

---

Feuille d'exercices n° 8 : APPLICATIONS DE LA RÉDUCTION

---

### I. Calculs de puissances, d'exponentielles :

**Exercice 1.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A$  est trigonalisable mais non diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. Trigonaliser  $A$  de manière à obtenir une matrice diagonale par blocs.
3. En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 2.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels. On considère dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 2$ , la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de  $A$ , noté  $\pi_A$ .
2. En effectuant la division euclidienne de  $X^k$  par  $\pi_A$ , calculer  $A^k$  pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ .
3. Calculer  $e^{tA}$  pour tout réel  $t$ .

**Exercice 3.** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dont la matrice dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix}$ , où les  $n$  premières colonnes sont égales.

1. Calculer le rang de  $u$  et en déduire que le spectre de  $u$  a un et un seul élément.
2. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
3. Calculer  $e^{tu}$  pour tout réel  $t$ .

### II. Suites récurrentes linéaires

**Exercice 4.** Résoudre (dans  $\mathbb{R}$ ) le système récurrent suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -x_n + z_n \\ z_{n+1} = -2x_n - 3y_n + 3z_n \end{cases}$$

(on pensera à réutiliser les résultats de l'exercice 1).

**Exercice 5.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ . Expliciter une matrice  $A$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $X_{n+1} = AX_n$ .
2. Utiliser alors le calcul des puissances de  $A$  pour en déduire une expression non récurrente de  $u_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  (on pourra diagonaliser  $A$ , ou faire la division euclidienne du polynôme  $X^n$  par le polynôme minimal de  $A$ ).

**Exercice 6.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}.$$

En adaptant la technique de l'exercice précédent, donner une expression explicite de  $u_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 7.** Résoudre le système linéaire récurrent suivant :

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2z_{n-1}. \end{cases}$$

### III. Résolution de systèmes différentiels

**Exercice 8.** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 7x(t) - 10y(t) \\ y'(t) = -2x(t) - y(t) \end{cases}$$

d'inconnues  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dérivables.

**Exercice 9.** Déterminer toutes les solutions  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 9y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

qui vérifient  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 2$ .

**Exercice 10.** Résoudre le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

d'inconnues  $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables.

**Exercice 11.** Résoudre le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = CX(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d'inconnue  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  dérivable (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 2).

**Exercice 12.** Résoudre sur l'équation différentielle :  $y''' + y'' - y' - y = 0$ , puis l'équation différentielle :  $y''' + y'' - y' - y = \cos t$  d'inconnue  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  trois fois dérivable.

**Exercice 13.** Montrer comment la résolution du système :

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y''(t) = -x(t) - y(t) + y'(t) \end{cases}$$

peut être ramenée à celle d'un système linéaire du premier ordre à coefficients constants.

**Pour s'entraîner :**

**Exercice 14.** Soient  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  et  $u$  l'endomorphisme de  $E$  dont

la matrice dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Déterminer le rang de l'endomorphisme  $u - (1 - a)\text{id}_E$ . En déduire que  $1 - a$  est valeur propre de  $u$ .
2. Si  $a = 0$ , l'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
3. Dans toute la suite, on suppose que le réel  $a$  est non nul. Déterminer toutes les valeurs propres de  $u$ . L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de  $u$ .
5. Notons  $E_1 = \text{Ker}(u - (1 - a)\text{id}_E)$  et  $E_2 = \text{Ker}(u - (1 + 3a)\text{id}_E)$ . Montrer que  $E = E_1 \oplus E_2$ .
6. Exprimer les endomorphismes  $u^k$  pour tout entier  $k \geq 1$ , et  $e^u$  en fonction de  $\text{Id}$  et  $u$  et expliciter leurs matrices dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .