

Définition 1

On appelle **pavé** de \mathbb{R}^2 toute partie P de \mathbb{R}^2 de la forme $P = [a; b] \times [c; d]$ avec $a < b$ et $c < d$. En d'autres termes, un pavé de \mathbb{R}^2 est un produit de deux segments de \mathbb{R} .

Théorème 2 (Fubini)

Soit $f : [a; b] \times [c; d] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur le pavé $[a; b] \times [c; d]$, alors les fonctions

$$x \mapsto \int_{y=c}^d f(x, y) \, dy \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_{x=a}^b f(x, y) \, dx$$

sont continues et on a

$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Définition 3

La valeur commune de ces deux intégrales est appelée **intégrale double** de f sur le pavé $P = [a; b] \times [c; d]$ et est notée

$$\iint_P f \quad \text{ou} \quad \iint_P f(x, y) \, dx \, dy.$$

Corollaire 4

Soit $f : [a; b] \times [c; d] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à variables séparées, c'est-à-dire qu'il existe $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $h : [c; d] \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\forall (x, y) \in [a; b] \times [c; d], \quad f(x, y) = g(x)h(y)$$

On suppose que g et h sont continues sur $[a; b]$ et $[c; d]$ respectivement, alors

$$\iint_{[a; b] \times [c; d]} f(x, y) \, dx \, dy = \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \left(\int_c^d h(y) \, dy \right).$$

Théorème 5 (Extension aux fonctions continues par morceaux)

Soit $f : [a; b] \times [c; d] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction **bornée**. On suppose que

- (i). pour tout $x \in [a; b]$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue par morceaux,
- (ii). pour tout $y \in [c; d]$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue par morceaux,
- (iii). la fonction $x \mapsto \int_c^d f(x, y) \, dy$ est continue par morceaux sur $[a; b]$,
- (iv). la fonction $y \mapsto \int_a^b f(x, y) \, dx$ est continue par morceaux sur $[c; d]$,

alors on a l'égalité

$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Cette valeur commune est encore appelée l'intégrale double de f sur $[a; b] \times [c; d]$ et notée $\iint_{[a; b] \times [c; d]} f \, dx \, dy$.

Définition 6

Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite **x -élémentaire** s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\varphi_1, \varphi_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in]a; b[, \quad \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$$

tels que l'on puisse écrire

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Définition 7

Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite **y -élémentaire** s'il existe $c, d \in \mathbb{R}$ avec $c < d$ et $\psi_1, \psi_2 : [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall y \in]c; d[, \quad \psi_1(y) < \psi_2(y)$$

tels que l'on puisse écrire

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$

Définition 8

Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite **élémentaire** si elle est à la fois x -élémentaire et y -élémentaire.

Théorème 9

Soient $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie élémentaire et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, alors si l'on note $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$, on a

$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Cette valeur commune est appelée **intégrale double** de f sur A et est encore notée $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$.

Définition 10

Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite **simple** si elle est réunion d'une famille finie non vide de parties élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints, i.e. s'il existe A_1, \dots, A_n parties élémentaires de \mathbb{R}^2 (avec $n \in \mathbb{N}^*$) vérifiant

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{et} \quad \forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad i \neq j \Rightarrow A_i^\circ \cap A_j^\circ = \emptyset.$$

Définition 11

Soit A est une partie simple de \mathbb{R}^2 , avec $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ où les A_i sont des parties élémentaires. Si $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, on appelle **intégrale double** de f sur A le scalaire

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Proposition 12

Soit A une partie simple. Pour toutes fonctions $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ continues, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

(i). $\iint_A \lambda f(x, y) + \mu g(x, y) \, dx \, dy = \lambda \iint_A f(x, y) \, dx \, dy + \mu \iint_A g(x, y) \, dx \, dy,$

(ii). si f est à valeurs positives, alors $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy \geq 0,$

(iii). si f est à valeurs positives et $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = 0$, alors f est nulle sur A ,

(iv). $\left| \iint_A f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| \, dx \, dy.$

Proposition 13

Soient A, B deux parties simples de \mathbb{R}^2 et $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Si $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$, alors

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy + \iint_B f(x, y) \, dx \, dy.$$