Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème sera sur environ 25 pour tenir compte de la longueur du sujet.

Exercice 1. Pour $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$, on définit la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & a & c \\ 2 & 2 & d \\ a & b & e \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ pour que la matrice A soit une matrice orthogonale.
2. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ que l'on munit du produit scalaire défini par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{2} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{2} b_k X^k \in E, \quad \langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$$

   et orienté par la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}_c$ est A. Montrer qu'il existe un unique $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ que l'on déterminera pour lequel f est une rotation de E. Dans la suite, on notera r cette rotation.
3. Déterminer l'axe D de la rotation r.
4. Choisir une orientation de D puis déterminer l'angle orienté de la rotation r (modulo $[2\pi]$).

Exercice 2. Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \qquad M \to (A+M)^2 + (\operatorname{tr} M)A \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \text{ et } f(0,0) = 0.$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les expliciter.
2. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4. La question 1 est indépendante des autres questions.

Soient E un espace euclidien et $u \in O(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$.
2. On pose $v = u + u^*$.
   (a) Montrer que si u est une symétrie orthogonale, alors v n'est pas un endomorphisme orthogonal de E.
   (b) On suppose que $\dim(E) = 2$. Déterminer l'ensemble des $u \in O(E)$ tels que $v = u + u^* \in O(E)$ aussi.

Exercice 5. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et on définit l'endomorphisme u de E par

$$\forall f \in E, \quad u(f) : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) - f(0) \end{array}$$

On rappelle que l'on peut définir des normes sur E en posant :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |f(t)| \, .$$

1. Montrer que u est continue sur E pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(t) = (n+1)(1-t)^n$. Calculer explicitement $\|f_n\|_1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. L'application u est-elle continue pour la norme $\| \cdot \|_1$?

Correction du Devoir Surveillé 4 - partie commune