Définition 1

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est **périodique** *s'il existe un réel T strictement positif tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+T) = f(t).$$

On appelle alors T une période de f et on dit que f est T-périodique.

Proposition 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $g : [a; a+T[\longrightarrow \mathbb{C}$. Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ T-périodique dont la restriction à $[a; a+T[$ est égale à g, i.e. $f_{|_{[a;a+T[}} = g$.

Proposition 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et $a \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

(i). *f est continue,*

(ii). *la restriction de f au segment $[a; a+T]$, notée $f_{|_{[a;a+T]}}$, est continue.*

Définition 4

Soit $k \in \mathbb{N}$. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ T-périodique est dite **continue par morceaux** *(resp. de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux) si sa restriction au segment $[0; T]$ est continue par morceaux (resp. $\mathcal{C}^k$ par morceaux), c'est-à-dire s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[0; T]$ telle que pour tout $j \in [\![0; n-1]\!]$, la restriction de f à $]a_j; a_{j+1}[$, notée $f_{|_{]a_j;a_{j+1}[}}$, admette un prolongement continu (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) au segment $[a_j; a_{j+1}]$.*

Proposition 5

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $g : [a; a+T] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a; a+T]$, il existe une unique fonction f qui soit T-périodique, de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux et coïncidant avec la fonction g sur $[a; a+T[$.

Proposition 6

Toute fonction périodique continue par morceaux est bornée.

Proposition 7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 8

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux. On pose

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 9

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{CM}_{2\pi} \times \mathcal{CM}_{2\pi} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f, g) & \longmapsto & \langle f, g \rangle \end{array}$$

est une forme sesquilinéaire (i.e. linéaire à droite et semi-linéaire à gauche) hermitienne positive sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

Proposition 10

L'application $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{C}_{2\pi}$. Ainsi, $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un espace préhilbertien complexe.

Définition 11

Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on note

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t}.$$

Proposition 12

Pour tous $f, g \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on a :

(i). *Homogénéité : pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda f\|_2 = |\lambda|\,\|f\|_2$,*

(ii). *Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2\|g\|_2$,*

(iii). *Inégalité triangulaire : $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.*

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on considère les trois fonctions suivantes appartenant à $\mathcal{C}_{2\pi}$:

$$e_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ t & \longmapsto & e^{int} \end{array} \qquad C_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \cos(nt) \end{array} \qquad \text{et} \qquad T_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \sin(nt) \end{array}$$

Proposition 13

La famille de fonctions $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{C}_{2\pi}$. La famille $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{T_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille orthogonale de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Définition 14

*Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}\{e_k \mid k \in [\![-n; n]\!]\}$ et $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$. Les éléments de $\mathcal{P}$, qui correspondent à des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, sont appelés **polynômes trigonométriques**.*

Proposition 15

Soit $P \in \mathcal{P}$ un polynôme trigonométrique. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$P = \sum_{n=-p}^{p} c_n e_n \qquad \text{avec} \qquad c_n = \langle e_n, P\rangle$$

ce qui équivaut à $P = \dfrac{a_0}{2} e_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{p} (a_n C_n + b_n T_n)$ où $a_n = c_n + c_{-n} = 2\langle C_n, P\rangle$ et $b_n = i(c_n - c_{-n}) = 2\langle T_n, P\rangle$. On a de plus,

$$\|P\|_2^2 = \sum_{n=-p}^{p} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Définition 16

*On appelle **série trigonométrique** toute série de fonctions $\sum u_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est combinaison linéaire de e_n et e_{-n}. En d'autres termes, il existe $c_0 \in \mathbb{C}$ tel que $u_0 = c_0 e_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe c_n et $c_{-n} \in \mathbb{C}$ tels que $u_n = c_n e_n + c_{-n} e_{-n}$.*

Proposition 17

Les sommes partielles d'une série trigonométrique sont des polynômes trigonométriques.

Définition 18

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. On définit ses ***coefficients de Fourier exponentiels*** *par*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

et ses ***coefficients de Fourier trigonométriques*** *par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n(f) = 2\langle C_n, f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$
$$b_n(f) = 2\langle T_n, f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 19

Si une série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors sa fonction somme définie par

$$\begin{array}{rccl} S: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{int} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n e^{int} + \alpha_{-n}e^{-int}\right) \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et ses coefficients de Fourier exponentiels sont égaux à ses coefficients, i.e. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n = c_n(S)$.

Proposition 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \qquad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)),$$
$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}.$$

Proposition 21

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

- (i). *Si f est à valeurs réelles, alors ses coefficients de Fourier trigonométriques sont réels, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) \in \mathbb{R}$ et $b_n(f) \in \mathbb{R}$.*
- (ii). *Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$.*
- (iii). *Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.*

Proposition 22

Soient $f, g \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

- (i). *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$.*
- (ii). *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ où $\overline{f}$ désigne la fonction conjuguée de f.*
- (iii). *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, si l'on note $f_a : t \longmapsto f(t+a)$ la fonction translatée, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f_a) = e^{ina}c_n(f)$.*

Définition 23

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. On appelle ***série de Fourier*** *de f la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$. On appelle* ***somme de Fourier*** *de f la fonction somme de la série de Fourier de f :*

$$S(f) : t \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(f)$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f à savoir

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k = \frac{a_0(f)}{2}e_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)C_k + b_k(f)T_k).$$

Proposition 24

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f, notée $S_n(f)$, est le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_n$ et on a

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 \quad \text{et} \quad \|f - S_n(f)\|_2 = d(f, \mathcal{P}_n).$$

Proposition 25

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f - S_n(f)$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}\{e_k \mid k \in [\![-n;n]\!]\}$ c'est-à-dire que pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, $\langle f - S_n(f), P\rangle = 0$. En particulier, $\langle f - S_n(f), S_n(f)\rangle = 0$.

