Déterminants.

1. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n.

Le **déterminant** est une application dét: $Mat_n(K) \to K$ défini par récurrence sur n de façon suivante:

- Si $n = 1$, $\det(a_{11}) = a_{11}$;

- pour $n > 1$, soit A_j la matrice (d'ordre $n-1$) obtenue en supprimant la première ligne et la $j-$ème colonne de A. Alors

dét$(A) = a_{11}$dét$A_1 - a_{12}$dét$A_2 + ... + (-1)^{n+1}a_{1n}$dét$A_n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}detA_j$

On dit qu'on développe le déterminant suivant la première ligne de A.

En particulier, si $n = 2$, dét$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Exemple important. Le déterminant d'une matrice **triangulaire** (supérieure ou inférieure) est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Remarque. Si une colonne (ou une ligne) de la matrice est nulle, le déterminant est nul.

.

Le déterminant comme une forme multilinéaire alternée.

Soit $C_1, ..., C_n$ les colonnes de la matrice A: $A = (C_1, ..., C_n)$. On peut considérer le déterminant comme une fonction de n variables vectorielles $(C_1, ..., C_n)$.

2. Théorème.

1. Le déterminant est une application linéaire par rapport à chaque colonne.

2. Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.

3. Si l'on échange entre elles deux colonnes, le déterminant change de signe.

On résume les propriétés 1.-3. en disant que le déterminant est une **forme n-linéaire alternée**.

• • *Démonstration.* On procède par récurrence sur n.

1. Linéarité par rapport à C_j: le terme a_{1j}détA_j est linéaire par rapport à C_j parce que a_{1j} l'est et A_j ne dépend pas de C_j. Si $k \neq j$, les termes a_{1k}détA_k sont linéaires par rapport à C_j parce que détA_k l'est (hypothèse de récurrence) et a_{1k} ne dépend pas de C_j.

2.-3. Soit d'abord $C_k = C_{k+1}$. Si $j \neq k$ et $j \neq k+1$, dét$A_j = 0$ (récurrence). Ensuite, $A_k = A_{k+1}$ et $a_{1k} = a_{1,k+1}$, donc la somme $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}detA_j$ est nulle et dét$A = 0$.

Ensuite on montre que si on échange C_j et C_{j+1}, le déterminant change de signe. En effet,

$0 = det((C_1, ..., C_j + C_{j+1}, C_j + C_{j+1}, ..., C_n) =$

$det((C_1, ..., C_j, C_j, ..., C_n) + det((C_1, ..., C_j, +C_{j+1}, ..., C_n)+$
$det((C_1, ..., C_{j+1}, C_j, ..., C_n) + det((C_1, ..., C_{j+1}, C_{j+1}, ..., C_n) =$
$det(C_1, ..., C_j, C_{j+1}, ..., C_n) + det(C_1, ..., C_{j+1}, C_j, ..., C_n).$

Finalement, si $C_j = C_k$, en échangeant les colonnes ajacentes à commencer par C_j on amène C_j à côté de C_k; le déterminant reste le même au signe près, donc il est nul. • •

3. Corollaire. Le déterminant ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Calcul des déterminants. En utilisant le corollaire 3 (et en échageant les colonnes si nécessaire) on peut réduire la matrice à une forme triangulaire ("échelonnée" par rapport aux colonnes) exactement comme dans la méthode du pivot; cela permet de calculer le déterminant.

.

Critère d'inversibilité.

Rappellons qu'une matrice est inversible si et seulement si ses colonnes sont linéairement indépendantes (donc forment une base de K^n).

4. Théorème. La matrice $A \in Mat_n(K)$ est inversible si et seulement si dét$A \neq 0$.

D'une manière équivalente, *une famille de vecteurs* $(C_1, ..., C_n)$ *est une base si et seulement si dét*$(C_1, ..., C_n) \neq 0$.

Ou encore d'une manière équivalente, *le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si une de ses colonnes est combinaison linéaire des autres colonnes.*

• • *Démonstration.* a) Soit A non-inversible, donc une des colonnes, disons C_j, est une combinaison linéaire des autres colonnes. En enlevant cette combinaison linéaire de C_j, ce qui ne change pas le déterminant (Corollaire 3), nous obtenons une colonne nulle, donc dét$A = 0$.

b) Soit A inversible, donc les colonnes $(C_1, ..., C_n)$ forment une base de K^n. Supposons par absurde que dét$A = 0$. Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de K^n; écrivons $e_j = \sum_i b_{ij} C_i$. Alors

$det(e_1, ..., e_n) = det(\sum_{i_1} b_{i_1 1} C_{i_1}, ..., \sum_{i_n} b_{i_n n} C_{i_n}) =$
$\sum_{i_1, ..., i_n} b_{i_1 1} ... b_{i_n n} det(C_{i_1}, ..., C_{i_n}) = 0$

- contradiction (on utilise ici le Théorème 2.2 et la Proposition 6). • •

.

