Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2013-2014

Cursus préparatoire, 1ère année, 2ème semestre : Analyse

Feuille d'exercices n° 4

Utilisation géométrique des équivalents et autres développements asymptotiques

---

Exercice 4.1. Soit $m \geq 2$ un entier, I un intervalle ouvert, x_0 un point de I et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, qu'on suppose m fois dérivable au point x_0.
On notera Δ la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$.
On suppose qu'il existe un entier $r \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $f^{(r)}(x_0) \neq 0$ et on note N le plus petit entier $r \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $f^{(r)}(x_0) \neq 0$.

1. (a) Écrire une équation de Δ regroupée sous forme $y = g(x)$.
   (b) Écrire un équivalent simple de $f(x) - g(x)$ pour x tendant vers x_0.
2. Montrer que si N est pair et si $f^{(N)}(x_0) > 0$ (resp. < 0), il existe un $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset I$ et que le graphe de la restriction de f à $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ est inclus dans le demi-plan limité par Δ et situé au-dessus (resp. au-dessous) de celle-ci.
3. Que peut-on dire quand N est impair ?
4. Dans cette question, on suppose que $f'(x_0) = 0$. Montrer que si N est pair, f admet un extremum local strict en x_0 et que si N est impair, elle n'admet pas d'extremum local en x_0.

Exercice 4.2. En utilisant des développements asymptotiques, étudier les branches infinies des graphes des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$;
2. $f_2(x) = x^3 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$;
3. $f_3(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x - 1}$;
4. $f_4(x) = x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 4.3. Un véhicule se déplace dans le plan. On suppose que sa position à l'instant t (strictement positif) est donnée par les formules :

$$x(t) = 2t - t^2 \qquad y(t) = 2t + \frac{1}{t^2}.$$

1. Montrer que x est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$.
2. En déduire que la trajectoire du mobile pour $t \in]0; 1]$ (resp. $t \in [1; +\infty[$) est un graphe de fonction continue qu'on notera $y_-(x)$ (resp. $y_+(x)$).
3. Faire un développement limité de x à l'ordre 2 au voisinage de $t = 1$. Pourquoi peut-on se passer de reste ? Faire un développement limité de y à l'ordre 3 au voisinage de $t = 1$. Déduire de ces deux expressions un développement asymptotique de y_- (resp. y_+) au voisinage de $x = 1$, puis un dessin approximatif de la trajectoire du véhicule aux instants proches de $t = 1$.