Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2014-2015

Math III - PMI Durée : 1 heure et trente minutes

Devoir numéro 3

Questions. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? on donnera une petite démonstration ou un contre-exemple.

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Dans un espace vectoriel normé une intersection quelconque de fermés est un fermé.

réponse : Vraie. Soit $x \in \left(E\backslash \cap_{i\in I} F_i\right)$ où F_i, $i \in I$ est une famille quelconque de fermés de E. Alors $\exists\, j \in I$ tel que $x \in E\backslash F_j$ car $E\backslash \cap_{i\in I} F_i = \cup_{i\in I} E\backslash F_i$. Or $E\backslash F_j$ est un ouvert contenu dans $E\backslash \cap_{i\in I} F_i$. Ce qui prouve que $E\backslash \cap_{i\in I} F_i$ est un ouvert. D'où le résultat.

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Dans un espace vectoriel normé une intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.

réponse : Fausse. En effet la famille des intervalles $]-1/n, 1/n[, n \in \mathbb{N}^*$ est une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}$ dont l'intersection est $\{0\}$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Correction 1.
1. Soit $x \in E$ et $D = E\backslash\{x\}$. Pour $y \in D$, posons $r = \|x - y\| > 0$. Alors la boule ouverte $B(y, r)$ de centre y et de rayon r est bien incluse dans D. Donc D est un ouvert par suite son complémentaire $\{x\}$ est un fermé.
2. Si F est une partie finie, alors il est une réunion finie de singleton ($F = \cup_{a\in F}\{a\}$) et, donc, c'est un fermé.
   remarque
   C'est une application du résultat du cours : une réunion finie de fermés est un fermé.

Correction 2. d_2 ainsi définie est bien une application.

Soient x et y deux éléments de X. On a

1)

$$d_2(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{d_1(x, y)}{1 + d_1(x, y)} = 0 \Rightarrow d_1(x, y) = 0 \Rightarrow x = y \tag{1}$$

car d_1 est une distance.

2)

$$d_2(x, y) = \frac{d_1(x, y)}{1 + d_1(x, y)} = \frac{d_1(y, x)}{1 + d_1(y, x)} = d_2(y, x) \tag{2}$$

3) Soit $z \in X$. le fait que d_1 soit une distance implique

$$d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$$

la croissance de la fonction $t \to \dfrac{t}{1+t}$ implique par l'inégalité précédente

$$\frac{d_1(x, z)}{1 + d_1(x, z)} \leq \frac{d_1(x, y) + d_1(y, z)}{1 + d_1(x, y) + d_1(y, z)}$$

c'est à dire que

$$d_2(x, y) \leq \frac{d_1(x, y)}{1 + d_1(x, y) + d_1(y, z)} + \frac{d_1(y, z)}{1 + d_1(x, y) + d_1(y, z)} \tag{3}$$

$$d_2(x, z) \leq \frac{d_1(x, y)}{1 + d_1(x, y)} + \frac{d_1(y, z)}{1 + d_1(y, z)}$$

car $d_1(x, y) \geq 0$ et $d_1(y, z) \geq 0$ d'où

$$d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$$

Conclusion : les relation (1)–(3) prouvent que d_2 est bien une distance sur X.

Correction 3. 1. • Concernant l'ensemble A on remarque que $\forall\, x \in [0,1]$ on a $\cos(x) \geq 0$; ainsi l'ensemble A est le produit d'intervalles $[0,1] \times [0,1]$. De plus pour $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$; $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}$ ce qui prouve que A est borné.

Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers (x,y) :

$x_n \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ par passage à la limite.

De même

$y_n \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq y_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 1$ par passage à la limite.

D'où le couple $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$.

Conclusion : A est bien un fermé d'après la caractérisation séquentielle sur les fermés.

• Concernant l'ensemble B, il évident de voir qu'il est borné car $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n} \leq 1$.

Supposons par absurde que B soit un fermé de $\mathbb{R}$, alors toute suite convergente d'éléments de B admet une limite dans B. Or la suite $(\dfrac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de B qui converge vers 0 par suite $0 \in B$ ce qui est absurde par définition de B. Doù B n'est pas un fermé d'après le principe de raisonnement par l'absurde.

2. A est compact car c'est un fermé, borné de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie.

B n'est pas compact de $\mathbb{R}$ car c'est pas un fermé.