**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1h30

---

**DS commun no 2 - Correction partie algèbre**

---

**Exercice 1.**

1. Notons $h = f - f(0)u$. Alors $h(0) = f(0) - f(0)u(0) = f(0) - f(0) \times 1 = 0$ donc $h \in H$.
2. Montrons que $H \cap G = \{0\}$. Soit $f \in H \cap G$. Alors $f = \lambda u$ pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et de plus $f(0) = 0$. Par conséquent $0 = f(0) = \lambda u(0) = \lambda \times 1 = \lambda$. Ainsi $f = 0_E$.
   Montrons que $E = H + G$. Sont $f \in E$. On l'écrit sous la forme $f = h + f(0)u$ avec $h = f - f(0)u$. D'après la question 1, $h \in H$ et par définition de $G$, $f(0)u$ appartient à $G$. Ainsi $f \in H + G$.
3. (a) On calcule $\langle h, h\rangle = \int_0^1 h(t)^2 dt = \int_0^1 f(t) \times (t^2 f(t))dt = \langle f, k\rangle$ où on a défini $k \in E$ par $k(t) = t^2 f(t)$. Mais $k(0) = 0$, i.e. $k \in H$ et de plus $f \in H^\perp$ donc $\langle f, k\rangle = 0$.
   (b) Par la question précédente, on a $h = 0_E$, i.e. $\forall t \in [0,1],\ h(t) = tf(t) = 0$. Par conséquent $\forall t \in ]0,1],\ f(t) = 0$. Par continuité de $f$ en 0 on a $f(0) = 0$ d'où $f$ est nulle sur $[0,1]$, i.e. $f = 0_E$.
4. La question précédente nous dit que $H^\perp = \{0\}$.
   Si on avait $E = H \oplus H^\perp$ alors on aurait $E = H$. Or $E \neq H$ (car par exemple $u \in E$ et $u \notin H$) donc l'égalité $E = H \oplus H^\perp$ est fausse.

**Exercice 2.**

1. Soit $f \in E$.
   Analyse : on suppose qu'il existe $p, q \in E$ avec $p$ pair et $q$ impair tels que $f = p + q$.
   On a donc $f(X) = p(X) + q(X)$.
   Par conséquent $f(-X) = p(-X) + q(-X) = p(X) - q(X)$.
   En sommant les deux égalités et en divisant par 2, on obtient : $p(X) = \frac{1}{2}(f(X) + f(-X))$. De la même façon, en faisant la différence des égalités précédentes, on obtient : $q(X) = \frac{1}{2}(f(X) - f(-X))$.
   Synthèse : on définit $p, q \in E$ en posant $p(X) = \frac{1}{2}(f(X) + f(-X))$ et $q(X) = \frac{1}{2}(f(X) - f(-X))$. On voit facilement que $p(X) + q(X) = f(X)$. Vérifions que $p \in \mathcal{P}$ et $q \in \mathcal{I}$. On a bien $p(-X) = \frac{1}{2}(f(-X) + f(X)) = p(X)$ et $q(-X) = \frac{1}{2}(f(-X) - f(X)) = -q(X)$.
2. Soit donc $(f, g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$. Par définition, on a $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. Dans cette intégrale on fait le changement de variable $s = -t$ pour lequel on a $dt = -ds$. Quand $t = -1$, $s = 1$ et lorsque $t = 1$, $s = -1$. Après ce changement de variable on obtient :
   $$\langle f, g\rangle = \int_1^{-1} f(-s)g(-s)(-ds) = \int_{-1}^1 f(-s)g(-s)ds = \int_{-1}^1 f(s)(-g(s))ds = -\int_{-1}^1 f(s)g(s)ds = -\langle f, g\rangle.$$
   Ainsi $\langle f, g\rangle$ satisfait $x = -x$ ce qui entraine $2x = 0$ et $x = 0$, d'où $\langle f, g\rangle = 0$.
3. La question 2 entraine que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ (en effet si $f$ est dans l'intersection alors $\langle f, f\rangle = 0$ ce qui entraine $f = 0$). Par la question 1, on déduit l'égalité $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
   Par la question 2, on a aussi $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}^\perp$. Mais $\dim(\mathcal{P}^\perp) = \dim(E) - \dim(\mathcal{P})$ qui est aussi égale à $\dim(\mathcal{I})$ par la somme directe ci-dessus, donc l'inclusion $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}^\perp$ est une égalité.
4. On sait, d'après le cours que $d(f, \mathcal{P}) = \|f - p_{\mathcal{P}}(f)\| = \|p_{\mathcal{P}^\perp}(f)\|$. Ici $f = p + q$ avec $p(X) = 3 \in \mathcal{P}$ et $q(X) = 2X \in \mathcal{I}$. On obtient alors $d(f, \mathcal{P}) = \|q\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (2t)^2 dt} = \sqrt{(8/3)}$.