Dans ce qui suit, E est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une *norme* sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

i). axiome de séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0_E$.

ii). homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

iii). *inégalité triangulaire* : $\forall (x, y) \in E \times E,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

L'inégalité triangulaire implique que : $\forall (x, y) \in E \times E,\ |N(x) - N(y)| \leq N(x + y)$.
Si N est une norme sur E alors l'application $d : (x, y) \in E \times E \mapsto d(x, y) := N(x - y)$ est une *distance*, c'est-à-dire qu'elle vérifie

- ✓ l'axiome de séparation : $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$.
- ✓ la propriété de symétrie : $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = d(y, x)$.
- ✓ l'inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si E est muni d'une norme N, on dit que c'est un *espace vectoriel normé*. Une partie A de E est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $N(a) \leq M$ pour tout $a \in A$. Le *diamètre* d'une partie bornée A non vide est

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(a, b) = N(b - a)\,;\ (a, b) \in A \times A\}\,.$$

Si $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, la *boule ouverte*, la *boule fermée* et la *sphère* de *centre* x et de *rayon* r sont les ensembles bornés de diamètre $2r$ respectivement définis par

$$B(x; r) := \{y \in E\,;\ d(y, x) = N(y - x) < r\}\,, \quad \overline{B}(x; r) := \{y \in E\,;\ d(y, x) = N(y - x) \leq r\}\,,$$

$$S(x; r) := \{y \in E\,;\ d(y, x) = N(y - x) = r\}\,.$$

Noter que $\overline{B}(x; r) = B(x; r) \cup S(x; r)$.

Les boules sont *convexes*, c'est-à-dire que si a et b sont dans une boule (ouverte ou fermée), quel que soit $\theta \in [0, 1]$, $(1 - \theta)a + \theta b$ est dans cette même boule. Les sphères (de rayon strictement positif) ne sont pas convexes.

Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace E sont *équivalentes* si

$$\exists C > 0\,; \quad \forall x \in E\,,\ \tfrac{1}{C} N_1(x) \leq N_2(x) \leq C N_1(x)\,,$$

ce qui équivaut encore à :

$$\exists C_1 > 0,\ \exists C_2 > 0\,; \quad \forall x \in E\,,\ C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x)\,.$$

Si E est de *dimension finie*, toutes les normes sont équivalentes. C'est faux en dimension infinie.

Normes classiques sur $\mathbb{R}^n$

- La *valeur absolue* définit une norme sur $\mathbb{R}$. Le *module* définit une norme sur $\mathbb{C}$.
- Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,, \quad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\,, \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_j|\,,\ j \in \{1, \ldots, n\}\}\,.$$

L'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$, appelée *norme eucidienne*, résulte de l'*inégalité de Cauchy–Schwarz* : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,,\ |(x \cdot y)| \leq \|x\|_2\,\|y\|_2\,,$ où $(x \cdot y)$ est le *produit scalaire* de x et y, défini par $(x \cdot y) := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Ces normes sont équivalentes deux à deux en vertu de :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n\,,\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty\,,\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty\,,\ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2}$$

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

Normes analogues sur $\mathbb{C}^n$ Pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\|z\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |z_j|\,, \quad \|z\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2}\,, \quad \|z\|_\infty := \max\{|z_j|\,,\ j \in \{1, \dots, n\}\}\,.$$

Normes classiques en dimension infinie Sur l'espace vectoriel des séries numériques $u = \sum u_n$ *absolument convergentes*, on définit une norme par :

$$\|u\|_1 := \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\,.$$

Sur l'espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues et *absolument intégrables* sur un intervalle I, on définit une norme par :

$$\|f\|_1 := \int_I |f(t)|\mathrm{d}t\,.$$

Sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ des fonctions f continues sur le segment $[a,b]$ (avec $a < b$), on définit les normes suivantes :

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t\,, \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t}\,, \quad \|f\|_\infty := \max_{t\in[a,b]} |f(t)|\,.$$

Espaces produits Si $(E_1, \dots, E_d)$ est une famille d'espaces vectoriels normés munis respectivement de normes N_1, ..., N_d, on définit sur le *produit cartésien* $E_1 \times \cdots \times E_d$ les normes équivalentes suivantes : pour $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) \in E$,

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{j=1}^{d} N_j(\mathbf{x}_j)\,, \quad \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} N_j(\mathbf{x}_j)}\,, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{N_j(\mathbf{x}_j)\,,\ j \in \{1, \dots, d\}\}\,.$$

Suites et séries dans les espaces vectoriels normés Si E est un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$, une *suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E (c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans E) est :

- *bornée* si la suite numérique $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est majorée, ou de façon équivalente s'il existe une boule contenant tous les termes x_n ;
- *convergente* s'il existe $\ell \in E$ tel que : $\boxed{\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,, \forall n \geq N\,,\ \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon}$.
  Dans ce cas, ℓ est unique, appelé *limite* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on a
  $\boxed{\ell = \lim(x_n) \quad \Leftrightarrow \quad 0_E = \lim(x_n - \ell) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \lim(\|x_n - \ell\|)}$.

Une suite bornée pour $\|\cdot\|$ l'est aussi pour toute norme équivalente à la norme $\|\cdot\|$.
Une suite convergente pour $\|\cdot\|$ l'est aussi pour toute norme équivalente à la norme $\|\cdot\|$.
La limite d'une suite convergente ne change pas si l'on change $\|\cdot\|$ pour une norme équivalente. Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.
L'ensemble des suites convergentes est un *sous-espace vectoriel* de $E^{\mathbb{K}}$, et si on le note $E^{\mathbb{K}}_{\mathrm{cv}}$, l'application suivante est *linéaire* : $\begin{array}{ccc} E^{\mathbb{K}}_{\mathrm{cv}} & \to & E \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \lim(x_n)\,. \end{array}$

Une série $\sum x_n$ est *convergente* si, en posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_n$ pour tout n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Une série $\sum x_n$ est *normalement convergente* si la *série numérique* $\sum \|x_n\|$ converge.

