Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2012-2013

Math III - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Problème 1. Approximation de $\ln 2$.

Soit $x \in]-1;1]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'égalité :
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$
2. En déduire l'égalité :
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
3. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ est convergente, de somme $\ln(1+x)$.
(Rappel : on ne peut pas intervertir en général une limite et une intégrale.)
4. Démontrer les relations :
$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{et} \quad \ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}.$$
5. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de réels qui converge vers 0.
   (a) Justifier **avec précision** que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.
   (b) Soient $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k$.
      i. Démontrer que la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ est décroissante.
      ii. Retrouver à partir de la question précédente le résultat de la question 5a.
      iii. Démontrer que S vérifie, pour tout $n \geq 1$, l'encadrement :
$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}.$$
   (c) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $|S - S_n| \leq u_n$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un entier N_p tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-p}, pour tout $n \geq N_p$.
7. Soit $p \in \mathbb{N}$. On se propose de calculer une valeur de $\ln 2$ à 10^{-p} près en utilisant les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$.
   (a) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$. Justifier l'encadrement : $0 \leq R_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

(b) Déterminer un entier N'_p tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-p}, pour tout $n \geq N'_p$.

(c) Comparer N_p (introduit dans la question 6) et N'_p.

Problème 2. Intégrales de Bertrand.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On veut étudier la nature de l'intégrale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t.$$

(Les intégrales de Riemann sont supposées connues, mais pas les intégrales de Bertrand.)

1. On suppose $\alpha > 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{t^\gamma}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \longrightarrow 0$ quand t tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire la convergence de l'intégrale étudiée.
2. On suppose $\alpha = 1$.
   (a) Soit $x > e$. Calculer $\displaystyle\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Déterminer pour quels $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale étudiée converge.
3. On suppose enfin $\alpha < 1$.
   (a) Déterminer la limite de $\dfrac{t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire la nature de l'intégrale étudiée.
4. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :
   (a) $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$,
   (b) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

   On justifiera avec précision la convergence des intégrales considérées.

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie CCP

Correction du problème 1 :

1. On part de la somme $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k$. Celle-ci est géométrique, de raison $-x$, qui est différent de 1 puisque $x \in]-1;1]$. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k &= \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}\\ &= \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}\end{aligned}$$

2. Il s'agit d'intégrer l'égalité de la question 1 entre 0 et x :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt\right).$$

La linéarité de l'intégrale, un calcul de primitive et un changement d'indice donnent :

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^x t^k dt + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt\end{aligned}$$

3. On fait d'abord le cas $x \geq 0$. Il s'agit de montrer que la suite d'intégrales du membre de droite converge vers 0. Pour cela, on utilise l'inégalité triangulaire puis on minore le dénominateur de la fonction à intégrer ; on termine par un calcul de primitive :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt\right| &\leq \int_0^x \left|\frac{(-1)^n t^n}{1+t}\right| dt\\ &\leq \int_0^x t^n dt\\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &\leq \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Le théorème des gendarmes montre que la suite d'intégrales $\left(\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0. Ainsi la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ est convergente, de somme $\ln(1+x)$.

Si $x < 0$, alors le même calcul puis le changement de variable $u = -t$ donnent :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt\right| &\leq \int_x^0 \left|\frac{(-1)^n t^n}{1+t}\right| dt\\ &\leq \int_x^0 |t|^n dt\\ &= \int_x^0 (-t)^n dt\\ &= \int_0^{-x} u^n du\end{aligned}$$

On conclut de la même manière.

4. Pour obtenir la première égalité, on évalue l'égalité $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \ln(1+x)$ que l'on a obtenue à la question 3 en $x=1$, ce qui donne directement le résultat.

   Pour la seconde égalité, on utilise les propriétés du logarithme ; on évalue l'expression précédente en $x=-\frac{1}{2}$, ce qui est possible puisqu'il appartient à l'intervalle $]-1;1]$:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

   Cela donne :

$$-\ln 2 = \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{(-1)^k}{2^k} \text{ soit } \ln 2 = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k2^k}.$$

5. (a) On montre que les réels u_n sont tous positifs. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que $u_{n_0} < 0$. La décroissance de $(u_n)_{n\geq 0}$ donne alors $u_n \leq u_{n_0} < 0$ pour tout $n \geq n_0$. Faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq u_{n_0} < 0$ et en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < 0$, ce qui contredit le fait que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Ainsi $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$.

