Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2011-2012

Math III - PMI

Feuille d'exercices n° 9

CALCUL DIFFÉRENTIEL

---

1 Derivées partielles

Exercice 1. Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ suivant le vecteur $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ au point A de coordonnées $(2,1)$.

Exercice 2. Soit $\overrightarrow{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\overrightarrow{G}(x,y,z) = (x \sin y, y \sin x, z)$. Calculer $\operatorname{div}(\overrightarrow{G})$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{G})$ et $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \circ \operatorname{div}(\overrightarrow{G})$.

Exercice 3. Soit $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\overrightarrow{F} = r^2(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j})$ où $r = x^2 + y^2$.

1. Calculer $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial r}{\partial y}$.
2. Trouver $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{F}$.

Exercice 4. Étudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x| > y \\ y^2, & |x| \leq y \end{cases}$$

2 Différentielle d'une fonction

Rappel. GRANDE IDÉE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL :

$$\begin{pmatrix} \text{accroissement} \\ \text{de la fonction} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{terme linéaire par rapport à} \\ \text{l'accroissement de la variable} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{petit terme} \\ \text{correctif} \end{pmatrix}$$

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $A \in D$. La <u>différentielle</u> $\mathrm{d}f(A)$ de f au point A est <u>une application linéaire</u> de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que au voisinage de A on a :

$$f(A+h) - f(A) = (\mathrm{d}f(A))\,(h) + r(h), \text{ où } r(h) = o(\|h\|).$$

Ici, $h \in \mathbb{R}^p$, tel que $A + h$ est au voisinage de A.
La différentielle d'une fonction est donnée par sa matrice jacobienne.

Exercice 5. Soient E, F deux espaces réels et $f : E \to F$ une fonction de classe C^1. Dans les cas suivants trouver la dimension de la matrice jacobienne de f, puis à l'aide des entrées de la matrice jacobienne décrire la différentielle de f :

1. f est une fonction réelle d'une variable réelle ($E = F = \mathbb{R}$.)
2. f est une fonction vectorielle d'une variable réelle ($E = \mathbb{R},\ F = \mathbb{R}^p$.)
3. f est une fonction numerique (réelle) d'une variable vectorielle ($E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$.) Quel est le lien avec le gradient de f dans ce cas là ?
4. f est une fonction vectorielle d'une variable vectorielle ($E = \mathbb{R}^n,\ F = \mathbb{R}^p$.)

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. L'application est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$ mais n'y est pas différentiable.

Exercice 8. Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On considère les assertions suivantes :

A. L'application f est continue en $(0,0)$.

B. Les dérivées partielles $(\partial f/\partial x)(0,0)$ et $(\partial f/\partial y)(0,0)$ existent et sont continues.

C. L'application f est différentiable en $(0,0)$.

1) Rappeler les implications qu'il y a entre ces propriétés.

2) Montrer que chaque implication n'est pas une équivalence. On pourra utiliser les deux fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } y = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

$$\text{et} \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x + 5y + x^2(\sqrt{|y|} + \sqrt{|x|})$. Déterminer l'ensemble des points où f

1. est continue ;
2. est différentiable ;
3. est de classe C^1 ;
4. admet des dérivées partielles ;
5. admet des dérivées directionnelles.

3 Fonctions composées

Exercice 10. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrices Jacobiennes.

$$f(x,y) = e^{xy}(x+y),\ \ g(x,y) = xy + yz + zx,\ \ h(x,y) = (y\sin x, \cos x)$$

Exercice 11. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielles.

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x^2 - z^2}{2},\ \sin x \sin y\right),\ \ g(x,y) = \left(xy, \frac{x^2}{2} + y, \ln(1+x^2)\right)$$

Exercice 12. Soit $f(x,y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui a des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}.$$

Soit $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, r \in \mathbb{R}_{>0}, \theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ en tant que fonctions de r et θ.

Exercice 13.

1. Si $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, dériver les fonctions $u(x) = f(x,-x)$ et $g(x,y) = f(y,x)$.
2. Soient E et F deux espace normés, U un ouvert de E, et $f : E \to F$, différentiable. Pour $a \in U$ et $v \in E$ dériver la fonction composée $t \mapsto f(a+tv)$ en $t = 0$.

Exercice 14. Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ (une application d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$). Soit $f(x,y) = e^{xy}$. En sachant que $\gamma(0) = (1,2)$, et $\gamma'(0) = (3,4)$. Trouver la valeur de $\left.\dfrac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}$.

Exercice 15. Soit $z(t) = f(x(t), y(t))$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ et x et y sont des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$. Trouver une expression pour $z'(t)$. Appliquer la formule aux cas particuliers :

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ avec $x = t$ et $y = e^{3t}$.
2. $f(x,y) = xy^2 + x^2y$ avec $x = t^2$ et $y = \ln t$.

Exercice 16. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \text{ et } g(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z)$$

On considère aussi $h = f \circ g$.

1. Expliciter h. Montrer que f, g et h sont de classe C^1 et écrire leur jacobiennes.
2. Vérifier que $J_{h_{(x,y,z)}} = J_{f_{g(x,y,z)}} \circ J_{g_{(x,y,z)}}$