

Courbes paramétrées

1.1. On appelle **courbe paramétrée** (de classe C^k) toute application γ d'un intervalle I dans R^n . Synonymes: *arc paramétré*, *chemin* ou *mouvement*.

L'image $C = \gamma(I)$ est la **courbe** représentée (ou paramétrée) par γ .

Attention: la même courbe peut être paramétrée de plusieurs façons.

Exemple: Le graphe d'une fonction $f : I \rightarrow R$ est une courbe dans le plan (x, y) paramétrée par le paramètre x : $y = f(x)$.

1.2. Droite tangente. Soit $D(t)$ une famille des droites dépendant d'un paramètre t et passant par le même point M . On dit que la droite D passant par M et dirigée par le vecteur u est la *limite* de $D(t)$ quand $t \rightarrow t_0$ si on peut choisir une famille $u(t)$ de vecteurs directeurs de $D(t)$ telle que $u = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t)$.

Définition. Soit γ une courbe paramétrée; supposons que $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$ quand t est proche de t_0 ($t \neq t_0$). Soit $D(t)$ la droite passant par les points $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$. On appelle **droite tangente** de γ en t_0 la limite (si elle existe) de la famille $D(t)$ quand $t \rightarrow t_0$.

La dérivée $\gamma'(t)$ s'appelle **vecteur tangent** (ou *la vitesse*) de la courbe en t . Un point $t \in I$ est dit **régulier** si $\gamma'(t) \neq 0$, **singulier** sinon. La courbe est dite **régulière** si tous ses points sont réguliers.

1.3. Lemme. La droite tangente en un point régulier existe et est dirigée par le vecteur tangent.

Paramétrisation de la droite tangente. Si $\gamma'(t_0) \neq 0$, la droite tangente est donnée par $l(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$.

En cas d'un graphe, $x = t$, $y = f(t)$, le vecteur tangent est $(1, f'(t))$; la tangente est le graphe de la fonction $y = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$.

La tangente géométrique existe souvent même en un point singulier.

1.4. Lemme. Soit $\gamma'(t_0) = 0, \dots, \gamma^{(k-1)}(t_0) = 0$ et $\gamma^{(k)}(t_0) \neq 0$. Alors la droite tangente en t_0 existe et est dirigée par le vecteur $\gamma^{(k)}(t_0)$.

Remarque Pour une courbe plane $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la pente de la tangente est donnée par $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - y(t_0)) / (x(t) - x(t_0))$.

1.5. Position d'une courbe plane par rapport à sa droite tangente au voisinage d'un point régulier t_0 .

On écrit le développement limité de $\gamma(t)$ en t_0 à l'ordre 2:

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = (t - t_0)\gamma'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\gamma''(t_0) + o((t - t_0)^2)$$

En prenant la projection sur la droite transversale parallèlement à la droite tangente, on conclut que si $\gamma''(t_0)$ n'est pas colinéaire à $\gamma'(t_0)$, la courbe est située, au voisinage de t_0 , d'un seul côté de la tangente, dans le demi-plan contenant le vecteur $\gamma''(t_0)$ (le demi-plan de concavité de γ en t_0).

Si $\gamma''(t_0)$ est colinéaire à $\gamma'(t_0)$, on poursuit le développement,

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = (t-t_0)\gamma'(t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\gamma''(t_0) + \frac{1}{6}(t-t_0)^3\gamma'''(t_0) + o((t-t_0)^3).$$

Dans ce cas, si $\gamma'''(t_0)$ n'est pas colinéaire à $\gamma'(t_0)$, la courbe passe d'un côté de la tangente à l'autre; le point où la courbe traverse la tangente est un **point d'inflexion**.

1.6. Changement de paramètre.

Soit $\gamma : I \rightarrow R^n$ une courbe paramétrée, de classe C^k . Soit J un intervalle et $p : J \rightarrow I$ une fonction C^k telle que $p'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$ et $p(J) = I$.

La courbe paramétrée $\beta(s) = \gamma(p(s))$ s'obtient de γ par le changement de paramètre (reparamétrage) $t = p(s)$. Dans ce cas β et γ sont des paramétrages *équivalents* de la même courbe.

On a $\frac{d\beta}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\gamma}{dt}$. La droite tangente est invariante par reparamétrage.

Un paramétrage détermine le *sens de parcours* ou **l'orientation** de la courbe. Un reparamétrage p **présERVE l'orientation** si p est une fonction croissante: $p'(s) > 0$.