Permutation des colonnes. Formule explicite.

On appelle **permutation** de $\{1, ..., n\}$ toute bijection $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$.

On peut identifier la permutation σ avec la suite de ses valeurs $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ où chaque entier $1, ..., n$ apparait exactement une fois (une telle suite s'appelle *arrangement* d'ordre n).

L'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$ est noté S_n.

On appelle **transposition** une permutation qui échange entre eux deux entiers et laisse fixes les autres.

5. Proposition. Toute permutation se décompose en produit des transpositions.

Remarque: une telle décomposition n'est pas unique.

• • *Démonstration.* Récurrence sur n: si $\sigma(1) = 1$, alors σ permute les $n-1$ entiers $2, ..., n$ et l'hypotèse de récurrence s'applique. Sinon soit τ la transposiiton qui échange 1 et $\sigma(1)$. Soit $\sigma' = \tau\sigma$; alors $\sigma'(1) = 1$ et l'hypotèse de récurrence s'applique à σ'; mais $\sigma = \tau\sigma'$. Remarquer qu'il suffit au plus $n-1$ transpositions pour décomposer σ. • •

Si τ est une transposition, on sait que $\text{dét}(C_{\tau(1)}, ..., C_{\tau(n)}) = -\text{dét}(C_1, ...C_n)$ (échange de deux colonnes).

6. Proposition. Soit σ le produit de k transpositions. Alors $\text{dét}(C_{\sigma(1)}, ..., C_{\sigma(n)}) = (-1)^k \text{dét}(C_1, ...C_n)$.

• • *Démonstration.* Après chaque trasposition le déterminant change de signe. • •

7. Corollaire. Le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$ où k est le nombre de transpositions dans une décomposition de σ est indépendant de la décompositon. Ce nombre est appelé **signature** de σ.

La signature a les propriétés suivantes:

a. $\text{dét}(C_{\sigma(1)}, ..., C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\text{dét}(C_1, ...C_n)$.

b. $\varepsilon(\sigma) = \text{dét}(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)})$, où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonoique de K^n.

c. Si τ est une transposition, $\varepsilon(\tau) = -1$.

d. Multiplicativité: pour toutes deux permutations σ_1 et σ_2, on a $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$

e. $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

f. Proposition (sans démonstration). Soit $I(\sigma)$ le nombre des paires (i, j) telles que $i < j$ mais $\sigma(i) > \sigma(j)$. Alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.

.

Remarque. Pour toute forme $n-$linéaire alternée $f : E \times ... \times E \to K$ on a $f(C_{\sigma(1)}, ..., C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(C_1, ...C_n)$.

.

8. Théorème. Soit $f : E \times ... \times E \to K$ une forme $n-$linéaire alternée. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, $C_1, ...C_n \in E$ et $C_j = \sum_i a_{ij}e_i$, $j = 1, ..., n$. Alors

$$f(C_1, ..., C_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n}f(e_1, ..., e_n)$$

En particulier, pour $A = (a_{ij})$,

$$detA = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$$

• • *Démonstration.*
$f(C_1, ..., C_n) = f(\sum_{i_1} a_{i_1 1} e_{i_1}, ..., \sum_{i_n} a_{i_n n} e_{i_n}) =$
$\sum_{i_1,...,i_n} a_{i_1 1} ... a_{i_n n} f(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n} f(e_1, ..., e_n)$
(on utilise ici le Théorème 2.2 et la Proposition 6). • •

.

9. Corollaire: caractérisation du déterminant. Le déterminant est l'unique forme n- linéaire alternée normalisée: dét $(I_n) = 1$. Toute forme n-linéaire alternée est proportionnelle au déterminant.

Noter que le déterminant est un polynôme homogène de degré n en n^2 variables (a_{ij}) qui contient $n!$ monômes.

Vu que $n!$ croît très vite avec n, cette formule n'est pas très pratique pour les calculs.

.

Déterminant de la transposée d'une matrice.

