Université Claude Bernard - Lyon 1 — Automne 2014

Math II - PMI/CCP — Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 3

Les calculatrices ne sont pas autorisées

L'ensemble du sujet porte sur une même problématique (les cercles dans le plan complexe, en gros). Quelques questions d'entraînement préalable, qui ne servent à rien pour la suite, ont été regroupées en deux exercices courts et totalement indépendants, sans aucune utilité pour le traitement du problème principal.

Étant donné un plan Π muni d'un repère orthonormé, on appelle **image** du complexe $z = x + iy$ (x, y réels) le point A de coordonnées (x, y), et on appelle **affixe** du point A de coordonnées (x, y) le nombre complexe $z = x + iy$.

Dans ce qui suit, pour alléger l'expression, on dira que des nombres complexes sont alignés lorsque leurs images le sont, qu'ils sont cocycliques lorsque leurs images le sont. Un sous-ensemble de $\mathbf{C}$ sera appelé une droite lorsque l'ensemble des images de ses points est une droite de Π, de même pour un cercle.

Pour a, b et c nombres complexes distincts, on appelle **simple rapport** de a, b et c, le nombre complexe :

$$S(a,b,c) = \frac{c-a}{b-c}.$$

Pour a, b, c et d nombres complexes distincts, on appelle **birapport** de a, b, c et d le nombre complexe :

$$B(a,b,c,d) = \frac{S(a,b,c)}{S(a,b,d)}.$$

Exercice 1

1) Montrer que les nombres complexes $1 + 2i$, i et $3 + 4i$ sont alignés.

2) Montrer que les nombres complexes 1, i, -1 et $1 + i$ ne sont pas cocycliques.

Exercice 2

3) Soit φ et ψ deux réels. Vérifier l'identité :

$$e^{i\varphi} - e^{i\psi} = 2ie^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right).$$

4) En déduire que pour tous α, β, γ et δ réels, distincts modulo 2π :

$$B(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}) \in \mathbf{R}.$$

Problème

Dans deux questions de ce problème, on note f l'application de $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ vers $\mathbf{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}.$$

5) a) Montrer que pour tous complexes a, b et c distincts, tout complexe v et tout complexe non nul q :

$$S(a,b,c) = S(a+v, b+v, c+v) = S(qa, qb, qc).$$

b) Montrer que pour tous complexes non nuls a, b, c et d distincts :

$$B(a,b,c,d) = B(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}).$$

6) a) Soit a et b deux complexes distincts. Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{a, b\}$:

$$a,\ b \text{ et } z \text{ sont alignés} \iff S(a,b,z) \in \mathbf{R}.$$

b) Soit a, b et c trois complexes distincts et alignés. Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{a, b, c\}$:

$$a,\ b,\ c \ \text{ et } z \text{ sont alignés} \iff B(a, b, c, z) \in \mathbf{R}.$$

7) Soit a, b, c et d quatre complexes distincts et tous différents de 1. En remarquant que pour tout z complexe différent de 1, $f(z) = 1 + \dfrac{2}{z-1}$, et en utilisant la question 5, montrer :

$$B(f(a), f(b), f(c), f(d)) = B(a, b, c, d).$$

8) Soit z un complexe avec $z \neq 1$. Montrer que :

$$|z| = 1 \iff f(z) \text{ est imaginaire pur.}$$

9) Soit a, b et c trois nombres complexes distincts, qui sont tous de module 1 et sont tous différents de 1.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{a, b, c, 1\}$:

$$B(a, b, c, z) \in \mathbf{R} \iff |z| = 1.$$

b) Montrer que $B(a, b, c, 1) \in \mathbf{R}$. Suggestion : on pourra choisir judicieusement un nombre complexe q de module 1 et s'intéresser à $B(qa, qb, qc, q)$.

c) Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{a, b, c\}$:

$$B(a, b, c, z) \in \mathbf{R} \iff |z| = 1.$$

10) Soit a, b et c trois nombres complexes non alignés (et donc distincts).

a) Montrer qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ qui passe par a, b et c.

b) Montrer qu'il existe un complexe v tel que l'ensemble $\{z + v \mid z \in \mathcal{C}\}$ soit un cercle centré en 0.

c) Montrer qu'il existe un complexe v et un complexe q non nul tels que l'ensemble $\{q(z + v) \mid z \in \mathcal{C}\}$ soit le cercle centré en 0 et de rayon 1 et que les trois complexes $q(a + v)$, $q(b + v)$ et $q(c + v)$ soient tous trois différents de 1.

d) Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{a, b, c\}$:

$$B(a, b, c, z) \in \mathbf{R} \iff z \in \mathcal{C}.$$

11) Dans cette question, on note i l'application de $\mathbf{C}^*$ vers $\mathbf{C}^*$ définie par $i(z) = 1/z$.
Soit $\mathcal{C}$ un cercle qui ne passe pas par 0. On note r le rayon de $\mathcal{C}$ et ρ le module de son centre. On note enfin $\mathcal{C}' = i(\mathcal{C})$.
Soit a, b et c trois points distincts de $\mathcal{C}$.

a) Justifier que $\rho \neq r$.

b) Montrer que pour tout z de $\mathcal{C}$, $|r - \rho| \leq |z|$. Suggestion : noter ω le centre de $\mathcal{C}$ et calculer $|z|^2$ après avoir mis z sous la forme $\omega + re^{i\theta}$, θ réel.

c) Montrer que pour tout w de $\mathcal{C}'$, $|w| \leq \dfrac{1}{|r - \rho|}$.

d) Montrer que :

$$\mathcal{C}' = \{w \in \mathbf{C}^* \mid B(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, w) \in \mathbf{R} \text{ ou } w = \frac{1}{a} \text{ ou } w = \frac{1}{b} \text{ ou } w = \frac{1}{c}\}.$$

e) Montrer que $1/a$, $1/b$ et $1/c$ ne sont pas alignés. Suggestion : utiliser tout plein de choses déjà montrées et notamment le c) et le d) qui précèdent.

f) Montrer que si $1/a$, $1/b$, $1/c$ et 0 ne sont pas cocycliques, alors $\mathcal{C}'$ est un cercle.

g) Montrer que $\mathcal{C}'$ est un cercle.