1.7. Lemme. Au voisinage d'un point régulier une courbe de classe C^k est le graphe d'une fonction de classe C^k .

1.8. Longueur d'arc. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow R^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 dans un espace **euclidien**. La **longueur** de la courbe γ est définie par

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Motivation: Pour toute subdivision $a < t_1 < \dots < t_k < b$ considérons la ligne polygonale "inscrite" passant par les sommets $\gamma(a), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k), \gamma(b)$.

1.9. Lemme. $L(\gamma)$ est la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales "inscrites" dans γ .

En coordonnées cartésiennes: si $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$,

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt$$

Pour un graphe dans le plan, $y = f(x)$, la longueur est

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2} dt.$$

La définition de la longueur fait intervenir le paramétrage de la courbe. En fait, le résultat ne dépend pas du paramétrage au sens suivant:

1.10. Lemme. La longueur de la courbe est invariante par reparamétrage.

Remarque. $L(\gamma) \geq \| \gamma(b) - \gamma(a) \|$; l'égalité a lieu si et seulement si la courbe est un segment de droite.

1.11. Abscisse curviligne.

Soit $\gamma : I \rightarrow R^n$ une courbe régulière ($\gamma'(t) \neq 0$).

Soit $t_0 \in I$ et $l(t) = \int_{t_0}^t \| \gamma'(u) \| du$ la longueur d'arc entre t_0 et t . Alors $l'(t) = \| \gamma'(t) \|$ et on peut utiliser $s = l(t)$ comme un nouveau paramètre. Soit $t = p(s)$ la fonction réciproque et $\gamma(p(s))$ la courbe reparamétrée.

Lemme. (i) $\| \frac{d}{ds} \gamma(p(s)) \| = 1$.

(ii) Tout autre reparamétrage $t = q(r)$ tel que $\| \frac{d}{dr} \gamma(q(r)) \| = 1$ est lié avec s par $r = \pm s + const$.

On appelle **paramétrage par abscisse curviligne** ou **longueur d'arc** tout paramétrage tel que le vecteur tangent est unitaire en tout point.

Asymptotes des courbes planes.

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée dans R^2 définie sur l'intervalle $]a, b[$ (il se peut que $b = \infty$).

Définition. γ admet une **branche infinie** en b si $\| \gamma(t) \| \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow b$.

Définition. Une droite D est **asymptote** à γ en b si la distance de $\gamma(t)$ à D tend vers 0 quand $t \rightarrow b$.

1.12. Lemme. La courbe γ admet la droite définie par l'équation $px + qy + r = 0$ comme asymptote en b si et seulement si $px(t) + qy(t) + r \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow b$.

Soit $|x(t)| \rightarrow \infty$. Si $px(t) + qy(t) + r \rightarrow 0$, alors $q \neq 0$ et en divisant par q on écrit cette condition comme $y(t) = cx(t) + d \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow b$.

L'asymptote est donc caractérisée par deux conditions:

- 1) la limite $\lim_{t \rightarrow b} \frac{y(t)}{x(t)} = c$ existe et
- 2) la limite $\lim_{t \rightarrow b} y(t) - cx(t) = d$ existe.

Remarque. La limite $\lim_{t \rightarrow b} \frac{y(t)}{x(t)}$, si elle existe, donne la *direction asymptotique* de la courbe.

Cas d'un graphe $y = f(x)$, $a < x < b$. Il y a une branche infinie en b si soit $b < \infty$ et $|y(t)| \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow b$, soit $b = \infty$. Dans le premier cas il y a une asymptote verticale $x = b$. Dans le deuxième cas, $x \rightarrow \infty$, il faut étudier les limites $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = c$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - cx)$.

2. Courbure

Soit γ une courbe régulière de classe C^2 paramétrée par l'abscisse curviline: $\|\gamma'(s)\| = 1$. Alors $\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ et donc $-\gamma''(s)$ est *accélération centrifuge* quand on parcourt γ avec la vitesse unitaire. Sa norme

$$k(s) = \|\gamma''(s)\|$$

s'appelle la **courbure** de γ en s .

Exemple. La courbure d'une droite est nulle. La courbure d'un cercle de rayon r est $k = 1/r$.

2.1. Lemme. Si la courbure est partout nulle, la courbe est un segment de droite.

2.2. Lemme. Les courbes planes régulières à courbure constante non-nulle sont les arcs de cercle.

Le **rayon de courbure** est l'inverse de la courbure: $\rho(s) = 1/k(s)$.

