Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Cursus préparatoire, $1^{\text{ère}}$ année, $2^{\text{ème}}$ semestre : Analyse

---

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 9

INTÉGRATION : EXERCICES THÉORIQUES

---

1 Fonctions en escalier et intégrabilité

Exercice 9.1.

1. Montrer que le produit de deux fonctions en escalier sur un intervalle I est une fonction en escalier sur I.
2. La composée de deux fonctions en escalier sur un intervalle I est-elle toujours une fonction en escalier sur I ?

Exercice 9.2.

1. Montrer que si f est une fonction bornée, intégrable et paire sur l'intervalle $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$,
2. Montrer que si f est une fonction bornée, intégrable et impaire sur l'intervalle $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Exercice 9.3. Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. On sait que f intégrable sur $[a, b] \Rightarrow |f|$ intégrable sur $[a, b]$. Est-ce que la réciproque est également vraie ?

2 Manipulations simples sur les intégrales définies

Exercice 9.4. Prouver l'énoncé suivant : Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, à valeurs positives, telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors f est nulle sur $[a; b]$.

Exercice 9.5. Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Montrer que f est de signe constant si et seulement si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right|$.

Exercice 9.6. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, $\displaystyle\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt$ tend vers $\displaystyle\frac{1}{2}f(0)$.

Exercice 9.7.

1. Montrer que $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9.8. Donner une expression raisonnablement simple des dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t} dt \qquad\qquad g(x) = \int_0^{x^2} (\mathrm{Arctan}(t+x))^7 \, dt.$$

Exercice 9.9.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$.
2. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt[n]{1+t^2} dt$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.
3. (a) A l'aide du développement de Taylor-Lagrange, déduire l'inégalité : $|e^u - 1 - u| \leq \dfrac{1}{2} u^2 e^u$.

   (b) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, on a $\left| \sqrt[n]{1+t^2} - 1 - \dfrac{1}{n} \ln(1+t^2) \right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, puis fournir une suite $(v_n)_n$ très simple telle que $\dfrac{u_n - 1}{v_n} \longrightarrow 1$ quand $n \to +\infty$.