Le théorème 8 permet de démontrer facilement le résultat suivant:

10. Théorème. Pour toute matrice $A \in Mat_n(K)$ on a
dét $({}^tA) =$ détA.

• • *Démonstration.* On a
dét$A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$ et dét$({}^tA) = \sum_{\rho \in S_n} \varepsilon(\rho) a_{1,\rho(1)} ... a_{n,\rho(n)}$.
Si $\rho = \sigma^{-1}$, on a $\varepsilon(\rho) = \varepsilon(\sigma)$ et le produit $a_{1,\rho(1)} ... a_{n,\rho(n)}$ contient les mêmes termes que le produit $a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$. • •

11. Corollaire. Toutes les propriétés du déterminant relatives aux colonnes peuvent être affirmées pour les lignes.

.

Déterminant du produit de matrices. Déterminant d'un endomorphisme.

12. Théorème. Pour toutes matrices $A, B \in Mat_n(K)$ on a
dét$(AB) =$ (détA)(détB).

• • *Démonstration.* Considérons l'application $f : Mat_n(K) \to K$ définie par $f(X) =$ dét(AX). On vérifie aisément que f est n-linéaire et alternée par rapport aux colonnes de X. Donc (Corollaire 9), f est proportionnelle à détX: $f(X) = c \cdot detX$. En posant $X = I_n$ on a $c = f(I_n) = detA$. En posant $X = B$, on a $f(B) = det(AB) = c \cdot detB = (detA)(detB)$. • •

13. Corollaire. Si $A \in Mat_n(K)$ est inversible on a dét $(A^{-1}) =$ (dét$A)^{-1}$.

14. Corollaire. Si A et A' sont deux matrices semblables ($A' = P^{-1}AP$), alors détA' =détA. En particulier, le déterminant de la matrice associée à un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base.

15. Définition. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E. On appelle **déterminant** de f le déterminant de la matrice qui représente f dans une base quelconque de E.

.

Développement suivant une ligne ou une colonne; cofacteurs.

Soit A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Compte tenu du fait que l'on peut échanger entre elles les les lignes ou les colonnes (le déterminant change de signe) et de la dualité entre les colonnes et les lignes, à partir du développement selon la première ligne on a les formules suivantes:

16. Théorème. 1. Le développement du déterminant suivant la i-ème ligne:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det A_{ij}$$

2. Le développement du déterminant suivant la j-ème colonne:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det A_{ij}$$

17. Définition. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}$détA_{ij}.

On a donc les développements:

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$ et $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$.

Une définition équivalente des cofacteurs est souvant utile: $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}$dét$A_{ij} = det(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, Cj+1, ..., C_n)$, où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique de K^n. .

Matrice inverse.

18. Lemme. Si $k \neq i$, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\Delta_{ij} = 0$.

Si $k \neq j$, on a $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ij} = 0$.

• • *Démonstration.* Condidérons la matrice $B = (b_{ij})$ obtenue à partir de A en remplaçant sa i-ème ligne par sa k-ème ligne. Alors $b_{ij} = a_{kj}$ et $\Delta_{ij}(B) = \Delta_{ij}(A)$. Ecrivons le développement du détB suivant la i-ème ligne: $0 = detB = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Delta_{ij}(B) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\Delta_{ij}(A)$. L'égalité $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ij} = 0$ se démontre de même manière en utilisant les colonnes. • •

.

19. Théorème. Soit $\Delta = (\Delta_{ij})$ la **comatrice** de A - la matrice constituée de cofacteurs de A. Alors $A({}^t\Delta) = {}^t\Delta A =$(dét$A$)$I$.

En particulier, si A est inversible (dét$A \neq 0$), on a

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} {}^t\Delta$$

.

• • *Démonstration.* a) L'élément d'indice (ki) du produit $A({}^t\Delta)$ est $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\Delta_{ij}$ ce qui est égal à détA si $k = i$ (Théorème 16) et à 0 si $k \neq i$ (Lemme 18). Donc, $A({}^t\Delta) =$ (détA)I.

b) L'élément d'indice (kj) du produit ${}^t\Delta A$ est $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ij}$ ce qui est égal à détA si $k = j$ (Théorème 16) et à 0 si $k \neq j$ (Lemme 18). Donc, ${}^t\Delta A =$ (détA)I. • •

• • *Démonstration alternative.* La formule $\Delta_{ij} = det(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, Cj + 1, ..., C_n)$ montre immédiatement que $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} det(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, Cj + 1, ..., C_n) = det(C_1, ..., C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ik}e_i, Cj + 1, ..., C_n) = det(C_1, ..., C_{j-1}, C_k, Cj + 1, ..., C_n)$, ce qui est égal à 0 si $k \neq j$ et à détA si $k = j$. • •

.