2.3. Interprétation géométrique. La courbure mesure la déviation de la courbe de sa droite tangente.

Soit $k(s) \neq 0$. Soit $s_1 \neq s$, $s_2 \neq s$ et $s_1 \neq s_2$. Le cercle $C(s_1, s_2)$ passant par trois points $\gamma(s)$, $\gamma(s_1)$, $\gamma(s_2)$ admet une position limite quand $s_1 \rightarrow s$ et $s_2 \rightarrow s$. Le rayon de ce cercle limite est le rayon de courbure de γ en s .

Pour un paramétrage quelconque la courbure relie la vitesse et l'accélération centrifuge γ''_{\perp} (composante normale de l'accélération)

$$\gamma''_{\perp} = \gamma'' - \frac{\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle}{\|\gamma'(s)\|^2} \gamma'(t):$$

$$\text{on a } k(t) = \|\gamma''_{\perp}(t)\| / \|\gamma'(t)\|^2.$$

Interprétation mécanique: l'accélération centrifuge est égale au produit de la courbure et du carré de la vitesse.

La courbure d'une courbe plane est donnée par

$$k(t) = \frac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\text{Cas d'un graphe } y = f(x): \text{ la courbure } k(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$$

Courbes planes

3. Coordonnées polaires

3.1. Les coordonnées polaires dans R^2 sont données par l'application $(r, \varphi) \rightarrow (x, y)$ de R^2 dans R^2 : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Ce n'est pas une bijection; en plus la valeur $r = 0$ est mauvaise ("pôle"). Si on veut définir un système de coordonnées polaires dans R^2 il faut choisir

un domaine D dans le plan (x, y) et un domaine D' dans le plan (r, φ) où l'application polaire donne une bijection, par exemple $r > 0$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$.

On définit le repère orthonormé (repère polaire) (u, v) dans R^2 :

$$u(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi) \text{ et } v(\varphi) = (-\sin \varphi, \cos \varphi).$$

Noter que $\frac{du}{d\varphi} = v$ et $\frac{dv}{d\varphi} = -u$.

3.2. Courbe paramétrée en coordonnées polaire est définie par la donnée de deux fonctions $r(t)$ et $\varphi(t)$; son paramétrage en coordonnées cartésiennes sera donc $x(t) = r(t) \cos \varphi(t)$, $y(t) = r(t) \sin \varphi(t)$ ou $\gamma(t) = r(t)u(\varphi(t))$.

Vitesse et accélération:

$$\gamma'(t) = r'(t)u(\varphi(t)) + r(t)\varphi'(t)v(\varphi(t)),$$

$$\gamma''(t) = (r''(t) - r(t)\varphi''(t))u(\varphi(t)) + 2r'(t)\varphi'(t)v(\varphi(t)).$$

3.3. Tangente en pôle $r = 0$. Soit $r(t_0) = 0$; supposons que $r(t) \neq 0$ quand t est proche mais différent de t_0 [c'est le cas si il existe $k > 0$ tel que $\frac{d^k r}{dt^k}(t_0) \neq 0$]. Alors la droite passant par $\gamma(t_0) = 0$ et $\gamma(t) = r(t)u(t)$ est dirigée par le vecteur $u(t)$ et admet une position limite dirigée par le vecteur $u(t_0)$. Donc la tangente en t_0 existe et fait l'angle $\varphi(t_0)$ avec l'axe des x .

3.4. Courbe donnée par une équation polaire $r = r(\varphi)$: il s'agit du cas où la courbe est paramétrée par $t = \varphi$ du (le "graphe en coordonnées polaires"). Alors

$$\gamma'(\varphi) = r'(\varphi)u(\varphi) + r(\varphi)v(\varphi),$$

$$\gamma''(\varphi) = (r''(\varphi) - r(\varphi))u(\varphi) + 2r'(\varphi)v(\varphi).$$

3.5. La longueur de la courbe de l'équation $r = r(\varphi)$ est donnée par

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\varphi)\| d\varphi = \int_a^b \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi$$

3.6. La courbure est donnée par

$$k = \frac{|\det(\gamma', \gamma'')|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{|r''r - r^2 - 2r'^2|}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}$$

3.7. Asymptotes. On suppose que $r(\varphi) \rightarrow \infty$ quand $\varphi \rightarrow \varphi_0$. L'angle φ_0 donne la direction asymptotique.

