Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2014-2015

Math III - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1. Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $u_n = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$,
2. $v_n = a^n n!$ avec $a \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 2. On considère l'application u définie pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ par $u(P) = P + (1-X)P'$ où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que u est linéaire. Est-ce un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. On note A cette matrice.
3. L'endomorphisme u est-il surjectif ? Déterminer une base de l'image de u ainsi qu'une base du noyau de u.
4. Expliquer brièvement pourquoi la famille $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Écrire (en le justifiant) la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. On note cette matrice D.
6. Quel relation lie les matrices A et D ? On donnera explicitement la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{3/4}} \mathrm{d}x$.

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E vérifiant $E = F \oplus G$. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ vérifiant $x = y + z$. Avec ces notations, on définit la symétrie $s : E \longrightarrow E$ sur F parallèlement à G par $s(x) = y - z$.

1. Montrer que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ où Id_E désigne l'application identité.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ u = \mathrm{Id}_E$.
   (a) Montrer que $F' = \{x \in E \mid u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de E. On admet que l'ensemble $G' = \{x \in E \mid u(x) = -x\}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.
   (c) À l'aide d'une analyse-synthèse, montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
   (d) Montrer que u est une symétrie (on précisera sur quel espace vectoriel, et parallèlement à quel espace vectoriel).

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Expliquer pourquoi la convergence de l'intégrale impropre $I_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a + 1}{e^{\sqrt{t}} - 1}\, \mathrm{d}t$ équivaut à l'intégrabilité sur $]0; +\infty[$ d'une fonction que l'on précisera.
2. Montrer que la fonction $f_a : t \longmapsto \dfrac{t^a + 1}{e^{\sqrt{t}} - 1}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ (quelle que soit la valeur de a).
3. Déterminer un équivalent de $t^a + 1$ lorsque t tend vers 0 (on pensera à distinguer les cas suivant le signe du réel a).
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'intégrale I_a converge.

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, de plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{e^{2n}} = e^{-n} = (e^{-1})^n$. Or la série $\sum e^{-n}$ est une série gémétrique de raison e^{-1} avec $|e^{-1}| < 1$, donc elle converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

2. Les termes v_n sont définis et positifs pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $a = 0$, la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ est constante égale à 1 donc elle converge, ce qui démontre la convergence de $\sum v_n$.

   Si $a > 0$, $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc chercher à appliquer la règle de d'Alembert.
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{a^n n!} = a(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty > 1$$
   ce qui démontre la divergence de $\sum v_n$.

Correction de l'exercice 2

1. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$. Par linéarité de la dérivation, on a
$$u(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2) + (1 - X)(\lambda P_1' + P_2') = \lambda u(P_1) + P_2$$
   ce qui démontre la linéarité de u. De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, P est de degré inférieur ou égal à 3, donc P' est de degré inférieur ou égal à 2, et ainsi $(1-X)P'$ de degré inférieur ou égal à 3. En sommant ce polynôme avec P, on obtient donc bien un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$, d'où $u : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. On calcule les images des vecteurs de $\mathcal{B}_c$ par u ce qui donne
$$u(1) = 1, \quad u(X) = 1, \quad u(X^2) = -X^2 + 2X \quad \text{et} \quad u(X^3) = -2X^3 + 3X^2.$$
   La matrice de u dans $\mathcal{B}_c$ s'écrit donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Les deux premières colonnes de A sont égales et les 3 dernières sont étagées, ce qui implique $\operatorname{rang}(A) = 3 \neq \dim \mathbb{R}_3[X] = 4$. L'ensomorphisme u n'est donc pas surjectif. La famille $(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2)$ est une famille de polynômes échelonnés en degrés, donc libre de $\operatorname{Im}(u)$ composée de 3 éléments. Comme $\dim \operatorname{Im}(u) = 3$, c'est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

   D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(u) = \dim \mathbb{R}_3[X] - \operatorname{rang}(u) = 1$. Comme le polynôme $X - 1$ appartient à $\operatorname{Ker}(u)$ et est non nul, $(X - 1)$ est une base de $\operatorname{Ker}(u)$.