   Ainsi les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sont tous positifs, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers 0, donc le critère des séries alternées montre que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

   (b) i. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. La décroissance de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ donne :

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k-1}u_k - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}u_k = (-1)^{2n}u_{2n+1} + (-1)^{2n+1}u_{2n+2} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geq 0.$$

   Puis, elle donne :

$$S_{2(n+1)-1} - S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}u_k - \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}u_k = (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1} - u_{2n} \leq 0.$$

   Ainsi la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante et la suite $(S_{2n-1})_n$ est décroissante.

   ii. D'une part, la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante et la suite $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ est décroissante. D'autre part, la différence $S_{2n} - S_{2n-1} = (-1)^{2n-1}u_{2n} = -u_{2n}$ tend vers 0 puisque la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Donc les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Elles convergent donc toutes les deux, vers la même limite. Cela montre que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge, donc la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}u_n$ converge, ce qui implique aussi la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n u_n$.

   iii. Comme la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ converge vers S en croissant, on a $S_{2n} \leq S$ pour tout $n \geq 1$. Sinon il existerait n_0 tel que $S_{2n_0} > S$. La croissance de (S_{2n}) montrerait alors que $S_{2n} \geq S_{2n_0} > S$ pour tout $n \geq n_0$ et un passage à la limite donnerait $S > S$, ce qui est absurde.

   De même, la suite $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ converge vers S en décroissant, donc on obtient $S_{2n-1} \geq S$ pour tout $n \geq 1$.

   (c) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. L'encadrement $S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}$ donne $0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n-1} - S_{2n} = u_{2n}$, puis , par décroissance de la suite $(u_n)_n$, $-u_{2n-1} \leq -u_{2n} = S_{2n} - S_{2n-1} \leq S - S_{2n-1} \leq 0$. Ainsi $|S - S_n| \leq u_n$.

6. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Comme la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs positives, le critère des séries alternées montre que la série de terme général $(-1)^{n-1}u_n$ converge. De plus, la question 4 montre que celle-ci converge vers $\ln 2$.

   Maintenant, on veut estimer la différence entre les sommes partielles de cette série et sa somme. On veut donc estimer le reste de cette série. On veut que le reste d'ordre n de la série soit majoré en valeur absolue par 10^{-p}. Or la question 5c montre que la valeur absolue du reste d'ordre n d'une série alternée est majorée par u_n. Comme la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, il suffit de trouver N_p tel que $u_{N_p} \leq 10^{-p}$ et on aura $u_n \leq 10^{-p}$ pour tout $n \geq N_p$. Il suffit donc de trouver N_p tel que $\dfrac{1}{N_p} \leq 10^{-p}$. On pose donc $N_p = 10^p$.

7. (a) Le fait que R_n est positif est clair. Puis, on a $\dfrac{1}{k2^k} \leq \dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{2^k}$ pour tout $k \geq n+1$. Ainsi on trouve :

$$R_n \leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n(n+1)}.$$

On obtient l'inégalité voulue puisque $n+1 \geq 1$.

(b) Il suffit que le reste d'ordre n de la série soit majoré en valeur absolue par 10^{-p}. Or la question 7a montre que la valeur absolue du reste d'ordre n est majorée par $\dfrac{1}{2^n}$. Ainsi il suffit de trouver N'_p tel que $2^{-N'_p} \leq 10^{-p}$. Comme la série est à termes positifs, le reste d'ordre n de la série sera alors majoré par 10^{-p} pour tout $n \geq N'_p$. Il suffit donc de trouver N'_p tel que $2^{-N'_p} \leq 10^{-p}$. On note donc N'_p le plus petit entier supérieur ou égal à $p\dfrac{\ln 10}{\ln 2}$.

(c) Comme $10^p > \left\lceil p\dfrac{\ln 10}{\ln 2}\right\rceil$ (ce que l'on peut prouver en montrant que la fonction $p \longmapsto 10^p - \dfrac{\ln 10}{\ln 2}p$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$), on a $N_p > N'_p$, donc la convergence de la seconde série est plus rapide.

Correction du problème 2 :

1. (a) Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{t^\gamma}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \dfrac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln t)^\beta}$ pour tout $t \geq e$. Par croissance comparée du logarithme, on sait que si $a < 0$, alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^a}{(\ln t)^b} = 0$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour que la limite en $+\infty$ de $\dfrac{t^\gamma}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ soit nulle, il suffit que l'on ait $\gamma < \alpha$.
De plus, vue la question suivante, on veut que $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = o\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$ quand t tend vers $+\infty$, avec $\gamma > 1$. Ainsi, on cherche un réel γ, qui soit strictement plus grand que 1 et strictement plus petit que α. Comme on a supposé $\alpha > 1$, cela est possible. Il suffit par exemple de prendre $\gamma = \dfrac{\alpha+1}{2}$. Alors $\gamma < \alpha$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^\gamma}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = 0$.