Rang d'une matrice, rang d'une famille de vecteurs.

Soit $E = K^n$. On a déja vu qu'une famille $C_1, ..., C_n$ est libre si et seulement si dét$(C_1, ..., C_n) \neq 0$.

Soit $(C_1, ..., C_k)$ une famille de k vecteurs. Son rang, qui est aussi le rang de la matrice $n \times k$ $A = (C_1, ..., C_k)$, est la dimension de l'espace engendré Vect$(C_1, ..., C_k)$ ou, de manière équivalente, le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants parmi $C_1, ..., C_k$.

Pour calculer le rang on peut toujours utiliser la méthode du pivot; pour cela il faut remarquer que le rang ne change pas si on permute les vecteurs ou si à un vecteur on ajoute une combinaison linéaire des autres. Par de telles opérations on peut réduire la matrice $A = (C_1, ..., C_k)$ à une forme "échelonnée" et alors le rang sera le nombre de vecteurs non-nuls dans une famille "échelonnée".

.

Le rang en termes du déterminant.

On appelle **mineur** d'ordre r d'une matrice A le déterminant d'une matrice d'ordre r extraite de A en choisissant r lignes et r colonnes.

Remarque. Si le mineur avec les colonnes $C_{i_1}, ..., C_{i_r}$ est non-nul, les vecteurs $C_{i_1}, ..., C_{i_r}$ sont linéairement indépendants.

20. Théorème. Le rang de la matrice $A = (C_1, ..., C_k)$ est égal à l'ordre maximal des mineurs non-nuls de A.

• • *Démonstration.* Les opérations sur les colonnes qui rédusent A à une forme échelonnée ne changent pas l'ordre maximal des mineurs non-nuls de A. Pour une matrice échelonnée le résultat est évident. • •

21. Corollaire. Le rang d'une matrice par rapport aux colonnes est égal à son rang par rapport aux lignes.

• • *Démonstration.* Les mineurs ne remarquent pas la différence entre les lignes et les colonnes. • •

Comment reconnaitre si un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs?

Evidemment, le vecteur C appartient à $\mathrm{Vect}(C_1, ..., C_k)$ si et seulement si le rang de la famille $(C_1, ..., C_k, C)$ est le même que celui de $(C_1, ..., C_k)$. Il suffit donc de savoir calculer le rang.

.

Systèmes d'équations linéaires.

Nous allons considérer un **système linéaire** de n équations à n inconnues à coefficients dans K:

.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{pmatrix}$$

.

En termes des matrices le système (S) s'écrit $AX = B$ en notant

$A = \begin{pmatrix} a_{11}.......a_{1n} \\ .... \\ a_{n1}.......a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$.

Résoudre (S) c'est trouver tous les vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant (S).

Si la matrice A est inversible ($\det(A) \neq 0$), le système est dit de **Cramer**: il possède une solution unique donnée par $X = A^{-1}B$.

En pratique on utilise la méthode du pivot de Gauss; la résolution du système fournit aussi la matrice inverse A^{-1}.

22. Proposition (Cramer). Un système de Cramer $AX = B$ admet toujours une solution unique quel que soit le vecteur B; la solution est donnée par les formules de Cramer

$$x_i = \frac{det(C_1, ..., C_{i-1}, B, C_{i+1}, ...C_n)}{det A}$$

• •

Démonstration. L'équation $AX = B$ s'écrit $\sum_j x_j C_j = B$, d'où $det(C_1, ..., C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n) = x_i det(C_1, ..., C_n)$. • •

.

Remarque. La formule de Cramer n'est rien d'autre que la formule pour les éléments de la matrice inverse: $A^{-1} = \frac{1}{detA}{}^t\Delta_{ij}$ En effet, l'élément $(A^{-1})_{ij}$ est la i-ème composante du vecteur $A^{-1}e_j$, donc égal à

$\frac{det(C_1,...,C_{i-1},e_j,C_{i+1},...C_n)}{detA} = \frac{1}{detA}\Delta_{ji}$.

.

Dans le cas général, L'équation $AX = B$ admet une solution si et seulement si le vecteur B est une combinaison linéaire des colonnes $(C_1, ..., C_n)$; si c'est le cas, à toute solution on peut ajouter une solution de l'équation homogène $AX = 0$, donc un vecteur de $\ker(A)$. L'ensemble des solutions est donc un espace (affine) de dimension $\dim(\ker A) = n-$ rang(A).