Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. On note α l'extrémité inférieure de I, à savoir $\alpha = \inf I$ (avec la convention $\inf I = -\infty$ si I n'est pas minoré), et β l'extrémité supérieure de I, à savoir $\beta = \sup I$ (avec la convention $\sup I = +\infty$ si I n'est pas majoré). On suppose que I n'est pas un segment, *i.e* que $\alpha \notin I$ ou $\beta \notin I$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue sur l'intervalle I et F une primitive de f sur I.

Définition 1

On définit $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *par* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x) \underset{notation}{=} [F]_\alpha^\beta.$

Proposition 2

Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continue, on a*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\left\{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \mid [a;b] \subset I\right\}.$$

Définition 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continue. On dit que la fonction* f *est* ***intégrable*** *sur* I *si l'intégrale* $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ *est un réel positif fini, ce que l'on écrit aussi* $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Théorème 4 (*Intégrales de Riemann*)

Soient $a > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ *est intégrable sur* $[a; +\infty[$ *si et seulement si* $\alpha > 1$.

Théorème 5 (*Intégrales de Riemann*)

Soient $a > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ *est intégrable sur* $]0; a]$ *si et seulement si* $\alpha < 1$.

Proposition 6

Soient f *et* g *deux fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}^+$.

(a). *Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_I (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$

(b). *On a la relation de Chasles : pour tout* $\gamma \in I$, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\gamma^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$

(c). *Si* $f \leq g$, *on a* $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$

(d). *On a l'inégalité de Cauchy-Scwharz :* $\displaystyle\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_I f(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_I g(t)^2\,\mathrm{d}t}.$

(e). *Changement de variable : Si* J *est un intervalle d'extrémités* a *et* b *et* $\varphi : J \longrightarrow I$ *est une bijection de classe* $\mathcal{C}^1$ *strictement croissante* ($\alpha = \lim_{u \to a} \varphi(u)$, $\beta = \lim_{u \to b} \varphi(u)$), *on a*

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Définition 7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dont on note D_f le domaine de définition. Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est définie au voisinage de *a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D_f \cap [a-\varepsilon; a+\varepsilon] \backslash \{a\}$ est égal à $[a-\varepsilon; a[$, $]a; a+\varepsilon]$ ou $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]\backslash\{a\}$.*
On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $A > 0$ (resp. $B < 0$) tel que $]A; +\infty[\subset D_f$ (resp. $]-\infty; B[\subset D_f$).

Définition 8

Soient J un intervalle (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J (c'est-à-dire que a appartient à J ou est une extrémité, éventuellement infinie, de J) et $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est dominée par g au voisinage de a *si il existe un voisinage V de a tel que*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in V, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

On note alors $f(x) = \underset{x \to a}{\mathcal{O}}(g(x))$.

Définition 9

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$,a un point adhérent à J et $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est négligeable devant g *au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $f = \varepsilon g$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. On note alors $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$.*

Définition 10

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$,a un point adhérent à J et $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est équivalente à g *au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $f = (1+\varepsilon)g$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.*

Théorème 11

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continues. Si $f(x) = \underset{x \to b}{\mathcal{O}}(g(x))$ et si g est intégrable sur $[a; b[$, alors f est aussi intégrable sur $[a; b[$.

Corollaire 12

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continues. Si $f(x) = \underset{x \to b}{o}(g(x))$ et si g est intégrable sur $[a; b[$, alors f est aussi intégrable sur $[a; b[$.

Corollaire 13

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continues. Si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$, alors f est intégrable sur $[a; b[$ si et seulement si g l'est.

Définition 14

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. On dit que f est absolument intégrable sur I *si $\displaystyle\int_I |f(t)| \, \mathrm{d}t < +\infty$ (autrement dit, si $|f|$ est intégrable sur I).*
Dans ce cas, on définit $\displaystyle\int_I f(t) \, \mathrm{d}t = \int_I f^+(t) \, \mathrm{d}t - \int_I f^-(t) \, \mathrm{d}t$.

Proposition 15

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, absolument intégrable sur I. On a l'inégalité

$$\left| \int_I f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_I |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Proposition 16 (***Linéarité de l'intégrale***)

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, absolument intégrables sur I. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est absolument intégrable sur I et $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition 17 (***Inégalité de Cauchy-Schwarz***)

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I, alors fg est absolument intégrable sur I et on a

$$\int_I |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_I f(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_I g(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

Définition 18

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si les primitives de f admettent des limites* **finies** *en α et β. Si c'est le cas, on pose alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \to \searrow \alpha} F(x)$, où F est une primitive de f sur I.*

Sinon, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Si f est absolument intégrable sur I, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. *Les intégrales convergentes mais non absolument convergentes sont dites* semi-convergentes.

Proposition 19

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vérifie

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 20

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. *Relation de Chasles : Si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $c \in]\alpha; \beta[$, alors les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et vérifient*

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. *Changement de variables : Si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, si $\varphi : J \longrightarrow I$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur l'intervalle J d'extrémités a et b, alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$*

converge et on a

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Théorème 21

Soient $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Si* $\displaystyle\int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, et si la fonction* uv *admet des limites finies en* α *et* β, *alors* $\displaystyle\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et*

$$\int_\alpha^\beta u'(t)v(t) = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 22

Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$ *et* $b > 1$. *La fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ *est absolument intégrable sur* $[b; +\infty[$ *si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

Proposition 23

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $0 < a < 1$. *La fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ *est absolument intégrable sur* $]0; a]$ *si et seulement si* $\alpha < 1$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.