**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2014-2015

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

## Partie CCP - Devoir numéro 2

---

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ;* ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $n$ un entier naturel.

### Partie A - Résultats préliminaires :

Dans cette partie, on établit quelques résultats préliminaires qui pourront être utilisés dans les deux parties suivantes.

1. Pour $n \geq 1$, on pose : $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.
   (a) Étudier la nature de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge. On note $\gamma$ sa limite.
2. Pour $x$ élément de $]0, +\infty[$, on considère l'application $h_x$ de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$h_x(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$$
   (a) Déterminer le tableau de variation de $h_x$.
   (b) Justifier les inégalités : $\forall n \geq 3$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\ln(n)}{n}$ et $\forall n \geq 4$, $\displaystyle\frac{\ln(n)}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
   (c) Prouver (sans utiliser les séries de Bertrand) que la série $\sum(-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.
   (d) À l'aide de la question 2b, déterminer un équivalent lorsque $N$ tend vers $+\infty$ de la somme partielle de rang $N$ : $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n}$.

On pose pour la suite :
$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}.$$

### Partie B :

On note $F$ l'application de $]1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour $n \geq 1$, on considère l'application $\phi_n$ de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\phi_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
Dans cette partie on étudie d'abord le comportement de $F(x)$ lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs supérieures, ensuite la série de fonctions $\sum \phi_n$, puis on détermine la valeur de $S$.

3. Pour $n \geq 1$, on considère les applications $v_n$ et $w_n$ de $[1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\, dt$$

   (a) i. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la fonction $v_n$ est bornée par 2.

   ii. Justifier succintement l'existence et exprimer $v_n'(x)$ pour tout $x \in [1; +\infty[$ à l'aide de la fonction $h_x$ définie dans la partie A.

   iii. Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ est normalement convergente sur $[1, +\infty[$.

   (b) i. Pour tout $n \geq 1$, donner une expression explicite de $w_n(x)$ ne faisant plus apparaître d'intégrale, pour $x \in [1; +\infty[$.

   ii. En déduire que pour $n \geq 1$, $w_n$ est continue sur $[1, +\infty[$.

   iii. Montrer que $\forall x \geq 1,\ \forall n \geq 1,\ 0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$.

   iv. On considère la fonction $W$ définie par $W = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.
   Démontrer que $W$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

   (c) i. Montrer que $\forall x > 1,\ W(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}$.

   ii. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \left( F(x) + \frac{1}{1-x} \right)$ (on exprimera le résultat en fonction de $\gamma$).

4. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum \phi_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

   (b) Soit $a$ un élément de $]0, +\infty[$. Démontrer que la série de fonctions $\sum \phi_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

   (c) On considère la fonction $\phi$ définie par $\phi = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n$.

   i. Montrer que $\phi$ est définie et de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$.

   ii. Exprimer $\phi'(1)$ sous forme de somme d'une série.

5. (a) Établir que : $\forall x > 1,\ \phi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x)$.

   (b) Déterminer un développement limité de $1 - 2^{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1.

   (c) Déterminer un développement limité de $\phi(x)$ à l'ordre 1 au voisinage de 1. (On pourra utiliser le résultat de la question 3(c)ii.)

   (d) En déduire la valeur de $S$.

## Correction du Devoir Surveillé 2 - partie CCP

**Partie A - Résultats préliminaires :**

1. (a) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \\ &\sim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $|u_{n+1} - u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument.

(b) La série précédente est une série téléscopique. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, alors la somme partielle s'écrit par téléscopage

$$\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) < +\infty$$

donc la suite $(u_n - u_1)_{n\geq 2}$ converge ce qui démontre la convergence de la suite $(u_n)_n$.

2. (a) La fonction $h_x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $t > 0$, on a

$$h_x'(t) = \frac{\frac{1}{t}t^x - \ln(t)xt^{x-1}}{(t^x)^2} = \frac{1 - x\ln(t)}{t^{x+1}}$$

ce qui donne le tableau de variations

| $t$ | $0$ | | $e^{1/x}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h_x(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{ex}$ | $\searrow$ | $0$ |

(b) On a pour $x = 1$ : la fontion $h_1$ est décroissante sur $[e; +\infty[$, or pour tout $n \geq 3$, $[n; n+1] \subset [e; +\infty[$, donc on peut écrire

$$\forall t \in [n; n+1], \quad h_1(t) \leq h_1(n) \quad \text{d'où} \quad \int_n^{n+1} h_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} h_1(n)\,\mathrm{d}t \quad \text{i.e.} \quad \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\ln n}{n}.$$

De même, pour tout $n \geq 4$, $[n-1; n] \subset [e; +\infty[$ et en intégrant l'inégalité $h_1(n) \leq h_1(t)$ sur le segment $[n-1; n]$, on obtient l'autre inégalité demandée.

