Dans toute la suite, n et p désignent des entiers naturels non nuls, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non vide) et I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définition 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction continue de fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$. Soient $a, b \in I$. On appelle intégrale de f de a à b le vecteur

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_a^b f_p(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Proposition 2

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continues.

1. *(Linéarité) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, pour tous $a, b \in I$, on a*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. *(Chasles) Pour tous $a, b, c \in I$, on a*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. *(Sommes de Riemann) Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$, alors*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. *(Inégalité triangulaire) Soit $\|\,.\,\|$ une norme sur $\mathbb{R}^p$, alors*

$$\forall a, b \in I, \quad a \leq b, \quad \left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

5. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) On note $\|\,.\,\|_2$ la norme de $\mathbb{R}^p$ définie par : $\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$. Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$, alors*

$$\left|\int_a^b \sum_{i=1}^p f_i(t) g_i(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b \|f(t)\|_2^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b \|g(t)\|_2^2\,\mathrm{d}t}.$$

Proposition 3

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continue et $a \in I$. La fonction $F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^p$ est dérivable, de dérivée f sur I.

Proposition 4

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continue, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha, \beta : J \longrightarrow I$ dérivables. Alors la fonction

$G : x \in J \longmapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est dérivable sur J, et*

$$\forall x \in J, \quad G'(x) = \beta'(x) f(\beta(x)) - \alpha'(x) f(\alpha(x)).$$

Proposition 5

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, pour tous $a, b \in I$, on a

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'((1-\theta)a + \theta b)(b-a)\,\mathrm{d}\theta.$$

Théorème 6 (*Théorème des accroissements finis*)

Soient $a < b$ deux réels, et $f : [a;b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Théorème 7 (*Inégalité des accroissements finis pour les fonctions d'une variable*)

Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ dérivable. S'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall t \in I, \quad \|f'(t)\| \leq M,$$

alors

$$\forall a, b \in I, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M\,|b-a|\,.$$

Théorème 8 (*Inégalité des accroissements finis pour les fonctions de plusieurs variables*)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable et $x, y \in U$ tels que le segment $[x;y]$, défini par $[x;y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0;1]\}$, est inclus dans U. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in [x;y], \quad |\!|\!|\,\mathrm{d}f((1-t)x + ty)|\!|\!| \leq M$$

alors

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|y - x\|.$$

Théorème 9

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On a équivalence entre

1. *f est continûment différentiable,*
2. *pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la dérivée partielle $\partial_i f$ existe et est continue.*

Définition 10

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (non vides). On dit qu'une application $f : U \longrightarrow V$ est un ***difféomorphisme*** *si f est bijective, f est différentiable sur U et f^{-1} est différentiable sur V.*

On dit que $f : U \longrightarrow V$ est un ***$\mathcal{C}^1$-difféomorphisme*** *si f est bijective, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.*

Proposition 11

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ est un difféomorphisme de U sur V, alors nécessairement $n = p$, pour tout

$x \in U$, $\mathrm{d}f(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^d$, et

$$\forall y \in V, \quad \mathrm{d}(f^{-1})(y) = \left(\mathrm{d}f(f^{-1}(y))\right)^{-1}.$$

Théorème 12 (*Théorème d'inversion locale*)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et $a \in U$. Si $\mathrm{d}f(a)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (i.e. la Jacobienne de f en a, $J_f(a)$, est inversible), alors il existe un ouvert $U_a \subset U$ contenant a et un ouvert V_b de $\mathbb{R}^n$ contenant $b = f(a)$ tels que la restriction $f_{|U_a}$ de f à U_a soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_a sur V_b.

Théorème 13 (*Théorème du point fixe de Picard*)

Soit $f : F \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f(F) \subset F$, où F est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Si f est contractante, i.e. s'il existe $\alpha \in [0;1[$ tel que

$$\forall x, y \in F, \quad \|f(y) - f(x)\| \leq \alpha \|y - x\|$$

alors f admet un unique point fixe dans F, c'est-à-dire qu'il existe un unique $x \in F$ tel que $f(x) = x$.

Théorème 14 (*Théorème d'inversion globale*)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. Si f est injective, et pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}f(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (i.e. $J_f(x) \in GL_n(\mathbb{R})$), alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exemple : La fonction $\varphi : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[\times]-\pi;\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}^- \times \{0\}) \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0;+\infty[\times]-\pi;\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}^- \times \{0\})$.

Soient W un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $U = W \times V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(a,b) \in U$, les applications partielles de f au point (a,b) données par

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & f(x,b) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ y & \longmapsto & f(a,y) \end{array}$$

sont différentiables en a et b respectivement (même de classe $\mathcal{C}^1$). On note leurs différentielles respectives : $\mathrm{d}_1 f(a,b)$ et $\mathrm{d}_2 f(a,b)$.

