Université Claude Bernard Lyon 1 — **Licence Sciences & Technologies**
Automne 2013 — **L2 mention mathématiques**
Contrôle final — **Unité d'enseignement *Fonctions de plusieurs variables***

Jeudi 9 janvier 2014 / Durée 2 heures

L'utilisation de documents de toute nature, de calculatrices, téléphones ou autres appareils électroniques n'est pas autorisée.

Questions de cours (4 points)

1. Définir ce qu'est un *ouvert* de $\mathbb{R}^d$ et donner un exemple avec $d \geq 2$ en le justifiant. Même question pour un *compact*.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction, et a un point dans $\mathbb{R}^n$. Que veut dire la phrase ≪f est différentiable en a≫ ?

3. On considère le système d'équations $F(x,y) = 0$ pour une fonction $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ ($p \geqslant 1, q \geqslant 1$). On connaît un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ qui est solution, et on s'intéresse à la possibilité de résoudre l'équation $F(x,y) = 0$ pour y en fonction de x. Énoncer soigneusement le *théorème des fonctions implicites* dans ce contexte.

Exercices (indépendants, ils peuvent être traités dans l'ordre de votre choix)

1. (8 points)$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = e^{-x}(1 + x - y)\sin y\,.$$

(1. a) Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$.

(1. b) Calculer le gradient de f et la matrice hessienne de f en tout point (x,y).

(1. c) Calculer le développement de Taylor-Young de f à l'ordre deux au point $(0,0)$.

(1. d) Trouver l'unique point critique de f situé dans l'ouvert

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 > x > 0,\ \pi > y > 0\},$$

et déterminer sa nature (minimum/maximum local ou point selle).

(1. e) On s'intéresse au problème de trouver les bornes de f sur la partie

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}.$$

Pourquoi peut-on affirmer que f atteint son maximum et son minimum sur A ? (Une ou deux phrases bien formulées suffiraient.)

(1. f) Sans chercher à les calculer, expliquer pourquoi les points où f atteint son minimum sur A sont situés sur la frontière de A (c'est-à-dire $A \backslash \mathring{A}$).

2. (10 points) On s'intéresse à la surface S dans $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$x^2(y-3)^2 + y^2 + y + z^2 - 1 = 0\,.$$

Autrement dit, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ h(x,y,z) = 0\}$, avec

$$h(x,y,z) := x^2(y-3)^2 + y^2 + y + z^2 - 1\,.$$

(2. a) Montrer que tout point $(x, y, z) \in S$ satisfait $|y| \leqslant 2$. (**Indication** : montrer que $h(x, y, z) = 0$ implique $|y| \leqslant (1 + \sqrt{5})/2$). En déduire que S est bornée. (**Indication** : montrer que $h(x, y, z) = 0$ implique $z^2 \leqslant 3$ et $x^2 \leqslant 3$.)

(2. b) Montrer que le gradient de h ne s'annule en aucun point de S.

(2. c) (Question facultative) Déterminer le plan tangent à S au point $(0, 0, 1)$.

(2. d) Prouver que la fonction $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := y + 2z$ atteint un minimum et un maximum sur S.

(2. e) Déterminer les points où f atteint ses bornes sur S. (**Indication :** pour un tel point $(a, b, c) \in S$, il existe un nombre λ tel que $\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla h(a, b, c)$.)

Pour chacun des deux points trouvés, préciser s'il correspond au maximum ou au minimum de f sur S.

(2. f) On définit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $g(x, y, z) = \cos x - ye^{-z} + z$ et ensuite $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ par $F(x, y, z) = (g(x, y, z), h(x, y, z))$. Calculer la matrice jacobienne de F en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(2. g) Calculer la matrice jacobienne de la fonction $(y, z) \mapsto F(0, y, z)$ au point $(0, -1)$ et montrer qu'elle est inversible.

(2. h) Démontrer qu'au voisinage du point $(0, 0, -1)$, l'équation $F(x, y, z) = 0$ équivaut à $(y, z) = \phi(x)$ pour une certaine fonction ϕ.

(2. i) En notant ϕ_1 et ϕ_2 les composantes de ϕ, calculer $\phi_1'(0)$ et $\phi_2'(0)$.

Bonus (2 pts) : Montrer qu'il n'est pas possible de résoudre l'équation $F(x, y, z) = 0$ en $(x, y) = \psi(z)$ au voisinage de $(0, 0, -1)$.