(c) Posons pour tout $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$. On a :

- Pour tout $n \geq 1$, $(-1)^n a_n = \frac{\ln n}{n} \geq 0$ donc la suite $(a_n)_n$ est alternée.
- Par croissance comparée, $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- La suite $(|a_n|) = (h_1(n))_n$ est décroissante à partir du rang $n = 3$.

On en conclue que la série $\sum a_n$ converge d'après le critère des séries alternées.

De plus, pour tout $n \geq 3$, $|a_n| = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$, et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ ne converge pas absolument.

(d) En sommant la première inégalité de la question 2b de $n = 3$ à $N$ (où $N \geq 3$ est fixé), on obtient par Chasles

$$\int_3^{N+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=3}^{N} \frac{\ln n}{n}$$

et en sommant la deuxième égalité de $n = 4$ à $N$ (où $N \geq 4$ fixé), on trouve

$$\sum_{n=4}^{N} \frac{\ln n}{n} \leq \int_3^{N} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On additionne alors les termes manquants pour retrouver la somme partielle $S_N$ ce qui entraîne après calculs des intégrales : pour tout $N \geq 4$,

$$\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_3^{N+1} + \frac{\ln 2}{2} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n} = S_N \leq \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_3^{N} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}$$

d'où

$$\frac{\ln(N+1)^2 - (\ln 2)^2 + \ln 2}{(\ln N)^2} \leq \frac{S_N}{\frac{1}{2}(\ln N)^2} \leq 1 - \frac{(\ln 3)^2 + \ln 2 + \ln 3}{(\ln N)^2}$$

ce qui démontre grâce au théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{S_N}{\frac{1}{2}(\ln N)^2} = 1$ et ainsi $S_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln N)^2}{2}$.

**Partie B :**

3. (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a

$$|v_n(x)| = \left|\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right| \leq \frac{1}{n^x} + \frac{1}{(n+1)^x} \leq 2$$

puisque $\dfrac{1}{n} \leq 1$, $\dfrac{1}{(n+1)} \leq 1$ et la fonction $t \longmapsto t^x$ est croissante puisque $x$ est positif. Ainsi, la fonction $v_n$ est bornée par 2 sur $[1; +\infty[$.

ii. Puisque $v_n : x \in [1; +\infty[ \longmapsto e^{-x\ln n} - e^{-x\ln(n+1)}$, la fonction $v_n$ est dérivable comme différence de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a

$$v_n'(x) = -\ln(n)e^{-x\ln n} + \ln(n+1)e^{-x\ln(n+1)} = -\frac{\ln n}{n^x} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} = h_x(n+1) - h_x(n).$$

iii. On a déjà démontré à la question 3(a)i que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $v_n$ est bornée sur $[1; +\infty[$. De plus, pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a $v_n'(x) = h_x(n+1) - h_x(n)$. Soit $x \in [1; +\infty[$ fixé. D'après la question 2a, la fonction $h_x$ est décroissante sur $[e^{1/x}; +\infty[$. Or $x \geq 1$ d'où $e^{1/x} \leq e \leq 3$, donc pour tout $n \geq 3$, $h_x(n+1) \leq h_x(n)$ ce qui démontre que $v_n'(x) \leq 0$. Ainsi, pour tout $n \geq 3$, la fonction $v_n$ est décroissante sur $[1; +\infty[$, ce qui entraîne

$$\|v_n\|_{\infty,[1;+\infty[} = \sup_{x\in[1;+\infty[} |v_n(x)| = \sup_{x\in[1;+\infty[} v_n(x) = v_n(1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Puisque la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge (car son terme général équivaut à $\dfrac{1}{n^2}$ lorsque $n \to +\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, ou par calcul direct de la limite de ses sommes partielles puisque c'est une série téléscopique), la série $\sum \|v_n\|_{\infty,[1;+\infty[}$ converge, et la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$.

