Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir n° 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Les différents exercices sont indépendants.

Exercice 1. Déterminer l'intérieur, la frontière et l'adhérence des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés. **On demande clarté et concision dans les preuves**.

1. un ensemble fini de points de $\mathbb{R}$,
2. $\mathbb{N}$ vu comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$,
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 2\}$,
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1 \text{ et } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{16}\}$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé et K une partie compacte de E. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue, et soit $\ell := \inf_{x \in K} f(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in K$ tel que $|f(x_n) - \ell| \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire qu'il existe $x_\infty \in K$ tel que $f(x_\infty) = \ell$.

Supposons maintenant que $E = \mathbb{R}$ et que f vérifie $f(x) \neq x$ pour tout $x \in K$.

3. En utilisant le résultat obtenu ci-dessus, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(x) - x| \geq \varepsilon$ pour tout $x \in K$.

Exercice 3. Éléments propres de C^tC

Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = C\,({}^tC)$. On suppose que $\sum_{i=1}^n a_i^2 := \|C\|^2 \neq 0$

1. Chercher le rang de M.
2. Calculer MC et en déduire que $\|C\|^2$ est une valeur propre de M.
3. Calculer le polynôme caractéristique de M.
4. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & X^n P(1/X). \end{array}$$

1. Déterminer $u \circ u$.
2. En déduire que u est diagonalisable.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Sa limite est notée u_∞. Montrer que l'ensemble $D := \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{u_\infty\}$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^p$.

Indications : Se rappeler que pour tout $x \notin D$, on a $B\big(x, \frac{\|x-u_\infty\|}{2}\big) \cap B\big(u_\infty, \frac{\|x-u_\infty\|}{2}\big) = \emptyset$. De plus, l'ensemble des éléments de D qui ne sont pas dans $B\big(u_\infty, \frac{\|x-u_\infty\|}{2}\big)$ sont en nombre fini.