Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1

*On appelle **norme** sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

(i). *axiome de séparation :* $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_E$

(ii). *homogénéité :* $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$

(iii). *inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in E, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Proposition 2 (*Inégalité triangulaire inversée*)

Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace normé. Alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Définition 3

*Un vecteur x d'un espace normé E est dit **unitaire** si $\|x\| = 1$.*

Définition 4

*Une **distance** sur E (ou sur un ensemble quelconque) est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

(i). *symétrie :* $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x)$

(ii). *séparation :* $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$

(iii). *inégalité triangulaire :* $\forall x, y, z \in E, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Proposition 5

Si $(E, \|\,.\,\|)$ est un espace normé, l'application

$$\begin{array}{rccc} d : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \longmapsto & \|x - y\| \end{array}$$

définit une distance sur E.

Définition 6

Soient E un espace normé, $a \in E$ et $r > 0$. On définit :

- la **boule ouverte** de centre a et de rayon r par $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$,
- la **boule fermée** de centre a et de rayon r par $\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$,
- la **sphère** de centre a et de rayon r par $S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$.

Proposition 7

*Une boule B (ouverte ou fermée) est une partie **convexe**, c'est-à-dire que*

$$\forall x, y \in B, \quad \forall \theta \in [0; 1], \quad (1 - \theta)x + \theta y \in B.$$

Une sphère (de rayon $r > 0$) n'est pas convexe.

Définition 8

*Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Si A est une partie bornée non vide de E, on définit son **diamètre** *par :*

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in A\}.$$

Normes sur $\mathbb{K}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

Proposition 9 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Démonstration : Soient $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ fixés. Si y est nul, il est clair que chacun des termes intervenant est nul, on a donc égalité (de plus, la famille (x, y) est liée). On suppose donc $y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et on considère la fonction polynômiale $P : \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k=1}^n (x_k + \lambda y_k)^2$. C'est une fonction polynômiale de degré 2 en λ (car le coefficient devant λ^2 est non nul), à valeurs toujours positives, donc de discriminant Δ négatif ou nul. Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$P(\lambda) = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) + 2\lambda\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right) + \lambda^2\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$$

ce qui implique

$$\Delta = 4\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) \leq 0$$

d'où en simplifiant et en utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

Il reste à étudier le cas d'égalité. Si (x, y) est liée, comme $y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$, et on a

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| = \left|\sum_{k=1}^n \alpha y_k^2\right| = |\alpha|\sum_{k=1}^n y_k^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} = \sqrt{\alpha^2\sum_{k=1}^n y_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} = |\alpha|\sum_{k=1}^n y_k^2.$$

Réciproquement, si on est dans le cas d'égalité, alors $\Delta = 0$, donc P admet une unique racine réelle notée λ_0, ce qui démontre que $\sum_{k=1}^n (x_k + \lambda_0 y_k)^2 = 0$. Puisqu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun des termes intervenant est nul, on en déduit :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad x_k + \lambda_0 y_k = 0 \quad \text{d'où } x = -\lambda_0 y$$

ce qui démontre que la famille (x, y) est liée. ■

Corollaire 10

Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\sum_{k=1}^n |x_k|\,|y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2}$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $(|x_1|, \dots, |x_n|), (|y_1|, \dots, |y_n|)$ sont liés.

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k|.$$

Proposition 11

Les applications $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ (norme euclidienne) et $\|\,.\,\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Proposition 12

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une norme.

Normes en dimension infinie :

- Soit E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des séries numériques absolument convergentes. Les applications suivantes sont des normes sur E. Pour $u = \sum u_n$, on pose

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup\{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues, absolument intégrables sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'application

$$\|\,.\,\| : f \longmapsto \int_I |f(t)| \, \mathrm{d}t \in \mathbb{R}^+$$

définit une norme sur E.