(b) i. Soient $n \geq 1$ et $x \in [1;+\infty[$. Pour $x \neq 1$, on a

$$w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^x} - \left[\frac{1}{1-x}\frac{1}{t^{x-1}}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{n^x} + \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}}\right)$$

et

$$w_n(1) = \frac{1}{n} - [\ln t]_n^{n+1} = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

ii. Soit $n \geq 1$, la fonction $w_n$ est continue sur l'ouvert $]1;+\infty[$ comme somme de fonctions continues. Pour montrer que $w_n$ est continue sur $[1;+\infty[$, il nous suffit donc de montrer que $\lim\limits_{x\to 1^+} w_n(x) = w_n(1) = \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$. Puisque l'on a déjà

$$\frac{1}{n^x} = e^{-x\ln n} \underset{x\to 1^+}{\to} e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$$

par continuité de l'exponentielle, on va se concentrer sur le deuxième terme apparaissant dans $w_n(x)$. Soit $x > 1$, on pose $u = x-1$ de sorte que $u \to 0^+$ si et seulement si $x \to 1^+$ et on fait un développement limité :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{n^x}\right) &= \frac{1}{u}\left(e^{-u\ln(n+1)} - e^{-u\ln n}\right)\\
&= \frac{1}{u}\left(1 - \ln(n+1)u - 1 + \ln(n)u + \underset{u\to 0^+}{o}(u)\right)\\
&= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \underset{u\to 0^+}{o}(1) \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $\lim\limits_{x\to 1^+} w_n(x) = \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = w_n(1)$ et achève la démonstration de la continuité de $w_n$ sur $[1;+\infty[$.

iii. Soient $x \in [1;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ (car $x \geq 0$), on obtient :

$$\forall t \in [n;n+1], \quad \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

d'où en intégrant sur $[n;n+1]$,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^x} \quad \text{d'où} \quad v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \geq w_n(x) \geq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^x} = 0.$$

iv. On a vu que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n$ est continue sur $[1;+\infty[$,
- pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [1;+\infty[$, $0 \leq w_n(x) \leq v_n(x) \leq \|v_n\|_{\infty,[1;+\infty[}$, ce qui démontre que la fonction $w_n$ est bornée sur $[1;+\infty[$ et sa norme sup vérifie

$$0 \leq \|w_n\|_{\infty,[1;+\infty[} = \sup_{x\in[1;+\infty[} |w_n(x)| \leq \|v_n\|_{\infty,[1;+\infty[}.$$

Comme la série $\sum \|v_n\|_{\infty,[1;+\infty[}$ converge (la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \|w_n\|_{\infty,[1;+\infty[}$ est aussi convergente, ce qui entraîne la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $\sum w_n$ sur $[1;+\infty[$.

D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction $W$ est continue sur $[1;+\infty[$.

(c) i. Soit $x > 1$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{n=1}^{N} w_n(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \frac{1}{x-1} \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \frac{1}{x-1} \left( \frac{1}{(N+1)^{x-1}} - 1 \right)$$

d'où en passant à la limite quand $N \to +\infty$ (puisque les séries intervenant convergent),

$$W(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}.$$

ii. D'après la question précédente, la limite demandée correspond à $\lim\limits_{x \to 1^+} W(x)$. Puisque $W$ est continue sur $[1; +\infty[$, on a $\lim\limits_{x \to 1^+} W(x) = W(1)$. Or $W(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1)$, on calcule donc pour $N \geq 1$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} w_n(1) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N} \ln n - \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) \\
&= \left( \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) - \ln N + \ln N + \ln 1 - \ln(N+1) \\
&= \underbrace{\left( \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) - \ln N}_{\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \gamma} - \underbrace{\ln \left( 1 + \frac{1}{N} \right)}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $\lim\limits_{x \to 1^+} \left( F(x) + \dfrac{1}{1-x} \right) = \gamma$.

4. (a) Soit $x \in ]0; +\infty[$ fixé/ On a $\phi_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = (-1)^{n-1} |\phi_n(x)|$. De plus, la suite numérique $(\phi_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante et converge vers 0 (car $x > 0$). D'après le critère des séries alternées, la série $\sum \phi_n(x)$ converge, ce qui démontre la convergence simple de la série de fonctions $\sum \phi_n$ sur $]0; +\infty[$.

