Feuille d'exercices numéro 9

Matrices, détérminants

Dans tous les exercices de cette feuille, le corps des scalaires est supposé être $\mathbf{R}$.

Exercice 9.1

On définit la trace d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ par

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Soit A et B deux matrices carrées de taille n. Montrer que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Exercice 9.2

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ deux matrices à coefficients réels. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et soient (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) deux bases de E ; soit F un espace vectoriel de dimension 1 et f_1 un vecteur non nul de F. On suppose que la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) est la matrice P.

1. Calculer la matrice P^{-1}
2. Soit u l'application linéaire de E vers F dont la matrice est A dans les bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1). Donner la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et $(5f_1)$.

Exercice 9.3

Soit E un espace vectoriel et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\underline{e}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$ et $f_3 = e_3 - e_1$.

1. Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
2. Calculer la matrice de u dans $\underline{f}$.
3. Calculer A^{100}.

Exercice 9.4

Pour un entier n, soit D_n le déterminant suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Déterminer une relation de récurrence liant D_n et D_{n-1}, puis calculer D_n pour tout entier n.