sont des colonnes. (En particulier, la famille est libre ssi son rang est égal à n.) Pour déterminer une base de l'espace $Vect(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n})$, il faut remarquer encore une fois que les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice A ne changent pas la dimension de l'espace engendré par une partie donnée des colonnes (ou de linges). On a donc

Lemme.

Les colonnes contenant les pivots forment une base de $Vect(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n})$.

Symétriquement, les lignes contenant les pivots forment une base de $Vect(\ell_1, ..., \ell_p)$.

Comment reconnaitre si un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs?

Déterminer si le vecteur $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des vecteurs

$\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n}$ revient à décider si l'équation $x_1\mathbf{a_1} + ... + x_n\mathbf{a_n} = \mathbf{b}$ admet une solution. Le problème est traité par la méthode du pivot.

On peut aussi remarquer que $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n}$ si et seulement si le rang de la famille $(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n}, \mathbf{b})$ est le même que le rang de $(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n})$.

.

4. Matrice inverse.

La connaissance de la matrice inverse A^{-1} est équivalent à la connaissance de la solution de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pour le second membre $\mathbf{b}$ "arbitraire": $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}$. Cela peut se faire par la méthode du pivot.

Matrices élémentaires. Chaque opération élémentaire sur les lignes de A s'exprime comme la multiplication de A à gauche par une matrice "élémentaire" inversible: $A \to TA$, et pour le second membre du système on a $\mathbf{b} \to \mathrm{T}\ \mathbf{b}$.

[Ecrire les matrices T associées aux trois opérations élémentaires.]

Pour décider si la matrice A est inversible et calculer sa matrice inverse, on procède avec la méthode du pivot.

Etape 1: Si la première colonne de A est nulle, alors dét$A = 0$, la matrice n'est pas inversible. Sinon, quitte à échanger deux lignes, on peut supposer que $a_{11} \neq 0$.

Etape 2: On modifie les lignes $\ell_2, ..., \ell_n$ de A: $\ell_i \to \ell'_i = \ell_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\ell_1$.

(Dans la nouvelle matrice A' la première colonne contient un seul élément non-nul: a_{11}.)

Soit A_1 la matrice obtenue de A' en supprimant la première ligne et la première colonne. Après cela on revient à l'étape 1 pour la matrice A_1 (récurrence).

A la fin de cette procédure (si det $A \neq 0$) on arrive à une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont des "pivots".

Ensuite en commençant par le dernier pivot et en remontant dans la matrice vers la permière ligne on peut annuler tous les coefficients au dessus des pivots. Finalement, en divisant par les pivots on peut faire tous les pivots égals à 1 (on aurait pu le faire dès le début).

En termes de la multiplication par les matrices élémentaires on a

$T_k...T_1A = I_n$, donc $T_k...T_1 = A^{-1}$ - la matrice inverse est calculée.

.

Remarque 1. Si on considère le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, après les transformations élémentaires on obtient $\mathbf{x} = T_k...T_1\mathbf{b} = \mathbf{b'}$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b} = \mathbf{b'}$. En effectuant la méthode du pivot avec le second membre $\mathbf{b}$ aux coefficients indéterminés et en calculant $\mathbf{b'}$ et fonction de $\mathbf{b}$, on récupère A^{-1}.

Remarque 2. Chaque opération élémentaire sur les colonnes de A s'exprime comme la multiplication de A à droite par une matrice "élémentaire" inversible: $A \to AT$.

.

Le rang en termes du déterminant *(n'a pas été fait en cours.)*

On appelle **mineur** d'ordre r d'une matrice A le déterminant d'une matrice d'ordre r extraite de A en choissant r lignes et r colonnes.

Remarque. Si le mineur avec les colonnes $C_{i_1}, ..., C_{i_r}$ est non-nul, les vecteurs $C_{i_1}, ..., C_{i_r}$ sont linéairement indépendants.

Théorème Le rang de la matrice $A = (C_1, ..., C_n)$ est égal à l'ordre maximal des mineurs non-nuls de A.

Démonstration. L'ensemble des mineurs d'ordre r reste inchagé quand on fait des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A. Donc l'ordre maximal des mineurs non-nuls de A est le même que celui de la matrice réduite échélonnée, et ce dernier de manière évidente est égal à son rang.