Feuille d'exercices 4
Bijections et dénombrement

Exercice 1.

1. On note $A = \{1,2,3,4\}$ et $B = \{0,1,2\}$. Décrire les ensembles $A \cap B, A \cup B$ et $A \times B$.
2. On note $A = [1,3]$ et $B =]2,3]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Déterminer $[3,8[\cap \mathbb{Z}, [-3,2[\cap \mathbb{N}$ et $]0,1[\cap \mathbb{Z}$.
4. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties $]-\infty, 0]$ et $[1,2[$.
5. Déterminer $]-2,3] \setminus \mathbb{Z}$, $]-2,3] \setminus [0,4]$ et $]-2,3] \setminus [-4,4]$.

Exercice 2.

1. Ecrire l'ensemble des entiers naturels pairs en extension puis en compréhension.
2. Ecrire les ensembles suivants en extension.
   a. $\{n \in \mathbb{N} | n \leq 2\}$;
   b. $\{n \in \mathbb{N} | n < 1\}$;
   c. $\{n \in \mathbb{N} | n \leq 1 \text{ et } n \text{ est divisible par } 2\}$.
   d. $\{n \in \mathbb{N} | \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$;
   e. $\{n \in \mathbb{N} | \forall m \in \mathbb{N}, n < m\}$;
   f. $\{n \in \mathbb{N} | n \text{ divise } 12 \text{ ou divise } 55\}$;
   g. $\{n \in \mathbb{N} | n \text{ ne divise pas } 12 \text{ et } n \leq 7\}$;

Exercice 3.

1. $\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x \geq 2\}$;
2. $\left\{x \in \mathbb{R}_- \middle| \frac{x+1}{2x-1} > 4\right\}$;
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 3xy + 4y^2 = -1\}$;
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 3xy + 4y^2 = 4\}$;
5. $\{(x,y) \in [0,5] \times [0,3] | 2x - 5y - 10 \geq 0\}$.

Exercice 4. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer que $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ et
$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cup A)$$
2. Montrer l'équivalence des propositions :
   a. $A \subset B$;
   b. $A \cap B = A$;
   c. $A \cup B = B$;
   d. $A \setminus B = \emptyset$.
3. Montrer l'équivalence des propositions :
   a. $A \cup B = A \cap B$;
   b. $B \subset A \subset C$.
4. Montrer les implications
$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } B \setminus A = C \setminus A) \Rightarrow B = C$$
$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow B \subset C$$

Exercice 5. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f:\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+1 \end{cases}$
2. $g:\begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \longmapsto n+1 \end{cases}$
3. $h:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto (2x-y, 4x-2y) \end{cases}$
4. $k:\begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$

Exercice 6. Soit

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \longmapsto 2n \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \longmapsto E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

Où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 7. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g: [-1,1] \to [-1,1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 8. Soit f une application de E vers F avec $Card(E) = Card(F) = n$. Montrer que les trois propriétés sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Exercice 9. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y a-t-il d'application injective $f: I_2 \to I_n$?
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de I_p dans I_n ?
3. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f: I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Exercice 10. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a $n!$ Bijection de E vers E.

Exercice 11. Indicatrice d'une partie d'un ensemble.

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des partie de E. Soit A une partie de E : $A \in \mathcal{P}(E)$. On note $\overline{A} = E \setminus A$, le complémentaire de A dans E.

Pour tout $A \subset E$ on définie une fonction *indicatrice* de A sur E à valeurs dans $\{0,1\}$, notée $\mathbb{I}_A$, définie pour tout $x \in E$ par :

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \overline{A} \end{cases}$$

1. On considère deux exemples :
   a. Soient $E = \{a,b,c,d\}$, $A = \{a,b,c\} \subset E$ et $B = \{c,d\} \subset E$. Expliciter les fonctions $\mathbb{I}_E$, $\mathbb{I}_\emptyset$, $\mathbb{I}_A$, $\mathbb{I}_{\overline{A}}$, $\mathbb{I}_B$ ainsi que $\mathbb{I}_{A\cap B}$ et $\mathbb{I}_{A\cup B}$.

b. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{I}_A: \mathbb{R} \to \{0,1\}$ sa fonction indicatrice sur $\mathbb{R}$. Décrire les ensemble $\mathbb{I}_A(A)$, $\mathbb{I}_A(\overline{A})$, $\mathbb{I}_A(\mathbb{R})$, $\mathbb{I}_A^{-1}(\{1\})$, $\mathbb{I}_A^{-1}(\{0\})$ et $\mathbb{I}_A^{-1}(\{0,1\})$.

2. Soient un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$, démontrer les propriétés de la fonction indicatrice :
   a. Inclusion : $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{I}_A \leq \mathbb{I}_B$. (Cela signifie que pour tout $x \in E$, on a $\mathbb{I}_A(x) \leq \mathbb{I}_B(x)$.)
   Egalité : $A = B \Leftrightarrow \mathbb{I}_A = \mathbb{I}_B$
   b. Opérations ensembliste :
   $$\mathbb{I}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{I}_A;\ \mathbb{I}_{A\cap B} = \max\{\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B\} = \mathbb{I}_A.\mathbb{I}_B;\ \mathbb{I}_{A\cup B} = \min\{\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B\} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A.\mathbb{I}_B.$$
   c. Lien avec le cardinal : si A est une partie finie de E alors
   $$|A| = \sum_{x\in E} \mathbb{I}_A\,(x)$$
3. Formule du crible. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que
   $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
4. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$.
   a. Quel est le cardinal de $\mathcal{F}$?
   b. Soit
   $$\phi: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}: A \longmapsto \mathbb{I}_A$$
   Une application qui à chaque partie de E associe sa fonction indicatrice. Montrer que ϕ est une application injective. En déduire que ϕ est bijective.
   c. En déduire que $\mathcal{P}(E)$ est fini et calculer son cardinal.
5. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer
   $$\sum_{A,B\subset E} |A \cap B| \quad \text{et} \quad \sum_{A,B\subset E} |A \cup B|$$

Exercice 12. Deux autres preuves

Soit E un ensemble, avec $Card(E) = n$. Démontrer que $Card\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$.

- En utilisant les coefficients $\binom{n}{k}$.
- En raisonnant par récurrence sur n.

Exercice 13. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable à l'aide de l'application $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par ;
$$\varphi(n) = 2n - 1 \text{ si } n > 0 \ \ et \ \ \varphi(n) = -2n \text{ si } n \leq 0$$