(b) Soit $a \in ]0; +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\phi_n$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, on a $\phi_n'(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{-\ln n}{n^x} = (-1)^n h_x(n)$. Soit $x \in [a; +\infty[$. D'après l'étude faite en 2a, on sait que la fonction $h_x$ est décroissante à valeurs positives sur $[e^{1/x}; +\infty[$. Puisque $x \in [a; +\infty[$, on a $e^{1/x} \leq e^{1/a}$. Posons $N_0 = \lfloor e^{1/a} \rfloor + 1$ de sorte que si $n \in \mathbb{N} \geq N_0$, on a $n \geq e^{1/a}$. Alors,

- pour tout entier $n \geq N_0$, $(-1)^n \phi_n'(x) \geq 0$,
- la suite $(|\phi_n'(x)|)_{n \geq N_0} = (h_x(n))_{n \geq N_0}$ est décroissante,
- $h_x(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

ce qui entraîne que la série $\sum \phi_n'(x)$ converge par le critère des séries alternées. De plus, pour $n \geq N_0$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \phi_n'(x) \right| \leq \left| \phi_{n+1}'(x) \right| = \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a} = h_a(n)$$

donc $R_n$ est bornée sur $[a; +\infty[$ et puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq h_a(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre que la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a; +\infty[$. Par suite, la série de fonctions $\sum \phi_n'$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$.

(c) i. Soit $a \in ]0; +\infty[$.

- Pour tout $n \geq 1$, la fonction $\phi_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$.
- La série de fonctions $\sum \phi_n$ converge simplement sur $[a; +\infty[$ d'après 4a,

- La série de fonctions $\sum \phi_n'$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$ d'après 4b .

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, la fonction somme $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;+\infty[$, ceci pour tout $a>0$, donc $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ (la dérivation/continuité est une propriété locale).

ii. Toujours d'après le théorème, on a pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\phi'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\phi_n'(x)$ ce qui donne en particulier

$$\phi'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\phi_n'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=S.$$

5. (a) Soit $x>1$, on calcule la somme en séparant les termes pairs et impairs (possible car toutes les séries intervenant sont convergentes, pour une meilleure rédaction, on passe par les sommes partielles jusqu'à $2N+1$ et on fait tendre $N$ vers $+\infty$)) ce qui donne

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2p-1}}{(2p)^x}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2p}}{(2p+1)^x}\\ &= -\frac{1}{2^x}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^x}+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^x}\right)\\ &= (1-2\frac{1}{2^x})F(x)\\ &= (1-2^{1-x})F(x).\end{aligned}$$

(b) Lorsque $x\to 1$, on a $x-1\to 0$ d'où

$$\begin{aligned}1-2^{1-x} &= 1-e^{(1-x)\ln 2}\\ &= 1-\left(1+\ln 2(1-x)+\frac{(\ln 2)^2}{2}(1-x)^2+\underset{x\to 1}{o}((1-x)^2)\right)\\ &= \ln 2(x-1)-\frac{(\ln 2)^2}{2}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{o}((x-1)^2)\end{aligned}$$

(c) On sait que pour tout $x>1$, $\phi(x)=(1-2^{1-x})F(x)$. De plus, on a vu à la question 3(c)ii que $\lim_{x\to 1^+}\left(F(x)+\frac{1}{1-x}\right)=\gamma$ ce qui entraîne

$$F(x)=\gamma-\frac{1}{1-x}+\underset{x\to 1^+}{o}(1)=\gamma+\frac{1}{x-1}+\underset{x\to 1^+}{o}(1).$$

En regroupant ce développement limité avec celui obtenu à la question précédente, on trouve

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \left(\ln 2(x-1)-\frac{(\ln 2)^2}{2}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{o}((x-1)^2)\right)\left(\gamma+\frac{1}{x-1}+\underset{x\to 1^+}{o}(1)\right)\\ &= \ln 2+\ln 2\left(\gamma-\frac{\ln 2}{2}\right)(x-1)+\underset{x\to 1^+}{o}(x-1).\end{aligned}$$

(d) Puisque la fonction $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, on a d'après la formule de Taylor-Young

$$\phi(x) = \phi(1)+\phi'(1)(x-1)+\underset{x\to 1^+}{o}(x-1)$$

Par unicité de la partie principale du développement limité, on obtient donc $\phi'(1)=\ln 2\left(\gamma-\frac{\ln 2}{2}\right)$. Puisque l'on a vu que $S=\phi'(1)$, on trouve au final

$$S=\ln 2\left(\gamma-\frac{\ln 2}{2}\right).$$