4. La famille $\mathcal{B}$ est une famille de 4 polynômes échelonnés en degrés, donc libre, et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, ce qui démontre que $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale de $\mathbb{R}_3[X]$ et donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

5. On a déjà vu que $u(1) = 1$, $u(X - 1) = 0$. De plus, un simple calcul donne $u((X-1)^2) = -(X-1)^2$ et $u((X-1)^3) = -2(X-1)^3$ ce qui permet d'écrire (on rentre en colonne j les coordonnées de l'image par u du j-ième vecteur de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$) :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. La formule de changement de base s'écrit $D = Q^{-1}AQ$ où $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$ (on rentre en colonne j les coordonnées du j-ième vecteur de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}_c$).

Correction de l'exercice 3

1. Posons $f : x \in]0;1] \longmapsto \left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|$. La fonction f est continue sur $]0;1]$, à valeurs positives (donc intégrable sur $[\varepsilon;1]$ pour tout $\varepsilon > 0$). De plus, pour tout $x \in]0;1]$, on a l'encadrement $0 \leq \left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq 1$. Puisque la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $]0;1]$ (puisque $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1 < +\infty$), le théorème de comparaison de fonctions positives entraîne l'intégrabilité de f sur $]0;1]$. Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \mathrm{d}x$ converge.
2. On procède comme pour les intégrales semi-convergentes (les théorèmes de comparaison pour les fonctions positives ne donnant pas de résultat ici). Soit $X > \pi$, par une intégration par parties appliquée aux fonctions $u : x \longmapsto \dfrac{1}{x^{3/4}}$ et $v : x \longmapsto \sin x$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi; X]$, on a
$$\begin{aligned} \int_\pi^X \frac{\cos x}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\sin x}{x^{3/4}}\right]_\pi^X + \frac{3}{4}\int_\pi^X \frac{\sin x}{x^{7/4}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin X}{X^{3/4}} + \frac{3}{4}\int_\pi^X \frac{\sin x}{x^{7/4}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
L'encadrement $0 \leq \dfrac{|\sin X|}{X^{3/4}} \leq \dfrac{1}{X^{3/4}}$ et le théorème des gendarmes entraînent $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\sin X}{X^{3/4}} = 0$. De plus, la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x^{7/4}}$ est continue sur $[\pi; +\infty[$, à valeurs quelconques, et pour tout $x \geq \pi$, on a
$$|g(x)| = \frac{|\sin x|}{x^{7/4}} \leq \frac{1}{x^{7/4}}.$$
Puisque $\dfrac{7}{4} > 1$, le critère de Riemann montre que $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{7/4}}$ est intégrable sur $[\pi; +\infty[$, donc g est absolument intégrable sur $[\pi; +\infty[$ par comparaison de fonctions positives. Il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_\pi^X g(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie. Ainsi, $\displaystyle\int_\pi^X \frac{\cos x}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie lorsque $X \to +\infty$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale étudiée.

Correction de l'exercice 4

1. Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. Par définition de s, on a $s(x) = y - z$ avec $y \in F$, $-z \in G$ puisqu'un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire. Ainsi, $(y, -z)$ est l'unique élément de $F \times G$ tel que $y + (-z) = s(x)$, ce qui permet d'écrire $s \circ s(x) = s(s(x)) = y - (-z) = x$. Par suite, $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
2. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = \mathrm{Id}_E$.
   (a) L'ensemble F' est inclus dans E. Par linéarité de u, $u(0_E) = 0_E$ donc F' n'est pas vide. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in F'$, toujours par linéarité de u, on peut écrire $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y) = \lambda x + y$ donc $\lambda x + y \in F'$ ce qui prouve que F' est un sous-espace vectoriel de E.