Critère de Cauchy Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergente est de Cauchy, c'est-à-dire que :

$\boxed{\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,, \forall n \geq N\ , \forall p \in \mathbb{N}\,,\ \|x_n - x_{n+p}\| \leq \varepsilon}$.

Dans un espace vectoriel normé de *dimension finie*, une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy. En particulier, une série $\sum x_n$ est convergente si et seulement si :

$\boxed{\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,, \forall n \geq N\ , \forall p \in \mathbb{N}\,,\ \left\|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right\| \leq \varepsilon}$. C'est faux en dimension infinie en général.

Dans un espace vectoriel normé de *dimension finie*, toute série normalement convergente est convergente.

Théorème de Bolzano–Weierstrass Dans un espace vectoriel normé de *dimension finie*, toute suite bornée admet une *sous-suite* (encore appelée *suite extraite*) convergente. (C'est faux en dimension infinie.)

Notions de topologie

• VOISINAGES • Une partie V d'un espace vectoriel normé E est un *voisinage* d'un élément x de E si et seulement si : $\exists r > 0\,,\ \overline{B}(x; r) \subset V$.
Une boule ouverte $B(x; \rho)$ ou fermée $\overline{B}(x; \rho)$ de rayon $\rho > 0$ est un voisinage de son centre x.
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si et seulement si :
$\boxed{\forall V \text{ voisinage de } \ell\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,, \forall n \geq N\,,\ x_n \in V}$.

• POINTS INTÉRIEURS • Un élément x de E est dit *intérieur* à une partie A de E si et seulement si A est un voisinage de x, c'est-à-dire : $\exists r > 0\,,\ \overline{B}(x; r) \subset A$. L'*intérieur* de A, noté $\mathring{A}$ est l'ensemble des points intérieurs à A, c'est-à-dire que $\mathring{A} = \{x \in E\,;\ \exists r > 0\,,\ \overline{B}(x; r) \subset A\}$

• OUVERTS • Une partie U de E est un *ouvert* si et seulement si : $\forall x \in U\,, \exists r > 0\,,\ \overline{B}(x; r) \subset U$.
L'ensemble vide $\varnothing$, l'espace entier E, et toutes les boules ouvertes sont des ouverts. Les boules fermées et les sphères ne sont pas des ouverts. Toute *réunion* d'ouverts est un ouvert. L'*intersection* d'un *nombre fini* d'ouverts est un ouvert.

• FERMÉS • Une partie F de E est un *fermé* si et seulement si son *complémentaire* $E\backslash F$ est ouvert.
L'ensemble vide $\varnothing$, l'espace entier E, les *singletons*, les boules fermées et les sphères sont des fermés.
Une partie A de E est un fermé si et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente, on a $\lim(a_n) \in A$.

• COMPACTS • Une partie A d'un espace vectoriel normé E est un *compact* si et seulement si toute suite de A admet une sous-suite convergente dont la limite appartient à A.
Tout compact est fermé et borné. Tout segment $[a, b]$ (avec $a < b$) de $\mathbb{R}$ est compact. Les compacts de $\mathbb{R}^d$ sont les fermés bornés. (C'est faux en dimension infinie.)

Fonctions entre espaces vectoriels Une fonction $f : D \to F$, où $D \subset E$ (E et F étant des espaces vectoriel normés) est *continue* en $x \in D$ si

$\boxed{\forall V \text{ voisinage de } f(x) \text{ dans } F\ ,\ \exists W \text{ voisinage de } x \text{ dans } E\,; \forall y \in D\,,\ y \in W \Longrightarrow f(y) \in V}$

ou de façon équivalente,

$\boxed{\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,; \forall y \in D\,,\ \|y - x\|_E \leq \eta \implies \|f(y) - f(x)\|_F \leq \varepsilon}$

Toute fonction *Lipschitzienne* (c'est-à-dire telle que : $\exists k > 0\,,\ \forall x, y \in D\,,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$) est continue. En particulier, la norme $N : x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est continue.

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

La somme de deux fonctions continues est continue. Le produit d'une fonction *scalaire* continue avec une fonction (vectorielle) continue est continu.

La *composée*, $g \circ f : D \to G$, de deux fonctions continues, $f : D \to F$ et $g : B \to G$ avec $f(D) \subset B$, est continue. (La fonction *réciproque* d'une fonction continue bijective n'est pas nécessairement continue.)

L'*image* $f(K)$ d'un compact K par une fonction continue f est un compact.

La continuité d'une application *linéaire* $u : E \to F$ est caractérisée par l'une quelconque des propriétés suivantes (qui sont donc toutes équivalentes) :

- il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$,
- l'application u est Lipschitzienne,
- l'application u est continue en 0_E,
- l'application u est bornée sur la boule fermée unité $\overline{B}(0; 1)$.

Sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F, on définit la *norme subordonnée* à celles de E et F par

$$\begin{array}{ccl} \mathscr{L}_c(E;F) & \to & \mathbb{R}^+ \\ u & \mapsto & |||u||| = \sup\{\|u(x)\|_F\,;\ \|x\|_E \leq 1\} \end{array}$$

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les applications linéaires $E \to F$ sont continues. C'est faux si E n'est pas de dimension finie.