Théorème 15 (*Théorème des fonctions implicites*)

Soient W un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $U = W \times V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0_{\mathbb{R}^p}$. On suppose que l'application partielle

$$g : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ y & \longmapsto & f(a,y) \end{array}$$

est telle que $\mathrm{d}g(b)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$ (i.e. la Jacobienne $J_g(b) \in GL_p(\mathbb{R})$), c'est-à-dire que $\mathrm{d}_2 f(a,b)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$. Alors il existe un ouvert $U_{(a,b)} \subset U$ contenant (a,b), un ouvert $W_a \subset W$ contenant a et une fonction $\varphi : W_a \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$((x,y) \in U_{(a,b)} \text{ et } f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^p}) \iff (x \in W_a \text{ et } y = \varphi(x)).$$

En particulier,

$$\forall x \in W_a, \quad f(x, \varphi(x)) = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

Démonstration : On va chercher à appliquer le théorème d'inversion locale à la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \\ (x,y) & \longmapsto & (x, f(x,y)) \end{array}$$

Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, F est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $(x,y) \in U$, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on a

$$\mathrm{d}F(x,y)(h,k) = (h,\ \mathrm{d}_1 f(x,y)(h) +\ \mathrm{d}_2 f(x,y)(k)).$$

Vérifions que $\mathrm{d}F(a,b)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans lui-même. Pour tous $(h,k), (h',k') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}F(a,b)(h,k) = (h',k') & \Longleftrightarrow & (h,\ \mathrm{d}_1 f(a,b)(h) +\ \mathrm{d}_2 f(a,b)(k)) = (h',k') \\ & \Longleftrightarrow & h = h' \text{ et } \mathrm{d}_1 f(a,b)(h) +\ \mathrm{d}_2 f(a,b)(k) = k' \\ & \Longleftrightarrow & h = h' \text{ et } k = (\,\mathrm{d}_2 f(a,b))^{-1}(k -\ \mathrm{d}_1 f(a,b)(h')) \end{array}$$

puisque $\mathrm{d}_2 f(a,b)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$, ce qui montre que $\mathrm{d}F(a,b)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, d'inverse

$$(\,\mathrm{d}F(a,b))^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \\ (h',k') & \longmapsto & (h', (\,\mathrm{d}_2 f(a,b))^{-1}(k -\ \mathrm{d}_1 f(a,b)(h'))). \end{array}$$

Le théorème d'inversion locale montre alors que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage ouvert $U_{(a,b)}$ de (a,b) sur un voisinage ouvert de $(a, 0_{\mathbb{R}^p})$, que l'on peut supposer de la forme $W_a \times Z_0$ où W_a est un voisinage ouvert de a et Z_0 un voisinage ouvert de $0_{\mathbb{R}^p}$. La réciproque de F est nécessairement de la forme

$$F^{-1} : (x,z) \longmapsto (x, \Phi(x,z))$$

avec Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $W_a \times Z_0$. Autrement dit, on a

$$((x,y) \in U_{(a,b)} \text{ et } f(x,y) = z) \iff ((x,z) \in W_a \times Z_0 \text{ et } y = \Phi(x,z)).$$

En particulier, en notant $\varphi : x \in W_a \longmapsto \Phi(x, 0_{\mathbb{R}^p})$, on a

$$((x,y) \in U_{(a,b)} \text{ et } f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^p}) \iff (x \in W_a \text{ et } y = \varphi(x)).$$

■

Proposition 16

Sous les hypothèses du théorème des fonctions implicites, si l'on note $d_2 f(x,y)$ la différentielle au point y de l'application partielle

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ y & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

il existe un ouvert $\widetilde{U}_{(a,b)} \subset U_{(a,b)}$ contenant (a,b) tel que pour tout $(x,y) \in \widetilde{U}_{(a,b)}$, $\mathrm{d}_2 f(x,y)$ soit un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$. Notons $\widetilde{W}_a$ l'ensemble $\{x \in W_a \mid (x, \varphi(x)) \in \widetilde{U}_{(a,b)}\}$. Pour tout $x \in \widetilde{W}_a$, on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}\varphi(x)(h) = -\,(\,\mathrm{d}_2 f(x, \varphi(x)))^{-1}\,(\,\mathrm{d}_1 f(x,\varphi(x))(h))$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{d}\varphi(x) = -\,(\,\mathrm{d}_2 f(x,\varphi(x)))^{-1} \circ \mathrm{d}_1 f(x, \varphi(x)).$$