On peut se ramener au cas $\varphi_0 = 0$ par une rotation d'angle φ_0 (en remplaçant φ par $\varphi - \varphi_0$). Soit donc $\varphi_0 = 0$. Une asymptote doit donc être parallèle à l'axe des x . La droite $y = c$ sera une asymptote si et seulement si $y = r(\varphi) \sin \varphi \rightarrow c$ quand $\varphi \rightarrow 0$.

En général, il y a une asymptote si et seulement si le produit $r(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_0)$ admet une limite quand $\varphi \rightarrow \varphi_0$.

Détermination d'angle. Malgré le fait que l'angle polaire ne peut pas être défini comme une fonction continue dans tout le plan (privé de 0), toute courbe ne passant pas par 0 admet un paramétrage en coordonnées polaires.

3.8. Lemme. Soit γ une courbe paramétrée de classe C^k qui ne passe pas par 0. Il existe une fonction $\varphi(t)$ de classe C^k telle que $\gamma(t) = (r(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \varphi(t))$. Ici $r(t) = \|\gamma(t)\|$.

Démonstration: on a $x' = r' \cos \varphi - r \varphi' \sin \varphi$ et $y' = r' \sin \varphi + r \varphi' \cos \varphi$, d'où $\varphi' = \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}$. Alors on définit $\varphi(t)$ par intégration:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}(s) ds, \text{ où } \varphi_0 \text{ est tel que } \gamma(t_0) = (r(t_0) \cos \varphi_0, r(t_0) \sin \varphi_0).$$

Une telle fonction $\varphi(t)$ s'appelle *détermination d'angle* le long de la courbe $\gamma(g)$.

Si $\varphi_1(t)$ est une autre détermination d'angle alors $\varphi_1(t) = \varphi(t) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.9. Ecriture complexe. $x + iy = re^{i\varphi}$.

On a $u(\varphi) = e^{i\varphi}$, $v(\varphi) = ie^{i\varphi}$.

$$\gamma(t) = r(t)e^{i\varphi(t)},$$

$$\gamma' = (r' + ir\varphi')e^{i\varphi}, \text{ etc.}$$

Courbes planes définies par une équation.

Soit f une fonction (de classe C^k) définie dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 .

La courbe définie par l'équation $f(x, y) = 0$ est l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}.$$

3.10. Théorème de la fonction implicite. Soit $f(a, b) = 0$ et $(\partial f / \partial y)(a, b) \neq 0$. Alors il existe un ouvert U' contenant (a, b) sur lequel l'équation $f(x, y) = 0$ définit y comme une fonction φ de classe C^k : $\varphi(x)$ est définie sur un intervalle I et $(x, y) \in U'$ vérifie $f(x, y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$.

Donc la partie $\Gamma \cap U'$ de Γ est le graphe de la fonction $\varphi(x)$, un arc régulier.

On ne connaît pas φ exactement (c'est une "fonction implicite") mais on peut calculer les dérivées de φ en a en dérivant l'identité $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Cela donne $\varphi' = -f_x / f_y$ et $\varphi'' = -(f_{xx} + 2\varphi' f_{xy} + \varphi'^2 f_{yy}) / f_y$ (rappelons que $y = \varphi(x)$).

Symétriquement, si $(\partial f / \partial x)(a, b) \neq 0$, on peut résoudre $f(x, y) = 0$ pour x en fonction de y : $x = \psi(y)$ (au voisinage de (a, b)).

Un point de Γ est dit **régulier** si $df_{(a,b)} \neq 0$ (si les dérivées partielles de f ne s'annulent pas en même temps). Par conséquent, au voisinage d'un point régulier Γ peut être paramétrée comme une courbe régulière.

La tangente en un point régulier (a, b) est orthogonale au gradient de f en (a, b) et a comme équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$$

3.11. Courbure algébrique d'une courbe plane orientée.

Soit γ une courbe plane régulière paramétrée par l'abscisse curviligne. Donc $\|\gamma'(s)\| = 1$ et on peut écrire $\gamma'(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$.

Alors $\gamma''(s) = \varphi'(s)(-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s))$ et la courbure est $k(s) = |\varphi'(s)|$.

La courbure est la (valeur absolue de la) vitesse angulaire de la rotation du vecteur tangent quand la courbe est parcourue à vitesse constante 1.

La vitesse angulaire $\varphi'(s) = K(s)$ s'appelle **courbure algébrique**: le signe de $K(s)$ indique de quel côté la courbe est située par rapport à sa tangente (le demi-plan de concavité). Si $K(s)$ change de signe en s_0 , il s'agit d'un point d'inflexion.