Corollaire 26 (*Inégalité de Bessel*)

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(f)$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$$

ce qui équivaut à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

De plus, la série bilatère $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et la série numérique $\sum(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ convergent et l'on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \leq \|f\|_2^2.$$

Corollaire 27

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, alors on a :

$$c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad a_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad b_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Lemme 28 (***Lemme de Riemann-Lebesgue***)

Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a;b]$, alors on a

$$\lim_{|n|\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = 0$$

Proposition 29

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^k$. Les coefficients de Fourier de f vérifient

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et par conséquent

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \qquad \text{quand} \qquad |n| \to +\infty.$$

Définition 30

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On dit que f est **développable en série de Fourier** *si sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f, c'est-à-dire si*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{int} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t).$$

Dans ce cas, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right).$$

Théorème 31 (***Théorème de Dirichlet (admis)***)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de f, notée $\widetilde{f} : t \longmapsto \dfrac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$, i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(f)(t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt} = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}.$$

Théorème 32 (***Théorème de convergence normale***)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est f.

Démonstration : Notons $u_0 = c_0(f)e_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}$. Puisque les fonctions u_n sont bornées, il s'agit de montrer que la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|u_n(t)| = \left|c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}\right| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$$

d'où

$$\|u_n\|_\infty \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|.$$

On va donc chercher à démontrer la convergence absolue des séries $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$ ($n \in \mathbb{N}$). Ceci va provenir du caractère $\mathcal{C}^1$ par morceaux et de la continuité de f. Soit $(a_0, \ldots, a_p)$ une subdivision de $[0; 2\pi]$ adaptée à f, alors on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} g_j(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t$$

avec g_j de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_j; a_{j+1}]$ telle que f et g_j coïncident sur $]a_j; a_{j+1}[$. Comme f est de plus continue sur $\mathbb{R}$, on a aussi $g_j(a_{j+1}) = g_{j+1}(a_{j+1}) = f(a_{j+1})$. Les fonctions intégrées étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc intégrer par parties chaque intégrale, ce qui entraîne pour $n \in \mathbb{Z}^*$

$$c_n(f) \quad = \quad \frac{1}{2i\pi n} \sum_{j=0}^{p-1} \Big[g_j(t) e^{-int} \Big]_{a_j}^{a_{j+1}} + \frac{1}{2i\pi n} \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} g_j'(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t.$$

Intéressons nous aux termes de bords :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p-1} \Big[g_j(t) e^{-int} \Big]_{a_j}^{a_{j+1}} &= \sum_{j=0}^{p-1} \Big(g_j(a_{j+1}) e^{-ina_{j+1}} - g_j(a_j) e^{-ina_j} \Big) \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} g_j(a_{j+1}) e^{-ina_{j+1}} - g_0(a_0) e^{-ina_0} - \sum_{j=1}^{p-1} g_j(a_j) e^{-ina_j} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} g_j(a_{j+1}) e^{-ina_{j+1}} - g_0(a_0) e^{-ina_0} - \sum_{j=0}^{p-2} g_{j+1}(a_{j+1}) e^{-ina_{j+1}} \\
&= g_{p-1}(a_p) e^{-ina_p} - g_0(a_0) e^{-ina_0} + \sum_{j=0}^{p-2} \underbrace{\big(g_j(a_{j+1}) - g_{j+1}(a_{j+1}) \big)}_{=0} e^{-ina_{j+1}} \\
&= f(2\pi) e^{-in2\pi} - f(0) e^0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui entraîne : pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2i\pi n} \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} g_j'(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t = \frac{c_n(h)}{in}$$

où h est la fonction 2π-périodique continue par morceaux, définie par

$$h(t) = g_j'(t) \text{ si } t \in [a_j; a_{j+1}[$$

(on ne sait pas si les valeurs des dérivées g_j' aux points de la subdivision sont les mêmes, donc on doit ouvrir l'intervalle au moins en l'un des deux bords). Par suite, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(h)|}{|n|} = 2 \, |c_n(h)| \, \frac{1}{2 \, |n|} \leq |c_n(h)|^2 + \frac{1}{4 \, |n|^2}.$$

Puisque la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, et que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} |c_n(h)|^2$ est aussi convergente d'après l'inégalité de Bessel appliquée à la fonction 2π-périodique et continue par morceaux h, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} |c_n(f)|$ est convergente, de même pour la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} |c_{-n}(f)|$. Ainsi, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Enfin, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers la régularisée de f, et puisque f est continue, elle est égale à sa régularisée. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=-k}^{k} c_n(f) e^{int}.$$

■

Théorème 33

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme *trigonométrique P_ε tel que $\|f - P_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$.*

Théorème 34 (*Théorème de Parseval*)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. La suite des sommes partielles $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ de la série de Fourier de f vérifie

$$\|S_n(f) - f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, on a l'égalité de Parseval-Bessel :

$$\|f\|_2^2 = \lim_{p\to+\infty} \|S_p(f)\|_2^2$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right).$$