(b) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est continue sur l'intervalle $[e;+\infty[$. De plus, la question précédente montre que $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = o\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$ quand t tend vers $+\infty$, avec $\gamma > 1$. Comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est à valeurs positives sur $[e;+\infty[$, le critère de Riemann montre que l'intégrale considérée est convergente.

2. (a) Il s'agit de faire un calcul de primitive. On sépare deux cas, suivant si $\beta = 1$ ou $\beta \neq 1$.

- Si $\beta = 1$, alors on a :

$$\begin{aligned}\int_e^x \frac{1}{t\ln t} &= [\ln(\ln t)]_e^x \\ &= \ln(\ln x)\end{aligned}$$

- Si $\beta \neq 1$, alors on a :

$$\begin{aligned}\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta} &= \left[\frac{1}{1-\beta}\frac{1}{(\ln t)^{1-\beta}}\right]_e^x \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln x)^{1-\beta}} - 1\right)\end{aligned}$$

(b) On sépare deux cas, suivant si $\beta = 1$ ou $\beta \neq 1$.

- Si $\beta = 1$, alors on a :
$$\int_e^x \frac{1}{t \ln t} = \ln(\ln x).$$
Comme $\lim_{x \to +\infty} \ln(\ln x) = +\infty$, l'intégrale considérée est divergente.
- Si $\beta \neq 1$, alors on a :
$$\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln x)^{1-\beta}} - 1\right).$$
Si $\beta > 1$, alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(\ln x)^{1-\beta}} = 0$, ce qui montre que l'intégrale est convergente. Si $\beta < 1$, alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(\ln x)^{1-\beta}} = +\infty$, ce qui montre que l'intégrale est divergente.
En conclusion, l'intégrale est convergente si et seulement si $\beta > 1$.

3. (a) Pour tout $t > e$, on a $\frac{t}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-1}(\ln t)^\beta}$. Comme $\alpha - 1 < 0$, la croissance comparée du logarithme montre que $\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = +\infty$.
(b) Comme $\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = +\infty$, la définition de la limite montre qu'il existe t_0 tel que $\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \geq \frac{1}{t}$ pour tout $t \geq t_0$. Le théorème de comparaison montre que l'intégrale diverge.

4. (a) La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est continue sur $[e; +\infty[$. Remarquons que le critère de Bertand montre que cette fonction est intégrable sur $[e; +\infty[$. On fait une comparaison série-intégrale. On fixe $n \geq 4$ et $N \geq n$.
Pour tout $k \geq n+1$, pour tout $t \in [k; k+1]$, la décroissance de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ donne $\frac{1}{t(\ln t)^2} \leq \frac{1}{k(\ln k)^2}$. On intègre cette inégalité entre k et $k+1$, puis on somme ces inégalités entre $n+1$ et N :
$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t(\ln t)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$
Pour tout $k \geq n+1$, pour tout $t \in [k-1; k]$, la décroissance de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ donne $\frac{1}{t(\ln t)^2} \geq \frac{1}{k(\ln k)^2}$. On intègre cette inégalité entre $k-1$ et k, puis on somme ces inégalités entre $n+1$ et N :
$$\int_{n}^{N} \frac{dt}{t(\ln t)^2} \geq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$
On obtient ainsi l'encadrement :
$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t(\ln t)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_{n}^{N} \frac{dt}{t(\ln t)^2}.$$
Un calcul de primitive donne :
$$\frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(N+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln N}.$$
On fait alors tendre N vers $+\infty$ et on obtient :
$$\frac{1}{\ln(n+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \frac{1}{\ln n}.$$
Cela montre d'une part la convergence de la suite $(R_n)_{n\geq 4}$ et d'autre part l'équivalent :
$$R_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}.$$

(b) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1;+\infty[$. Remarquons que le critère de Riemann montre que cette fonction n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$. On fait une comparaison série-intégrale. On fixe $n \geq 1$. Pour tout $k \geq 1$, pour tout $t \in [k;k+1]$, la décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donne $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. On intègre cette inégalité entre $k+1$ et k, puis on somme ces inégalités entre 1 et n :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{dt}{\sqrt{k}}.$$

Pour tout $k \geq 2$, pour tout $t \in [k-1;k]$, la décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donne $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. On intègre cette inégalité entre $k-1$ et k, puis on somme ces inégalités entre 2 et n :

$$\int_1^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}} \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{dt}{\sqrt{k}}.$$

On obtient ainsi l'encadrement :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Un calcul de primitive donne :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}.$$

Cela donne l'équivalent :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$