   On aurait aussi pu remarquer que $F' = \{x \in E \mid u(x) - x = 0_E\} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$. On conclut en utilisant le résultat de cours : le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ. On a de même $G' = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.

(b) Soit $x \in E$, on a l'équivalence

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E) &\iff u(x) = x \text{ et } u(x) = -x \\ &\iff u(x) = x \text{ et } x = -x \\ &\iff x = 0_E \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E) = \{0_E\}$.

(c) Puisque l'intersection des deux sous-espaces vectoriels est réduite à $\{0_E\}$, il ne reste plus qu'à démontrer que $E = F' + G'$. On raisonne par analyse-synthèse. Soit $x \in E$.

• Analyse : supposons qu'il existe $(y, z) \in F' \times G'$ tel que $x = y + z$. Alors $u(x) = u(y) + u(z) = y - z$, ce qui démontre que $x + u(x) = 2y$ et donc $y = \dfrac{x + u(x)}{2}$, puis $z = \dfrac{x - u(x)}{2}$.

• Synthèse : posons $y = \dfrac{x + u(x)}{2}$ et $z = \dfrac{x - u(x)}{2}$, on vérifie directement que $y + z = x$. De plus, l'identité $u \circ u = \operatorname{Id}_E$ entraîne

$$u(y) = \frac{u(x) + u \circ u(x)}{2} = y \quad \text{ et } \quad u(z) = \frac{u(x) - u \circ u(x)}{2} = -z$$

ce qui montre que $y \in F'$ et $z \in G'$. Par conséquent, tout élément de E se décompose comme la somme d'un élément de F' et de G', c'est-à-dire $E = F' + G'$, et donc $E = F' \oplus G'$.

(d) Puisque pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = \dfrac{x + u(x)}{2} + \dfrac{x - u(x)}{2}$ avec $\dfrac{x + u(x)}{2} \in F'$, $\dfrac{x - u(x)}{2} \in G'$, et $\dfrac{x + u(x)}{2} - \dfrac{x - u(x)}{2} = u(x)$, on peut directement conclure que u est la symétrie sur F' parallèlement à G'.

Correction de l'exercice 5

1. La fonction $f_a : t \longmapsto \dfrac{t^a + 1}{e^{\sqrt{t}} - 1}$ est continue, à valeurs positives sur $]0; +\infty[$ (car $e^u > 1$ pour tout $u > 0$), donc elle est intégrable sur $]0; +\infty[$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$, ce qui équivaut à la convergence de l'intégrale I_a.

2. Par croissance comparée, on a $t^2 f_a(t) = \dfrac{t^{a+2} + t^2}{e^{\sqrt{t}} - 1} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f_a(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Puisque la fonction de Riemann $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, il en est de même pour f_a par comparaison de fonctions positives.

3. Lorque t tend vers 0, on a

$$t^a \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } a > 0 \\ 1 \text{ si } a = 0 \\ +\infty \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

ce qui permet d'obtenir les équivalents suivants :

$$t^a + 1 \underset{t \to 0}{\sim} \begin{cases} 1 \text{ si } a > 0 \\ 2 \text{ si } a = 0 \\ t^a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

4. En outre, comme $e^u = 1 + u + o_0(u)$, on a aussi $e^{\sqrt{t}} - 1 \underset{t \to 0}{\sim} \sqrt{t}$ ce qui donne

$$f_a(t) \underset{t \to 0}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \text{ si } a > 0 \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{t}} \text{ si } a = 0 \\[2ex] \dfrac{t^a}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{1/2 - a}} \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0;1]$, f_a est intégrable sur $]0;1]$ si $a \leq 0$. Enfin, si $a > 0$, comme $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1/2-a}}$ est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\dfrac{1}{2} - a < 1$, ce qui équivaut à $a > -\dfrac{1}{2}$, on en déduit que f_a est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $0 > a > -\dfrac{1}{2}$.

En conclusion, l'intégrale I_a converge si et seulement si $a > -\dfrac{1}{2}$.