- Soient $a < b$ deux réels et $E = \mathcal{C}([a;b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$. Cet espace est inclus dans l'ensemble des fonctions bornées de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$. Les applications suivantes sont des normes sur E :

$$\|\,.\,\|_\infty : f \longmapsto \sup_{t \in [a;b]} |f(t)|, \quad \|\,.\,\|_1 : f \longmapsto \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|\,\|_2 : f \longmapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}.$$

Normes produits :

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés. On considère le produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont les éléments x sont des p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ avec pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $x_k \in E_k$. Le vecteur nul est le p-uplet $0_E = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_p})$ et les opérations sur E se déduisent de celles des espaces E_k :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x = (x_1, \dots, x_p), y = (y_1, \dots, y_p) \in E,\ \lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_p) \text{ et } x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p).$$

Proposition 13

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces normés et $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. Les applications suivantes définies pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{p} N_k(x_k), \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} N_k(x_k)^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max\{N_k(x_k) \mid k \in [\![1;p]\!]\}$$

définissent des normes sur E.

Définition 14

Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace E sont dites ***équivalentes*** *si*

$$\exists C_1, C_2 > 0, \quad \forall x \in E, \quad C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

Exemples : Sur $\mathbb{K}^n$, les normes $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes, et pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

Théorème 15 (*Équivalence des normes en dimension finie (admis)*)

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les normes sont deux à deux équivalentes.

Définition 16

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est ***bornée*** *s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 17

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est ***convergente*** *s'il existe $\ell \in E$ tel que $\|u_n - l\| \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, on l'appelle limite de la suite $(u_n)_n$ et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 18

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\|u_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$. Par conséquent, toute suite convergente est bornée.

Proposition 19

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda u_n + \mu v_n \longrightarrow \lambda\ell + \mu\ell \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes de E est un espace vectoriel, et l'application $(u_n)_n \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est linéaire.

Proposition 20

Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique convergeant vers λ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\ell \in E$, alors

$$\lambda_n \cdot u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot \ell.$$

Convergence en dimension finie : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$u(n) = u_1(n)e_1 + \cdots + u_p(n)e_p.$$

Les suites scalaires $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées suites coordonnées (ou composantes) de la suite vectorielle u dans la base e.

Proposition 21

On a équivalence entre :

(i). *la suite u converge,*

(ii). *les suites coordonnées $u_1, \dots, u_p$ convergent.*

De plus, si tel est le cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} u_1(n))e_1 + \cdots + (\lim\limits_{n\to+\infty} u_p(n))e_p$.

Convergence dans un espace produit :

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés, et $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. On a vu que l'on peut munir E des trois normes suivantes : pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{p} N_k(x_k), \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} N_k(x_k)^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max\{N_k(x_k) \mid k \in [\![1;p]\!]\}.$$

Soit $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u(n) = (u_1(n), \dots, u_p(n))$. Les suites vectorielles $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées suites coordonnées de la suite u.

Proposition 22

On a équivalence entre :

(i). *la suite $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge,*

(ii). *les suites coordonnées (ou composantes) $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.*

Si tel est le cas, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} u(n) = (\lim_{n\to+\infty} u_1(n), \dots, \lim_{n\to+\infty} u_p(n)).$$

Définition 23

On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Cette série est notée $\sum u_n$ et le terme S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

Définition 24

On dit que la série $\sum u_n$ ***converge*** *si la suite $(S_n)_n$ converge. Sa limite S est alors appelée somme de la série et est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. On appelle reste de rang n la quantité $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$.*

Définition 25

Une série $\sum u_n$ *d'éléments de* E *est dite* **absolument convergente** *si la série numérique à termes positifs* $\sum \|u_n\|$ *est convergente.*

Théorème 26

Si E *est de dimension finie, l'absolue convergence d'une série d'éléments de* E *entraîne sa convergence.*

Démonstration : Si $\dim(E) = 0$, alors $E = \{0_E\}$ et le résultat est trivial. Supposons donc $p = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$. Soit $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $\sum u(n)$ une série d'éléments de E et $u_1, \ldots, u_p$ les suites coordonnées dans e de la suite $u = (u(n))_n$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = u_1(n)e_1 + \cdots + u_p(n)e_p$. Notons N la norme définie sur E par : pour $x = x_1e_1 + \cdots + x_pe_p$, $N(x) = \|(x_1, \ldots, x_p)\|_\infty$. Puisque toutes les normes sur E sont équivalentes, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$N \leq \alpha \| \,.\, \|$$

Alors, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_k(n)| \leq N(u(n)) \leq \alpha \|u(n)\|.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, il y a convergence absolue, et donc convergence de la série $\sum u_k(n)$. On en déduit la convergence de la série $\sum u(n)$ car sa suite de sommes partielles converge. ∎

Dans toute la suite, $(E, \| \,.\, \|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Les notions qui suivent ne seront pas modifiées lorsqu'on passe d'une norme à une norme équivalente. En particulier, si l'espace E est de dimension finie, elles ne dépendent pas de la norme choisie.

Définition 27

On appelle **voisinage** *d'un élément* $x \in E$ *toute partie* $V \subset E$ *vérifiant :*

$$\exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V.$$

Définition 28

Une partie $\mathcal{U}$ *de* E *est dite* **ouverte** *si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que $\mathcal{U}$ *est un ouvert de* E.

Proposition 29

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Proposition 30

Une intersection **finie** *d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 31

Si $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_p$ *sont des ouverts des espaces normés* $E_1, \ldots, E_p$ *alors* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_p$ *est un ouvert de l'espace normé produit* $E = E_1 \times \cdots \times E_p$.

Définition 32

Un élément $a \in E$ *est dit* **intérieur** *à une partie* $X \subset E$ *si* X *est un voisinage de* a, *i.e.*

$$\exists r > 0, \quad B(a, r) \subset X.$$

L'intérieur de X, noté X°, est l'ensemble de tous les points intérieurs à X, c'est-à-dire $X^\circ = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset X\}$.

Proposition 33

Une partie $X \subset E$ est ouverte si et seulement si $X^\circ = X$.

Proposition 34

Soit X une partie de E, alors X° est la réunion des ouverts inclus dans X. Par conséquent, X° est le plus grand ouvert inclus dans X.

Définition 35

*Une partie F de E est dite **fermée** si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E.*

Proposition 36

Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E.

Proposition 37

*Une union **finie** de fermés de E est un fermé de E.*

Proposition 38 (*Caractérisation séquentielle des fermés*)

Une partie F de E est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ appartient à F, ce qui s'écrit encore :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad \ell \in F.$$

Proposition 39

Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des fermés des espaces normés $E_1, \ldots, E_p$ alors $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$.

Définition 40

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On appelle **suite extraite** (ou sous-suite) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Définition 41

*Une partie K de E est dite **compacte** si toute suite d'éléments de K possède une sous-suite convergente dans K, i.e.*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}, \quad \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante }, \quad x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in K.$$

On dit aussi que K est un compact de E.

Proposition 42

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Théorème 43

Si E est un espace de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et *bornées.*

Démonstration : On a déjà vu que les parties compactes sont des fermés bornés, étudions la réciproque. Soit K une partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé E de dimension finie $p \in \mathbb{N}$.

Si $p = 0$, alors $E = \{0_E\}$ et $K = \emptyset$ ou $K = \{0_E\}$, dans les deux cas, K est une partie compacte.

Sinon, on peut introduire une base $e = (e_1, \dots, e_p)$ de E et considérer la norme N sur E définie pour $x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$ par $N(x) = \max\{|x_k| \mid k \in [\![1; p]\!]\}$. Soit $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. Notons $u_1, \dots, u_p$ les suites coordonnées de u. Puisque la partie K est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in K, \quad N(x) \leq M.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(u(n)) \leq M$$

et donc

$$\forall k \in [\![1; p]\!], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_k(n)| \leq M.$$

La suite numérique $u_1 = (u_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc admet une sous-suite convergente $(u_1(\varphi_1(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Puisque l'on a encore

$$\forall k \in [\![2; p]\!], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_k(\varphi_1(n))| \leq M$$

on peut appliquer de nouveau le théorème de Bolzano-Weierstrass pour construire une extractrice $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $(u_2(\varphi_1 \circ \varphi_2(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite $((u_1(\varphi_1 \circ \varphi_2(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ étant extraite de $(u_1(\varphi_1(n)))_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge aussi. En réitérant ce processus, on construit une extractrice $\varphi = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in [\![1; p]\!], \quad (u_k(\varphi(n)))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Par conséquent, les suites coordonnées $(u_k(\varphi(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent ce qui entraîne la convergence de la suite $(u(\varphi(n)))_n$. De plus, cette suite est à valeurs dans K et K est fermé, donc $(u(\varphi(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans K. ■

Corollaire 44 (*Généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass*)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.